UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES

SUR LES CARDINAUX DANS LES "NEW FOUNDATIONS" DE QUINE.

ANNEE ACADEMIQUE
1975 - 1976

DISSERTATION PRESENTEE
PAR
André PETRY
POUR L'OBTENTION DU GRADE
DE DOCTEUR EN
SCIENCES MATHEMATIQUES

TABLE DES MATIERES

* * * *

INTRODUCTION

NF désigne la théorie des ensembles "New Foundations" inventée par Quine ([17] , [18]). Le langage de NF est constitué en plus des symboles $\wedge$, $\neg$, $\forall$, (,), d'une seule sorte de variables, de l'égalité et d'un symbole relationnel binaire $\in$ (l'appartenance). Dès lors $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\exists$ peuvent être définis et les formules peuvent être construites comme dans tout langage du premier ordre avec égalité (voir [5]). Rappelons qu'une sentence est une formule sans variable libre et que, si nous désignons une formule par $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$, cela sous-entend que ses variables libres se trouvent parmi $x_1, \ldots, x_n$.

Certaines formules ont dans NF une place privilégiée, ce sont les <u>formules stratifiées</u> : une formule $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ est stratifiée si on peut associer à chacune de ses variables un nombre naturel - appelé le type de la variable - tel que, si $x \in y$ intervient dans $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$, (type x) + 1 = type y , et si $x' = y'$ intervient dans $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$, type x' = type y' ; une telle association est appelée une strafification de $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$.

NF est la théorie du premier ordre avec égalité (voir [5]) dont nous avons décrit le langage et dont les axiomes sont l'<u>Axiome d'Extensionnalité</u>, c'est-à-dire la sentence

$$(\forall x, y)\ \big((\forall z)\ (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y\big),$$

et les sentences représentées par le <u>Schéma de Compréhension limité aux formules stratifiées</u>, c'est-à-dire les sentences

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)\ (\exists y)\ (\forall x)\ (x \in y \longleftrightarrow \varphi\ (x, x_1, \ldots, x_n)),$$

$\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ variant dans les formules stratifiées ($n \geqslant 0$). Sauf mention explicite du contraire, nous nous plaçons dorénavant dans NF.

Remarquons qu'il existe - à l'opposé de ZF - un ensemble appelé l'univers et noté V, tel que

$$(\forall x)\ (x \in V \longleftrightarrow x = x).$$

D'autre part le paradoxe de Russell ne peut être reproduit dans NF ; en effet la formule $x \notin x$ n'étant pas stratifiée, on ne peut déduire directement des axiomes l'existence d'un ensemble a tel que

$$(\forall x)\ (x \in a \longleftrightarrow x \notin x).$$

La plupart des concepts ensemblistes habituels sont définis comme dans ZF, certaines définitions sont cependant fondamentalement différentes. Signalons-en dès maintenant quelques traits saillants. On n'utilise pas le couple de Kuratowski, défini par $\langle x, y\rangle_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, mais le couple de Quine (voir "Quelques définitions et propriétés"); en effet ce dernier couple a le gros avantage pour NF d'accorder à $\langle x, y\rangle$ le même type qu'à x et y, tandis que $\langle x, y\rangle_K$ a un type supérieur de deux unités aux types de x et y. Le cardinal de x, noté $|x|$, est l'ensemble des ensembles équipotents à x et l'ordinal d'un bon ordre r, noté No(r), est l'ensemble des bons ordres isomorphes à r ; de plus, l'ensemble des cardinaux, noté NC, et l'ensemble des ordinaux, noté NO, existent. On définit la relation d'ordre classique entre les cardinaux, notée $\leqslant$, par

$$|x| \leqslant |y| \longleftrightarrow (\exists f)\ (f \text{ injection de } x \text{ vers } y)\ ,$$

et la relation de bon ordre, non moins classique, entre les ordinaux, notée $\leqslant_o$, par

$$\mathrm{No}(r) \leqslant_o \mathrm{No}(s) \longleftrightarrow (r, s \text{ bons ordres } \wedge$$
$$r \text{ est isomorphe à un segment initial de } s \text{ ou à } s \text{ tout entier})\ .$$

Le schéma de compréhension étant limité aux formules stratifiées, le principe d'induction, que ce soit sur un bon ordre quelconque, sur les ordinaux ou sur les naturels, est vérifié pour les formules stratifiées mais pas nécessairement pour les formules non stratifiées.
Un autre résultat très important et qui sera très souvent utilisé, est le théorème de Specker [22] , selon lequel l'univers ne peut être bien ordonné ou, ce qui est équivalent, que l'axiome du choix est faux. Il s'ensuit notamment qu'il existe un ensemble infini ; remarquons que, dans ZF, c'est un axiome - l'axiome de l'infini - qui nous garantit l'existence d'un ensemble infini.

Au chapitre I, nous examinons ce que deviennent dans NF quelques propriétés classiques des cardinaux - propriétés d'ailleurs parfois peu connues -, soit (paragraphes I.1. et I.2.) qu'elles nous seront nécessaires pour établir le résultat principal du chapitre II (théorème II.2.2.), soit (paragraphes I.3. et I.4.) qu'elles aient un intérêt propre. Nous en déduisons ensuite certaines conséquences à propos de deux problèmes toujours ouverts dans NF : peut-on partager l'univers en deux ensembles de cardinal strictement inférieur à celui de l'univers (paragraphe I.5.), et existe-t-il une infinité de cardinaux infinis (paragraphe I.6.). Par exemple, en cas de réponse négative à cette dernière question, nous établissons que l'ensemble des cardinaux supérieurs ou égal à $\aleph_0$ et muni de l'ordre $\leqslant$ est un lattis distributif (théorème I.6.2)

La formule $y = \{x\}$ est stratifiée lorsque type y = (type x) + 1 ; étant donné un ensemble a, nous ne pouvons donc en général déduire directement des axiomes de NF l'existence d'une fonction f telle que $f(x) = \{x\}$ pour tout $x \in a$, ni d'ailleurs l'existence d'une bijection entre a et l'ensemble constitué par les singletons des éléments de a. Nous touchons là un trait fondamental de NF qui est l'objet du chapitre II. Les définitions suivantes acquièrent dès lors une très grande importance :

$$USC(x) = \{\{y\} \mid y \in x\},$$

$$T(m) = |USC(x)| \quad \text{si} \quad m = |x|,$$

$$RUSC(r) = \{\langle\{x\},\{y\}\rangle \mid \langle x,y\rangle \in r\},$$

$$U(\alpha) = No(\ RUSC(r)\ ) \quad \text{si } \alpha = No(r)\ ;$$

un ensemble a est cantorien, en abrégé Can(a), s'il est équipotent à USC(a), il est fortement cantorien, en abrégé stCan(a), s'il existe une fonction f telle que $f(x) = \{x\}$ pour tout $x \in a$, enfin un cardinal est qualifié de cantorien, respectivement fortement cantorien, s'il est le cardinal d'un ensemble cantorien, respectivement fortement cantorien. Plusieurs résultats classiques doivent subir dans NF quelques modifications. Ainsi, en notant par SC(a) l'ensemble des parties de a, le théorème de Cantor s'énonce ici

$$(\forall x)\ (\ |USC(x)| < |SC(x)|\ ) \qquad [Ca]$$

et non, comme dans ZF,

$$(\forall x)\ (\ |x| < |SC(x)|\ ) \qquad [C'a]\ ;$$

de même, si α est un ordinal et si $\leqslant_o | \alpha$ désigne la restriction de $\leqslant_o$ aux ordinaux strictement inférieurs à α, nous avons

$$No\ (\leqslant_o | \alpha) = U(U(\alpha)) \qquad [Or]\ ,$$

et non, comme dans ZF,

$$No\ (\leqslant_o | \alpha) = \alpha \qquad [O'r]\ .$$

C'est grâce à ces modifications que le paradoxe de Cantor (en faisant $x = V$ dans [C'a]) et le paradoxe de Burali-Forti (en prenant dans [O'r] α égal à l'ordinal du bon ordre $\leqslant_0$) ne se reproduisent pas dans NF et se traduisent respectivement par les théorèmes fondamentaux

$$|USC(V)| < |V|$$

et, en désignant par Ω l'ordinal du bon ordre $\leqslant_0$,

$$\Omega = \text{minimum}\left\{\alpha \mid \alpha \in NO \wedge \neg(\exists \beta \in NO)(\alpha = U(U(\beta)))\right\}.$$

Ainsi Ω est de la forme $U(\alpha)$ mais non de la forme $U(U(\alpha))$; il s'ensuit :

$$U(\Omega) <_0 \Omega .$$

V et NO sont de "grands" ensembles. La question se pose dès lors de savoir s'il peut exister de "petits" ensembles, par exemple des ensembles finis, qui soient non cantoriens. Cette question fait l'objet d'un axiome important, l'axiome de Rosser, noté R, qui est équivalent à

$$(\forall x \text{ fini})(Can(x)).$$

Orey [14] a démontré que cet axiome n'était pas un théorème de NF car il y implique la consistance de NF.
Il apparaît ainsi que les positions relatives occupées par $|x|$ et $|USC(x)|$ constituent un problème très important dans NF. En raison de la forme prise par le théorème de Cantor dans NF, un autre problème est constitué par les positions relatives de $|x|$ et $|SC(x)|$. C'est sur ces deux problèmes que nous nous sommes penchés au chapitre II.
Après les travaux de Henson [8] , une seule éventualité restait sans réponse aussi bien pour $|USC(x)|$ que pour $|SC(x)|$: l'incomparabilité des cardinaux concernés, autrement dit existe-t-il dans NF des ensembles a, b tels que

$$|a| \lesseqgtr |USC(a)| \lesseqgtr |a| ,$$

$$|b| \lesseqgtr |SC(b)| \lesseqgtr |b| ?$$

Nous démontrons qu'il est consistant relativement à NF de répondre affirmativement à cette question (corollaire II.2.3.); en fait la réponse reste affirmative si on remplace partout dans la question, l'ordre $\leqslant$ par la relation $\leqslant_*$, extension de $\leqslant$ définie par $|x| \leqslant_* |y| \longleftrightarrow$ x vide $\vee (\exists f)$(f surjection de y sur x). Ensuite, nous affinons la discussion des différentes éventualités en distinguant les trois cas : x fini, x infini bien ordonnable, x non bien ordonnable (voir tableau II.4.2. page 34).
Nous établissons également quelques résultats à propos des propriétés typées [4] satisfaites par l'univers et, plus généralement, à propos des formules stratifiées satisfaites par tous les ensembles équipotents à leurs ensembles de parties ; nous voyons ainsi que l'existence d'ensembles a, b vérifiant toutes ces formules et tels que $|a| < |SC(a)|$, $|b| > |SC(b)|$, est consistante relativement à NF (théorème II.3.2.).
Tous ces résultats sont établis en utilisant la méthode de Henson [8] , permettant de modifier les modèles de NF au moyen d'automorphismes, choisis quant à eux grâce au théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski.

Une autre particularité de NF est la définition, et par suite certaines propriétés, de l'opération 2^x, définie pour les cardinaux x ... ou plutôt, comme nous allons le voir, définie seulement pour certains cardinaux x. En effet, afin que x et y aient les mêmes types dans la formule stratifiée $y = 2^x$, on est amené à définir 2^m comme étant le cardinal de l'ensemble des parties de a si $m = |USC(a)|$; 2^m n'est donc défini que pour $m \leqslant |USC(V)|$. Il s'ensuit qu'il n'est pas toujours possible d'itérer l'opération 2^x un nombre quelconque de fois ; par exemple ce nombre est limité à 1 pour $|USC(V)|$, à 2 pour $|USC(USC(V))|$... C'est précisément à l'étude de ce nombre d'itérations possibles que nous nous sommes attachés au chapitre III. Le résultat principal que nous y avons obtenu (théorème III.2.1.), est sans doute l'existence d'un cardinal m tel que $m \nleqslant |USC(V)|$ et tel qu'on puisse en partant de T(m) itérer n fois l'opération 2^x, et cela quel que soit l'entier n fortement cantorien (et donc quel que soit l'entier n concret). Ensuite nous discutons de ce nombre d'itérations en fonction des positions relatives de m et T(m) (tableau III.3.4. page 46), à cet effet nous établissons deux résultats de consistance relative (théorème III.3.1. et théorème III.3.3.).

L'axiome de fondement est faux dans NF car $V \in V$. De plus Scott a démontré que l'existence d'ensembles égaux à leurs singletons - ces ensembles sont appelés individus - est à la fois consistante et indépendante relativement à NF ([20]); pour ce faire Scott utilise une méthode liée aux permutations de l'univers et permettant d'obtenir des résultats de consistance relative. Au chapitre IV, nous montrons d'abord que cette méthode n'est pas appropriée pour la plupart des sentences intéressantes concernant les cardinaux (corollaire IV.2.4.). Grâce à cette methode, nous généralisons ensuite les résultats de Scott déjà mentionnés ; en effet, nous démontrons qu'étant donné une formule stratifiée $\varphi(x)$ vérifiée au moins par un cardinal fortement cantorien, nous pouvons supposer, de façon consistante relativement à NF, que l'ensemble des individus existe et que le cardinal de cet ensemble vérifie $\varphi(x)$ (théorème IV.3.2.). Enfin, en utilisant une autre méthode liée également aux permutations de l'univers, due à Boffa [3], nous démontrons qu'il n'existe dans NF ni ordre total sur l'univers, ni fonction de choix sur les paires qui soient définissables par une formule stratifiée, c'est-à-dire qui soient l'unique ensemble vérifiant une formule stratifiée avec une seule variable (corollaire IV.4.5.).

Je tiens à remercier le Professeur M. Boffa sous la direction duquel le présent travail a été effectué. Je remercie également les participants au Séminaire NF pour nos discussions fructueuses.

QUELQUES DEFINITIONS ET PROPRIETES.

1. L'ouvrage [19] de Rosser expose dans NF les notions ensemblistes usuelles et celles plus particulières à NF, nous nous y référerons désormais tacitement sans toutefois en utiliser toutes les notations. Aux définitions et propriétés rappelées dans l'introduction, ajoutons les suivantes.

a) Naturels et ensembles finis. (NF)

On définit :

$\Lambda = \{x \mid x \neq x\}$ (Λ est l'ensemble vide),

$0 = \{\Lambda\}$,

$S(x) = \{ y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y \}$,

$Nn = \bigcap \{ x \mid 0 \in x \wedge (\forall y \in x)(S(y) \in x) \}$

(Nn est l'ensemble des naturels),

x fini $\longleftrightarrow (\exists y \in Nn)(x \in y)$,

x infini $\longleftrightarrow \neg(x$ fini$)$.

Dès lors Nn est une partie cantorienne de NC et est bien ordonné par $\leqslant$.

L'axiome de Rosser (noté R) s'énonce

$(\forall x \in Nn)(|\{y \mid y < x\}| = x)$,

et est équivalent à chacune des deux sentences

$(\forall x$ fini$)($ Can(x) $)$,

stCan(Nn) .

b) Couple de Quine. (NF)

Notons

$$a^+ = \{S(x) \mid x \in a \cap Nn\} \cup \{x \mid x \in a \wedge x \notin Nn\},$$

le couple de Quine est dès lors défini par

$$\langle a,b \rangle = \{x^+ \mid x \in a\} \cup \{y^+ \cup \{o\} \mid y \in b\}.$$

Ce couple vérifie la propriété caractéristique d'un bon couple, à savoir :

$$\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \longleftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

De plus la formule $z = \langle x, y \rangle$ est stratifiée lorsque les types de x, y, z sont égaux et suffisamment grands.

c) A propos des cardinaux et ordinaux. (NF)

L'addition et la multiplication des cardinaux sont respectivement définis par

$$m + n = |a \cup b| \quad \text{si } m = |a|,\ n = |b| \text{ et } a \cap b = \Lambda,$$

$$m.\, n = |a \times b| \quad \text{si } m = |a| \text{ et } n = |b|.$$

$T^k(m)$ et $U^k(\alpha)$ sont définis pour $m \in NC$,

$\alpha \in NO$, $k \in \omega$ par

$$T^o(m) = m,\ T^{k+1}(m) = T(T^k(m)),$$

$$U^o(\alpha) = \alpha,\ U^{k+1}(\alpha) = U(U^k(\alpha)).$$

Si $a \subset NC$, on note

$$T''a = \{T(x) \mid x \in a\}.$$

Si m, n $\in$ NC et α, β $\in$ NO, on a

$$m < n \leftrightarrow T(m) < T(n),$$

$$\alpha <_o \beta \leftrightarrow U(\alpha) <_o U(\beta),$$

$$T(m+n) = T(m) + T(n),$$

$$T(m.n) = T(m) . T(n),$$

et, si $m \leqslant |USC(V)|$,

$$2^{T(m)} = T(2^m).$$

Remarquons

$$(b \subset a \wedge stCan(a)) \longrightarrow stCan(b),$$

mais on ne peut démontrer dans NF que toute partie d'un ensemble cantorien est cantorienne.

d) <u>Quelques définitions habituelles.</u>

$$a \approx b \leftrightarrow (\exists f)(f \text{ bijection de } a \text{ sur } b),$$

$$a - b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\};$$

si r est une relation,

$$dom(r) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in r)\},$$

$$Image(r) = \{x \mid (\exists y)(\langle y, x\rangle \in r)\},$$

$$r''x = \{y \mid (\exists z \in x)(\langle z, y\rangle \in r)\},$$

et r^n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ de telle sorte que

$$r^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in V\},$$

$$r^{n+1} = r \cdot r^n .$$

2. Pour ce qui est de la théorie des modèles, nous nous référerons à l'ouvrage [5] de Chang et Keisler. Signalons seulement : si $\mathfrak{M}$ est une structure pour un langage $\mathcal{L}$, T une théorie de langage $\mathcal{L}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule de ce langage et si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de l'univers de $\mathfrak{M}$, alors $\mathfrak{M} \models T$, $T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ signifient respectivement que $\mathfrak{M}$ est un modèle de T, que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est un théorème de T et que $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ par le n-uple $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.

3. <u>Conventions d'écriture.</u> Le signe $>$ indique la fin des démonstrations. Les références à l'intérieur d'un même chapitre se font grâce au numéro du résultat évoqué, et entre chapitres différents grâce à ce numéro précédé du numéro du chapitre.

CHAPITRE I

QUELQUES RESULTATS CLASSIQUES REVUS DANS NF ET QUELQUES-UNES DE LEURS CONSEQUENCES.

1. Ordinaux initiaux et alephs.

Lorsque α est un ordinal, nous notons $c(\alpha)$ le cardinal du domaine d'un bon ordre quelconque élément de α et α est appelé ordinal initial lorsque $c(\beta) < c(\alpha)$ pour tout ordinal $\beta <_o \alpha$. Inord^1 est l'ensemble des ordinaux initiaux α tels que $c(\alpha)$ ne soit pas un naturel. Evidemment, si α est un ordinal, $T(c(\alpha)) = c(U(\alpha))$ et par conséquent α et $U(\alpha)$ sont simultanément des ordinaux initiaux.

Comparons les bons ordres $\leqslant_o$ et $\leqslant_o$ restreint à Inord^1. NO ne peut être équipotent à un segment initial propre de Inord^1; en effet d'une part $|NO| \nleqslant |USC^2(V)|$ et d'autre part, si $\alpha \in \mathrm{Inord}^1$, $\mathrm{No}(\leqslant_o | \alpha) = U^2(\alpha)$ et par conséquent $|\{x \mid x \in \mathrm{Inord}^1 \wedge x <_o \alpha\}| \leqslant |USC^2(V)|$. Il existe donc une et une seule bijection croissante, soit W, de Inord^1 sur un segment initial propre de NO ou sur NO tout entier. Dès lors nous définissons ω_α et $\aleph_\alpha$ pour tout ordinal α par :

$$\text{si } \alpha \in \mathrm{Image}\,(W), \qquad \omega_\alpha = W^{-1}(\alpha) \text{ et } \aleph_\alpha = c\,(\omega_\alpha),$$

$$\text{si } \alpha \in NO\text{-}\mathrm{Image}\,(W), \qquad \omega_\alpha = \Lambda \text{ et } \aleph_\alpha = \Lambda .$$

De plus, nous notons WCI l'ensemble des $\aleph_\alpha$ non vides, c'est-à-dire l'ensemble des cardinaux d'ensembles bien ordonnables infinis, et WC désigne $Nn \cup WCI$, c'est-à-dire l'ensemble des cardinaux d'ensembles bien ordonnables.

Orey [13] et Henson [9] ont considéré précédemment les ordinaux initiaux dans NF, ainsi, dans [9] , Henson démontre

$$NF \vdash \omega_\alpha \neq \Lambda \longrightarrow (\omega_{U(\alpha)} \neq \Lambda \ \wedge \omega_{U(\alpha)} = U(\omega_\alpha)) \ ;$$

il s'ensuit la

Proposition 1.1. (NF)

$$\aleph_\alpha \neq \Lambda \longrightarrow (\aleph_{U(\alpha)} \neq \Lambda \wedge \aleph_{U(\alpha)} = T(\aleph_\alpha)).$$

La règle classique d'addition et de multiplication des alephs est conservée :

Proposition 1.2. (NF)

Soient $\aleph, \aleph' \in$ WCI, alors

$$\aleph + \aleph' = \aleph \cdot \aleph' = \text{maximum}\,(\aleph, \aleph').$$

Démonstration.

Il suffit de refaire dans NF la démonstration valable dans ZF (voir [11] page 11) en remplaçant partout ω_α par l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à ω_α. >

2. Définition et propriétés de $\leqslant_*$.

Tarski définit la relation $\leqslant_*$ sur les cardinaux par :

$$|a| \leqslant_* |b| \longleftrightarrow a = \Lambda \vee (\exists f)\ (f \text{ surjection de } b \text{ sur } a).$$

Comme dans ZF (voir [21]), on démontre la

Proposition 2.1. (NF)

Soient m, n, p des cardinaux, alors :

(i) $m \leqslant n \longrightarrow m \leqslant_* n$;

(ii) si en plus $n \in$ WC, $m \leqslant n \longleftrightarrow m \leqslant_* n$;

(iii) $(m \leqslant_* n \wedge n \leqslant_* p) \longrightarrow m \leqslant_* p$.

Proposition 2.2. (NF)

$$(\forall x, y)\ (|x| \leqslant_* |y| \longrightarrow |SC(x)| \leqslant |SC(y)|)\ .$$

Démonstration.

Si f est une surjection de b sur a, la fonction qui à chaque partie x de a associe $\{y \mid f(y) \in x \wedge y \in b\}$ est une injection de SC(a) vers SC(b).⟩

Le théorème de Cantor se traduit également par le

Théorème 2.3. (NF)

$(\forall x)\ (\ |SC(x)| \not\leqslant_{*} |USC(x)|\ ).$

Adaptons la démonstration classique :
supposons que f soit une surjection de USC(a) sur SC(a) et soit b un élément de a tel que

$$f(\{b\}) = \{x \mid x \in a \wedge x \notin f(\{x\})\} ;$$

alors de $b \in f(\{b\})$ on déduit $b \notin f(\{b\})$ et inversément .⟩

Nous savons

$$NF \vdash (\forall m,n \in NC)\ (m \leqslant n \longleftrightarrow T(m) \leqslant T(n)),$$

$\leqslant_{*}$ jouit de la propriété analogue :

Proposition 2.4. (NF)

$(\forall m,\ n \in NC)\ (m \leqslant_{*} n \longleftrightarrow T(m) \leqslant_{*} T(n)).$

Démonstration.

En effet si f est une surjection de b sur a, RUSC(f) est une surjection de USC(b) sur USC(a) ; inversément toute surjection de USC(b) sur USC(a) est du type RUSC(g), g étant une surjection de b sur a.⟩

Le résultat suivant peu connu dans ZF, où il est dû à Tarski, jouera dans la suite un rôle primordial.

Théorème 2.5. (NF)

Soient m, n, p, q des cardinaux, alors

$$m.n \leqslant_* p + q \longrightarrow (m \leqslant_* p \vee n \leqslant_* q) .$$

La démonstration de Tarski est encore valable dans NF, la voici :

Démonstration.

Supposons $|a|.|b| \leqslant_* |c| + |d|$, c et d étant disjoints; le cas $(a = \Lambda \vee b = \Lambda)$ est trivial, aussi soient $a \times b \neq \Lambda$ et f une surjection de $c \cup d$ sur $a \times b$.
Supposons $|a| \not\leqslant_* |c|$ et définissons sur d la fonction h comme suit : si $u \in d$, h(u) est l'unique élément y de b tel que $f(u) \in a \times \{y\}$. Si $y \in b$, il existe $u \in d$ tel que $f(u) \in a \times \{y\}$ car, sinon,

$$(f^{-1}\text{"}\ a \times \{y\}) \subset c$$

d'où

$$|a| \leqslant_* |f^{-1}\text{"}\ a \times \{y\}| \leqslant |c| ,$$

ce qui contredirait notre hypothèse. Par conséquent, h est une surjection de d sur b et donc $|b| \leqslant_* |d|$.>

Analogue pour $\leqslant$ du théorème précédent, le résultat suivant, dû dans ZF toujours à Tarski, est aussi vérifié dans NF :

Théorème 2.6. (NF)

Soient m, n, p, q des cardinaux. Alors

$$m.n \leqslant p + q \longrightarrow (m \leqslant p \vee n \leqslant_* q) ;$$

si en plus un des quatre cardinaux m, n, p, q est un cardinal d'un ensemble bien ordonnable, $\leqslant_*$ est remplacé par $\leqslant$ et nous avons alors

$$m.n \leqslant p + q \longrightarrow (m \leqslant p \vee n \leqslant q) .$$

La démonstration est la même que dans ZF (voir [25]).

Démonstration.

Soient $|a|.|b| \leqslant |c| + |d|$, $c \cap d = \Lambda$ et f une injection de $a \times b$ vers $c \cup d$. Nous pouvons supposer que, si un des ensembles a, b, c, d est bien ordonné, il s'agit de a ou de d.

S'il existe $x \in b$ tel que $(f'' a \times \{x\}) \subset c$, on a $|a| \leqslant |c|$.

Sinon soit h la fonction définie sur $d \cap \mathrm{Image}(f)$ et qui, à $y \in d \cap \mathrm{Image}(f)$, associe l'élément x de b tel que $y \in f'' a \times \{x\}$; h est alors une surjection de $d \cap \mathrm{Image}(f)$ sur b, d'où

$$|b| \leqslant_* |d \cap \mathrm{Image}(f)| \leqslant |d| .$$

Si a ou d est bien ordonné, l'ensemble $(f'' a \times \{x\}) \cap d$ est non vide et bien ordonné pour tout $x \in b$; dès lors la fonction qui à $x \in b$ associe le minimum de $(f'' a \times \{x\}) \cap d$ est une injection de b vers d, d'où $|b| \leqslant |d|$.>

3. Quelques résultats de Tarski revus dans NF.

Dans [23], Tarski a établi que l'axiome du choix était équivalent dans ZF à chacune des trois sentences suivantes :

$$(\forall_{\text{infini}} x)\ (x \approx x \times x)\ ,$$

$$(\forall x, y)\ (x \times x \approx y \times y \rightarrow x \approx y)\ ,$$

$$(\forall_{\text{infinis}} x, y)\ (x \cap y = \Lambda \rightarrow x \cup y \approx x \times y)\ .$$

Nous allons adapter la démonstration de la première de ces équivalences dans NF.

Proposition 3.1.(NF)

Il existe un cardinal m tel que $m \neq m^2$ et $m^k = m^2$ pour tout $k \in \omega$ et $k \geqslant 2$.

Démonstration.

Soient $p = |USC(V)|$, $q \in WCI$ tel que $q \nleqslant |USC(V)|$ - nous pouvons par exemple prendre pour q le cardinal x défini par $|NO| = T(x)$ - et $m = p + q$.

Supposons $m = m^2$. Alors :

$$p^2 + 2\, p.q + q^2 = p + q,$$

$$p.\, q \leqslant p + q,$$

et donc, en raison de 2.6.,

$$|USC(V)| \leqslant q \ \vee q \leqslant |USC(V)|\ ,$$

$$|USC(V)| \leqslant q,$$

ce qui est impossible puisque V ne peut être bien ordonné [22] . Par conséquent $m^2 \neq m$.

Si $j \in \omega$ et $j \geqslant 1$, $p^j = p$ et $q^j = jq = q$ vu 1.2..

Il s'ensuit, si $k \geqslant 2$,

$$m^k = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \, p^i . \, q^{k-i},$$

$$= p + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i \, p.q + q,$$

$$= p + 2 \, p.q + q,$$

$$= m^2. \rangle$$

Remarquons que, si m est le cardinal dont il est question dans 3.1., nous avons

$$m \neq m^2 \text{ et } m^2 = (m^2)^2 \;;$$

dès lors :

<u>Corollaire 3.2.</u> (NF)

$$\neg (\forall m \in NC) \, (m = m^2),$$
$$\notin Nn$$

$$\neg (\forall m, n \in NC) \, (m^2 = n^2 \longrightarrow m = n).$$
$$\notin Nn$$

Dans la démonstration de 3.1., nous déduisons une contradiction de $p + q \geqslant p . \, q$; par conséquent :

<u>Proposition 3.3.</u> (NF)

$$\neg (\forall m, n \in NC) \, (m + n = m.n).$$
$$\notin Nn$$

Ainsi les trois sentences dont il a été question au début de ce paragraphe, sont fausses dans NF.

4. <u>L'ensemble des cardinaux structuré en algèbre faible de cardinaux.</u>

Tarski introduit dans [24] les algèbres de cardinaux : une algèbre de cardinaux $\langle A, +, \sum \rangle$ est un ensemble A muni d'une opération binaire + sur A et d'une opération infinitaire sur A, qui à chaque famille $(a_i)_{i \in Nn}$ d'éléments de A associe un élément de A noté $\sum_{i<\infty} a_i$, les axiomes suivants devant être vérifiés :

(1) si $(a_i)_{i \in Nn}$ est une famille d'éléments de A,

$\sum_{i<\infty} a_i = a_0 + \sum_{i<\infty} a_{i+1}$;

(2) si $(a_i)_{i \in Nn}$ et $(b_i)_{i \in Nn}$ sont deux familles

d'éléments de A, $\sum_{i<\infty} a_i + \sum_{i<\infty} b_i = \sum_{i<\infty} (a_i + b_i)$;

(3) il existe un élément z de A tel que $z + a = a + z = a$ pour tout $a \in A$;

(4) si $a, b \in A$, si $(c_i)_{i \in Nn}$ est une famille d'éléments de A et si $a + b = \sum_{i<\infty} c_i$, il existe alors deux familles d'éléments de A, $(a_i)_{i \in Nn}$ et $(b_i)_{i \in Nn}$, telles que $a = \sum_{i<\infty} a_i$, $b = \sum_{i<\infty} b_i$ et $c_i = a_i + b_i$ $(i \in Nn)$;

(5) si $(a_i)_{i \in Nn}$, $(b_i)_{i \in Nn}$ sont deux familles d'éléments de A telles que $a_i = b_i + a_{i+1}$ $(i \in Nn)$, il existe $c \in A$ tel que $a_p = c + \sum_{i<\infty} b_{p+i}$ pour tout $p \in Nn$.

Malheureusement dans NF - comme aussi dans ZF sans axiome du choix - on ne peut structurer naturellement l'ensemble des cardinaux en algèbre de cardinaux ; en effet, la définition même de la somme d'une famille dénombrable de cardinaux nécessite que l'on choisisse dans chaque cardinal un ensemble, et par conséquent nécessite l'axiome

du choix dénombrable.
Définissons

$$f \text{ fonction de choix sur } a \longleftrightarrow (f \text{ fonction} \wedge \mathrm{dom}(f) = a \wedge \mathrm{Image}(f) \subset USC(V) \wedge (\forall x \in a)\ (f(x) \subset x)\ )$$

et notons $AC_{\aleph_0}$ la forme suivante de l'axiome du choix dénombrable

$$(\forall x)\ (\ (|x| = \aleph_0 \wedge (\forall y \in x)(y \neq \Lambda)\ ) \longrightarrow (\exists f \text{ fonction de choix sur } x)\ )\ .$$

Dans NF + $AC_{\aleph_0}$, nous pouvons définir la somme d'une famille dénombrable de cardinaux $(m_i)_{i \in Nn}$, notée $\sum_{i \in Nn} m_i$, comme étant le cardinal de $\biguplus_{i \in Nn} Y_i$, les Y_i étant obtenus à partir d'une fonction de choix F sur $\{m_i \mid i \in Nn\}$ par $F(i) = \{X_i\}$, $T^2(i') = i$ et $Y_i = \{i'\} \times X_i$ $(i \in Nn)$; on vérifie sans peine que le cardinal ainsi obtenu ne dépend pas de la fonction de choix choisie, et qu'il est égal au cardinal de $\biguplus_{i \in Nn} A_i$ si $\{\langle i, \{A_i\}\rangle \mid i \in Nn\}$ est une fonction de choix sur $\{m_i \mid i \in Nn\}$ et si $A_i \cap A_j = \Lambda$ pour $i \neq j$.

<u>Proposition 4.1.</u> (NF + $AC_{\aleph_0}$)

L' ensemble des cardinaux muni de l'addition des cardinaux et de la somme dénombrable de cardinaux, est une algèbre de cardinaux.

<u>Démonstration.</u>

Seule la vérification de (5) requiert quelques explications. Soient $(a_i)_{i \in Nn}$ et $(b_i)_{i \in Nn}$ deux familles de cardinaux vérifiant $a_i = b_i + a_{i+1}$ $(i \in Nn)$. Il existe alors $(A_i)_{i \in Nn}$, $(B_i)_{i \in Nn}$ et $(f_i)_{i \in Nn}$ tels que :
$|A_i| = a_i$, $|B_i| = b_i$, f_i soit une bijection de A_i sur $B_i \cup A_{i+1}$, $A_i \cap A_j = \Lambda$, $B_i \cap B_j = \Lambda$, $A_i \cap B_j = \Lambda$ $(i, j \in Nn$ et $i \neq j)$.

Définissons par induction sur $k \in Nn$ la fonction g_k de domaine A_o par

$$g_o = f_o$$

$$g_{k+1}(x) = f_{k+1}(g_k(x)) \text{ si } g_k(x) \in A_{k+1},$$

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) \qquad \text{ si } g_k(x) \notin A_{k+1}.$$

On vérifie dès lors :

$$g_k \text{ bijection de } A_o \text{ sur } (\bigsqcup_{o \leqslant i \leqslant k} B_i) \cup A_{k+1} \quad (k \in Nn),$$

et
$$g_k^{-1''} B_i = g_{k'}^{-1''} B_i \quad (i, k, k' \in Nn \text{ et } i \leqslant k, k').$$

Notons $X_k = g_k^{-1''} B_k$ et $c = | A_o - \bigsqcup_{i \in Nn} X_i |$;

il s'ensuit $|X_k| = b_k$, $a_o = c + \sum_{i \in Nn} b_i$ et aussi,

si $p \in Nn$ et $o \leqslant i \leqslant p$, $g_p'' X_i = B_i$ d'où

$$A_{p+1} = (g_p'' (A_o - \bigsqcup_{i \in Nn} X_i)) \cup (\bigsqcup_{i \geqslant p+1} g_p'' X_i),$$

c'est-à-dire $a_{p+1} = c + \sum_{i \in Nn} b_{p+1+i}$. >

Truss a affaibli dans [26] le concept d'algèbre de cardinaux en introduisant les <u>algèbres faibles de cardinaux.</u> La théorie des algèbres faibles de cardinaux est la théorie dont le langage est formé d'un symbole fonctionnel $x + y$, d'un symbole relationnel $x \leqslant y$ et d'une constante c, et dont les axiomes sont :

(I) $x + y$ est commutatif et associatif,

(II) $x \leqslant y$ vérifie les axiomes d'une relation d'ordre,

(III) $(\forall x, y)\ (x \leqslant y \leftrightarrow (\exists z)\ (x + z = y))$,

(IV) $(\forall x)\ (x = x + c)$,

(V) si $x + y = u + v$, il existe m, n, p, q tels que

$x = m + n,\ y = p + q,\ u = m + p,\ v = n + q$,

(VI) si $x + y = x + z$, il existe m, n, p tels que

$x = x + m = x + n,\ y = m + p,\ z = n + p$.

Les algèbres faibles de cardinaux sont bien entendu les modèles de la théorie dont nous venons de donner les axiomes.

Proposition 4.2. (NF)

$\langle NC, +, \leqslant, 0 \rangle$ est une algèbre faible de cardinaux.

Démonstration.

Les sentences (I), (II), (III), (IV) sont évidemment vérifiées dans $\langle NC, +, \leqslant, 0 \rangle$. Il en est de même de (V), car lorsque a, b, c, d sont deux à deux disjoints et f une bijection de $a \cup b$ sur $c \cup d$, on a

$$|a| = m + n,\ |b| = p + q,\ |c| = m + p,\ |d| = n + q,$$

à condition de noter

$$m = |c \cap f"a|,\ n = |d \cap f"a|,\ p = |c \cap f"b| \text{ et } q = |d \cap f"b|.$$

Enfin du lemme suivant, qui est dû dans ZF à Tarski, on déduit directement que (VI) est vérifié. $\rangle$

Lemme 4.3. (NF)

Si m, p, q sont des cardinaux tels que $m+p=m+q$, il existe p', q' et n vérifiant

$$m = m + p' = m + q',\ p = p' + n \text{ et } q = q' + n.$$

Démonstration.

La démonstration est identique à celle de Tarski dans ZF. Soient $m = |M|$, $p = |P|$, $q = |Q|$ tels que $M \cap P = \Lambda$, $M \cap Q = \Lambda$, $P \cap Q = \Lambda$ et f une bijection de $M \cup P$ sur $M \cup Q$. Notons :

$$A = \left\{ x \mid x \in P \wedge (\forall n \in Nn)(f^n(x) \in M) \right\},$$

$$B = \left\{ y \mid y \in Q \wedge (\forall n \in Nn)((f^{-1})^n(y) \in M) \right\},$$

i la fonction définie sur $USC(P - A)$ par

$$i(\{x\}) = \text{minimum}\left\{ j \mid j \in Nn \wedge f^j(x) \notin M \right\},$$

et g_n la fonction f^n restreinte à $\left\{ x \mid x \in (P - A) \wedge i(\{x\}) = n \right\}$.

Alors :

(i) $\bigsqcup_{n>0} g_n$ est une bijection de $P - A$ sur $Q - B$, et donc

$$|P - A| = |Q - B|,$$

(ii) en définissant sur $M \cup A$ la fonction h par

$$h(x) = x \text{ si } x \in (M \cup A) - \bigsqcup_{n \geqslant 0} (f^n)''A,$$

$$h(x) = f(x) \text{ si } x \in \bigsqcup_{n \geqslant 0} (f^n)''A,$$

on obtient une bijection entre $M \cup A$ et M, d'où $|M \cup A| = |M|$.

De même $|M \cup B| = |M|$.

Il suffit donc de prendre $n = |P-A|$, $p' = |A|$ et $q' = |B|$. $\rangle$

Tous les théorèmes concernant les algèbres faibles de cardinaux et établis par Truss dans [26] , ne sont pas nécessairement vérifiés dans NF quand on les interprète dans $\langle NC, +, \leqslant, o \rangle$; en effet Truss étudie les algèbres faibles de cardinaux dans ZF. Cependant toute conséquence logique de la théorie des algèbres faibles de cardinaux est, en raison de 4.2., un théorème de NF si elle est interprétée dans $\langle NC, +, \leqslant, o \rangle$. Ainsi en consultant [26], on obtient les résultats suivant concernant les bornes inférieures et supérieures de cardinaux.

<u>Corollaire 4.4.</u> (NF)

Si m, n, p. q sont des cardinaux,

(i) $m, n \leqslant p, q \rightarrow (\exists x)\ (m, n \leqslant x \leqslant p, q)$
(Théorème d'interpolation de Tarski),

(ii) $s = \sup (m,n) \leftrightarrow ((\forall x)\ (m,n < x \leqslant s \rightarrow x=s) \wedge m, n \leqslant s)$,

(iii) $i = \inf (m, n) \leftrightarrow ((\forall x)(i \leqslant x < m, n \rightarrow x=i) \wedge i \leqslant m, n)$,

(iv) $\inf (m, n)$ existe $\rightarrow \sup (m, n)$ existe,

(v) $2m + n = m + n \rightarrow m + n = \sup (m, n)$.

5. <u>A propos de la partition de l'univers par deux ensembles de cardinal strictement inférieur au cardinal de l'univers.</u>

Un problème toujours ouvert dans NF est de savoir s'il existe une partition de l'univers par deux ensembles de cardinal différent du cardinal de l'univers. Nous allons voir que, s'il existe de tels ensembles, ils doivent jouir de propriétés remarquables.

Proposition 5.1. (NF)

Supposons que m et n soient deux cardinaux différents de $|V|$ tels que $m + n = |V|$. Alors :

(i) $|V| \leqslant_* m, n$;

(ii) $m, n \notin WC$ et $p < m, n$ pour tout $p \in WC$;

(iii) $m, n \nleqslant |USC(V)|$;

(iv) $\sup(m, n)$ existe et vaut $|V|$;

(v) $m \nleqslant n \nleqslant m$ et $m \leqslant_* n \leqslant_* m$.

Démonstration.

Soient $m, n \neq |V|$ et $m + n = V$.

De 2.6., on déduit (i).

De 2.2., il découle alors $2^{T(m)} = 2^{T(n)} = |V|$; $m = T(x)$ entraînerait donc $|V| = T(2^{T(x)})$, ce qui est impossible, d'où (iii).

Comme dans ZF, on a dans NF

$(\forall x, y \in NC)(2x = 2y \longrightarrow x = y)$;

en effet la démonstration dans ZF de cette propriété, due à Sierpinski (voir [12], page 158), est encore intégralement valable dans NF. Par conséquent $m, n \leqslant p$ entraîne $2p = |V|$ et donc $p = |V|$; autrement dit $\sup(m, n)$ existe et vaut $|V|$, d'où (iv).

De (iv) on déduit $m \nleqslant n \nleqslant m$ et, vu 2.1. et (i), on a $m \leqslant_* n \leqslant_* m$, d'où (v).

Si $p \in WC$, de 2.6. on tire

$p \leqslant m \vee |V| \leqslant n$

et par conséquent $p \leqslant m$; de même on obtient $p \leqslant n$. Dès lors de l'incomparabilité de n et m, il découle $p < n, m$, d'où (ii) .>

Corollaire 5.2. (NF)

Supposons $V = a \cup b$ et $|a|, |b| \neq |V|$. Alors :

(i) $|a|, |b| \nleqslant |USC(V)|$;

(ii) a et b ne peuvent être bien ordonnés et, pour tout ensemble c bien ordonnable, $|c| < |a|, |b|$;

(iii) $|a| \nleqslant |b| \nleqslant |a|$;

(iv) $|SC(a)| = |SC(b)| = |V|$.

6. Et s'il existait seulement un nombre fini de cardinaux infinis...

Existe-t-il dans NF une infinité de cardinaux infinis ? Il s'agit là d'une question toujours sans réponse. Désignons par NCI l'ensemble des cardinaux infinis, c'est-à-dire NC - Nn. De nombreuses sentences entraînent dans NF l'existence d'une infinité de cardinaux infinis, il en est ainsi de l'axiome de Rosser et même de la sentence

$$(\forall n \in Nn)\ (n \leqslant T\ (n)).$$

Malheureusement on ne connaît pour l'instant aucune sentence consistante avec NF et entraînant dans NF que NCI soit infini. Cela explique notre préoccupation durant ce paragraphe : nous allons dégager quelques propriétés dont les cardinaux jouiraient si NCI était fini.

Proposition 6.1. (NF + NCI fini)

$$(\forall m \in NCI)\ (2\ m = m).$$

Démonstration.

Au cours de la démonstration de 5.1., nous avons signalé que, si $x, y \in NC$, $2x = 2y$ entraînait $x = y$. La fonction qui à $x \in NCI$ associe $2x$ est donc une injection de NCI vers NCI ; NCI étant fini, cette injection doit être une surjection sur NCI. Autrement dit tout cardinal infini est de la forme $2x$ avec $x \in NCI$.
Supposons la proposition fausse et soit m un élément minimal de $\{x \mid x \in NCI \wedge x \neq 2x\}$, cet élément minimal existant en raison du caractère fini de NCI. Il existe $p \in NCI$ tel que $m = 2p$; puisque $2m \neq m$, on a $2p \neq p$ et donc $p < m$, ce qui est impossible.〉

Proposition 6.2. (NF + NCI fini)

La restriction de $\leqslant$ à l'ensemble des cardinaux supérieurs ou égaux à $\aleph_0$ définit sur cet ensemble un lattis distributif, complet et atomique, mais non complémenté.
De plus, si m et $n \in NCI$, $\sup(m, n)$ existe et vaut $m + n$.

Démonstration.

(i) En raison de 6.1., $m, n \leqslant p \leftrightarrow m + n \leqslant p$

et donc $m + n = \sup(m, n)$ pour tout $m, n \in NC$.

(ii) Soient $m, n \geqslant \aleph_0$. NCI étant fini, l'ensemble

$\{x \mid \aleph_0 \leqslant x \leqslant m, n\}$ admet un élément maximal,

soit p. Dès lors, vu 6.1.,

$$q \leqslant m, n \rightarrow q + p \leqslant m, n ;$$

aussi, en plus de $p \leqslant m, n$, on a

$$q \leqslant m, n \rightarrow q + p = p,$$

$$q \leqslant m, n \rightarrow q \leqslant p,$$

d'où $p = \inf(m, n)$.

(iii) NCI étant fini, le lattis est complet et atomique.

(iv) Pour démontrer la distributivité du lattis, il suffit d'établir (voir [1] ou [27])

$$(m,\ n,\ p \geqslant \aleph_0 \wedge \sup(m,\ p) = \sup(n,\ p) \wedge \inf(m,\ p) = \inf(n,\ p)) \longrightarrow m = n\ .$$

Soient $m, n, p \geqslant \aleph_0$, $\sup(m, p) = \sup(n, p)$ et $\inf(m, p) = \inf(n, p)$.

Procédons comme Tarski dans [24]. Il existe $q \in NC$ tel que $n = \inf(m, p) + q$. Alors :

$n \leqslant p + q$,

$\sup(n, p) \leqslant p + q$,

$m \leqslant p + q$;

on peut dès lors trouver $p_1 \leqslant p$ et $q_1 \leqslant q$ tels que $m = p_1 + q_1$; d'où $p_1 \leqslant \inf(m, p)$ et par conséquent

$m \leqslant \inf(m, p) + q$,

$m \leqslant n$.

De même $n \leqslant m$, d'où $m = n$.

(v) En raison de 5.1., $\sup(\aleph_1, m) = |V|$ entraîne $m = |V|$; $\aleph_1$ n'admet donc pas de complément. >

CHAPITRE II

QUELQUES RESULTATS DE CONSISTANCE RELATIVE A PROPOS DES CARDINAUX.

1. La méthode de Henson.

Les résultats de consistance relative que nous établissons dans ce chapitre, sont obtenus par une méthode due à Henson [8] ; cette méthode permit à ce dernier d'établir que l'existence d'ensembles finis a, b tels que

$$|a| < |USC(a)| \wedge |SC(b)| < |b| ,$$

était consistante relativement à toute extension stratifiée de NF.

Nous pouvons distinguer deux phases dans cette méthode:

D'une part, la méthode proprement dite qui, étant donné un modèle $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$ de NF et un automorphisme σ de $\mathfrak{M}$, modifie l'appartenance de $\mathfrak{M}$ - c'est-à-dire R - et la remplace par la relation R^{σ} définie par

$$x \, R^{\sigma} \, y \Longleftrightarrow x, y \in M \text{ et } x \, R \, \sigma(y) \; ;$$

la structure $\langle M, R^{\sigma} \rangle$ est notée $\mathfrak{M}^{\sigma}$. Dans ces conditions la propriété fondamentale est le

Théorème 1.1. (Henson [8])

Soient $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule stratifiée, $s_1,\ldots,s_n$ les types respectifs de $x_1,\ldots,x_n$ dans une stratification de $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ et k un entier relatif. Si $a_1,\ldots,a_n \in M$, alors

$$\mathfrak{M}^{\sigma} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n] \text{ ssi } \mathfrak{M} \models \varphi[\sigma^{s_1+k}(a_1),\ldots,\sigma^{s_n+k}(a_n)] .$$

Ce théorème se démontre par induction sur la longueur de $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Tous les axiomes de NF étant des sentences stratifiées, $\mathfrak{M}^{\sigma}$ est donc aussi un modèle de NF.

D'autre part, le choix d'un automorphisme adéquat au problème de consistance traité.
Ce choix s'opère grâce au théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski [6] ; plus précisément Henson utilise le théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski sous la version que Vaught en a donnée dans [28], à savoir :

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle d'une théorie du premier ordre T et $\mathcal{U}(x)$, $\mathcal{R}(x,y)$ deux symboles relationnels du langage de T tels que $\langle \mathcal{U}^{\mathfrak{M}}, \mathcal{R}^{\mathfrak{M}} \rangle$ soit un ordre total strict infini, $\mathcal{U}^{\mathfrak{M}}$ et $\mathcal{R}^{\mathfrak{M}}$ désignant respectivement les interprétations de $\mathcal{U}(x)$ et $\mathcal{R}(x, y)$ dans $\mathfrak{M}$. Pour chaque ordre total strict $\langle I, < \rangle$, il existe alors un modèle $\mathfrak{N}$ de T tel que

(i) I soit une partie de l'univers de $\mathfrak{N}$,

(ii) tout automorphisme de $\langle I, < \rangle$ se prolonge en un automorphisme de $\mathfrak{N}$,

(iii) $a \in I$, $a < b$ entraînent respectivement $\mathfrak{N} \models \mathcal{U}[a]$, $\mathfrak{N} \models \mathcal{R}[a, b]$.

Cette version ne nous suffira pas, aussi nous allons l'affiner quelque peu :

<u>Version 1.2. du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski.</u>

Soient $\mathfrak{M}$ un modèle d'une théorie du premier ordre T et $\langle A, \prec \rangle$ un ordre total strict tel que A soit une partie infinie de l'univers de $\mathfrak{M}$. Alors, pour chaque ordre total strict $\langle I, < \rangle$, il existe un modèle $\mathfrak{N}$ de T tel que

(i) I soit une partie de l'univers de $\mathfrak{N}$,

(ii) tout automorphisme de $\langle I, < \rangle$ se prolonge en un automorphisme de $\mathfrak{N}$,

(iii) si la formule $\varphi(x)$ du langage de T est vérifiée dans $\mathcal{M}$ en tout élément de A, alors $\varphi(x)$ soit vérifiée dans $\mathcal{N}$ en tout élément de I,

(iv) si la formule $\theta(x, y)$ du langage de T est vérifiée dans $\mathcal{M}$ en tout couple $\langle a, b\rangle$ tel que $a \prec b$, alors $\theta(x, y)$ soit vérifiée dans $\mathcal{N}$ en tout couple $\langle i, j\rangle$ tel que $i < j$.

Démonstration.

Notons T' la théorie T à laquelle on ajoute deux nouveaux symboles relationnels $\mathcal{U}(x)$, $\mathcal{R}(x, y)$ et les trois groupes d'axiomes suivants :

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
(\forall x,y,z)((\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y,z)) \longrightarrow \mathcal{R}(x,z)), \\
(\forall x,y)\ (\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow \neg\, \mathcal{R}(y,x)), \\
(\forall x,y)\ (\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow (\mathcal{U}(x) \wedge \mathcal{U}(y))), \\
(\forall x,y)\ ((\mathcal{U}(x) \wedge \mathcal{U}(y) \wedge x \neq y) \longrightarrow (\mathcal{R}(x,y) \vee \mathcal{R}(y,x)))
\end{cases}
$$

(ces axiomes traduisent évidemment que la classe des x vérifiant $\mathcal{U}(x)$ est totalement et strictement ordonnée par $\mathcal{R}(x,y)$).

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases}
(\forall x)\ (\mathcal{U}(x) \longrightarrow \varphi(x)), \\
\text{pour toute formule } \varphi(x) \text{ du langage de T} \\
\text{telle que } \mathcal{M} \models \varphi\,[a] \text{ pour tout } a \in A.
\end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases}
(\forall x,y)\ (\mathcal{R}(x,y) \longrightarrow \theta(x,y)), \\
\text{pour toute formule } \theta(x,y) \text{ du langage de T} \\
\text{telle que } \mathcal{M} \models \theta[a, b] \text{ pour tout couple } \langle a, b\rangle \\
\text{vérifiant } a \prec b.
\end{cases}
$$

Etendons la structure $\mathcal{M}$ au langage de T' en associant à $\mathcal{U}(x)$ et $\mathcal{R}(x, y)$ respectivement A et $\prec$; notons $\mathcal{M}'$ la structure ainsi obtenue. $\mathcal{M}'$ est un modèle de T', $\langle \mathcal{U}^{\mathcal{M}'}, \mathcal{R}^{\mathcal{M}'} \rangle$

se confond avec $\langle A, \alpha \rangle$ et est donc un ordre total strict et infini. En appliquant la version de Vaught du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski, nous obtenons dès lors un modèle qu'il suffit de restreindre au langage de T. $\rangle$

Signalons qu'il est possible de généraliser cette version du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski en étendant la conclusion (iv) à toute formule $\theta(x_1,\ldots, x_n)$ du langage de T ($n \geqslant 2$) vérifiée dans $\mathfrak{M}$ par tous les n-uples $\langle a_1,\ldots, a_n\rangle$ tels que $a_1 \alpha\, a_2 \alpha \ldots \alpha\, a_n$.

2. Incomparabilité de certains cardinaux.

Comment se disposent $|x|$ et $|USC(x)|$ d'une part, $|x|$ et $|SC(x)|$ d'autre part ? Envisageons les différents cas possibles. En prenant $a = Nn$ et $b = V$, on obtient dans NF

$$|a| = |USC(a)| \text{ , d'où } |a| < |SC(a)| \text{ ,}$$

et

$$|b| = |SC(b)| \text{ , d'où } |USC(b)| < |b| \text{ ;}$$

d'autre part dans [8] , Henson démontre que l'on peut ajouter de façon consistante à toute extension stratifiée consistante de NF, l'existence d'ensembles finis c et d tels que

$$|c| < |USC(c)| \text{ , } |SC(d)| < |d| \text{ .}$$

Un seul cas reste donc à envisager : l'incomparabilité de $|x|$ et $|USC(x)|$ d'une part, de $|x|$ et $|SC(x)|$ d'autre part. C'est ce que nous allons faire.

Définissons $USC^i(x)$ et $SC^i(x)$ pour tout $i \in \omega$ de proche en proche par :

$$USC^0(x) = SC^0(x) = x \text{ ,}$$

$$USC^{i+1}(x) = USC(USC^i(x)) \quad \text{et}$$

$$SC^{i+1}(x) = SC(SC^i(x)) \qquad (i \in \omega) \text{ .}$$

Lemme 2.1.

Si S est une extension consistante de NF, elle le reste quand on lui ajoute les axiomes

$$|c_j| \not\leqslant_* |USC^1(c_i)| \not\leqslant_* |c_j| \wedge |c_i| \not\leqslant_* |SC^1(c_j)| \not\leqslant_* |c_i|$$

(i, j, $1 \in \omega$ et $i < j$), les c_i désignant de nouvelles constantes ajoutées au langage de S.

Démonstration.

Soit A un ensemble bien ordonnable tel que $|A| \not\leqslant |USC(V)|$; nous pourrions par exemple prendre pour A un ensemble x tel que $USC(x) \approx NO$, puisque l'ordinal du bon ordre $\leqslant_o$ est de la forme $U(\alpha)$ mais non de la forme $U^2(\alpha)$.

Fixons $p \in \omega$, $p > o$, $t > 1+p+(p+2)p$ et, si $o \leqslant i \leqslant p$, notons

$$a_i = USC^{t-i}(V),$$

$$b_i = USC^{1+(p+2)i}(A),$$

$$c_i = (a_i \times \{o\}) \cup (b_i \times \{1\}).$$

Soient $o \leqslant i, j, k, l \leqslant p$ et $i < j$. Alors :

(1) $|c_k| = |a_k| + |b_k|$.

(2) $|USC(c_k)| \leqslant |c_k| \leqslant |USC^{1+(p+2)k}(V)|$, car d'une part $|USC(A)| < |A|$ et $|USC(V)| < |V|$, et d'autre part $1 + (p + 2)\, k < t - k$.

(3) $|SC^1(a_k)| = |a_k| = |a_k| \cdot |a_k|$, car $SC(V) = V$ et $V \approx V \times V$.

(4) $|a_j| \nleqslant_* |a_i|$, car sinon

$$|USC^{t-i-1}(V)| \leqslant |USC^{t-j}(V)| \leqslant_* |USC^{t-i}(V)| ,$$

d'où, vu (I.2.4.),

$$|V| \leqslant_* |USC(V)| ,$$

c'est-à-dire

$$|SC(V)| \leqslant_* |USC(V)| ,$$

ce qui contredirait le théorème de Cantor (I.2.3.)

(5) $|a_j| \nleqslant_* |b_i|$, car sinon, puisque $|b_i| \in WC$ et vu (I.2.1.),

$$|a_j| \leqslant |b_i| ,$$

d'où a_j et donc V seraient bien ordonnables, ce qui est impossible en raison du résultat bien connu de Specker [22].

Il s'ensuit :

(6) $|c_j| \nleqslant_* |USC^1(c_i)| \wedge |SC^1(c_j)| \nleqslant_* |c_i|$, sinon

$$|a_j| \leqslant_* |USC^1(c_i)| \vee |SC^1(a_j)| \leqslant_* |c_i| ,$$

d'où, vu (2) et (3),

$$|a_j| \cdot |a_j| \leqslant_* |c_i| ,$$

ce qui entraînerait en utilisant le théorème (I.2.5.)

$$|a_j| \leqslant_* |a_i| \vee |a_j| \leqslant_* |b_i| ,$$

contredisant ainsi (4) et (5).

(7) $|USC^{l}(c_i)| \nleqslant_* |c_j| \wedge |c_i| \nleqslant_* |SC^{l}(c_j)|$, sinon vu (2)

$$|USC^{l}(c_i)| \leqslant_* |USC^{1+(p+2)j}(V)| \quad \vee$$

$$|USC^{l}(c_i)| \leqslant_* |SC^{l}(USC^{1+(p+2)j}(V))| ,$$

d'où

$$|USC^{l}(c_i)| \leqslant_* |USC^{1+(p+2)j}(V)| \quad ;$$

en utilisant (I.2.2.), il vient alors

$$|SC(USC^{l}(c_i))| \leqslant |SC(USC^{1+(p+2)j}(V))| ,$$

et donc

$$|USC^{l+1}(c_i)| \leqslant |USC^{1+(p+2)j}(V)| ,$$

$$|USC^{1+(p+2)i+l+1}(A)| \leqslant |USC^{1+(p+2)j}(V)| ,$$

d'où, puisque $1+(p+2)i+l+1 < 1+(p+2)j$,

$$|A| \leqslant |USC(V)| ,$$

ce qui est impossible.

On conclut dès lors en utilisant le théorème de compacité.$\rangle$

Théorème 2.2.

Soit S une extension stratifiée consistante de NF. Alors S reste consistante si on lui ajoute deux nouvelles constantes a, b et les axiomes

$$|USC^i(a)| \nleq_* |USC^j(a)| \nleq_* |USC^i(a)| \qquad (i,j \in \omega \text{ et } i \neq j),$$

$$|b| \nleq_* |SC^k(b)| \nleq_* |b| \qquad (k \in \omega \text{ et } k > o).$$

Démonstration.

Soient S une extension stratifiée consistante de NF, $\mathfrak{M}$ un modèle de la théorie dont le lemme 2.1. nous assure la consistance et $\underline{c}_i$ $(i \in \omega)$ l'élément de l'univers de $\mathfrak{M}$ associé à la constante c_i intervenant dans le lemme 2.1.. Notons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs et $<_{\mathbb{Z}}$ l'ordre strict habituel sur $\mathbb{Z}$.
La classe infinie des $\underline{c}_i (i \in \omega)$ est totalement et strictement ordonnée par la relation

$$\underline{c}_i \propto \underline{c}_j \Leftrightarrow i < j.$$

Par conséquent en utilisant la version 1.2. du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski et en considérant - comme Henson dans [8] - l'ordre total strict $\triangleleft$ défini par :

$$\langle i,z \rangle \triangleleft \langle j,z' \rangle \Longleftrightarrow (i,j \in \{o,1\} \text{ et } z,\ z' \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$(i < j \text{ ou } (i=j \text{ et } z <_{\mathbb{Z}} z'))),$$

nous obtenons un modèle $\mathfrak{N}$ de S et un automorphisme σ de $\mathfrak{N}$ tels que

(i) $\{o,1\} \times \mathbb{Z}$ soit une partie de l'univers de $\mathfrak{N}$,

(ii) $\sigma(\langle o,z \rangle) = \langle o,z+1 \rangle$ et $\sigma(\langle 1,z \rangle) = \langle 1,z-1 \rangle$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$,

(iii) $x \triangleleft y$ entraîne, pour tout $k \in \omega$,

$$\mathfrak{N} \models |y| \nleq_* |USC^k(x)| \nleq_* |y| \wedge |x| \nleq_* |SC^k(y)| \nleq_* |x| .$$

Soient $c = \langle o,o \rangle$, $d = \langle 1,o \rangle$ et $k \in \omega$, $k > o$. Alors

$$c \lhd \sigma^{k}(c) \text{ et } \sigma^{k}(d) \lhd d,$$

d'où

$$\mathcal{M} \models |\sigma^{k}(c)| \nleqslant_{*} |USC^{k}(c)| \nleqslant_{*} |\sigma^{k}(c)| \;,$$

$$\mathcal{M} \models |\sigma^{k}(d)| \nleqslant_{*} |SC^{k}(d)| \nleqslant_{*} |\sigma^{k}(d)| \;.$$

Les formules

$$|x| \nleqslant_{*} |USC^{k}(y)| \nleqslant_{*} |x| \;,\quad |u| \nleqslant_{*} |SC^{k}(v)| \nleqslant_{*} |u|$$

sont stratifiées si les types des variables x, y, u, v sont suffisamment grands et si

$$\text{type } x = \text{type } y + k \text{ et type } u = \text{type } v + k \;;$$

en utilisant le théorème 1.1. de Henson, il vient donc

$$\mathcal{M}^{\sigma} \models |c| \nleqslant_{*} |USC^{k}(c)| \nleqslant_{*} |c| \wedge |d| \nleqslant_{*} |SC^{k}(d)| \nleqslant_{*} |d| \;,$$

et aussi

$$\mathcal{M}^{\sigma} \models S$$

puisque tous les axiomes de S sont des sentences stratifiées.

Par conséquent, si aux constantes a, b on associe respectivement les éléments c, d de l'univers de $\mathcal{M}$, on étend $\mathcal{M}$ en un modèle de la théorie dont il faut démontrer la consistance.$\rangle$

Ce théorème est encore vérifié si on y remplace partout $\leqslant_{*}$ par $\leqslant$, en effet dans NF $x \leqslant y$ entraîne $x \leqslant_{*} y$ (I.2.1.).

Dès lors nous avons le

Corollaire 2.3.

Soit S une extension stratifiée consistante de NF. Alors S reste consistante si on lui ajoute les axiomes

$$(\exists x)\ (\ |x| \nleq |USC(x)| \nleq |x|\ ),$$

$$(\exists y)\ (\ |y| \nleq |SC(y)| \nleq |y|\ ).$$

3. A propos des propriétés typées.

Dans [4] , Boffa généralise le résultat de Henson [9] selon lequel

$$NF \vdash x \approx SC(x) \longrightarrow \neg\,(x \text{ bien ordonnable}) \qquad (*)\ ;$$

il définit à cet effet une nouvelle classe de propriétés : les propriétés typées, en voici la définition. Si F est une sentence stratifiée et v une variable libre n'intervenant pas dans F, fixons une stratification de F et désignons par F_v la formule obtenue en remplaçant dans F chaque quantificateur Qx par $Qx \in SC^i(v)$, i étant le type de la variable x. Dès lors $\varphi(v)$ est une propriété typée s'il existe une sentence stratifiée F ne contenant pas la variable v et telle que

$$NF \vdash \varphi(v) \longleftrightarrow F_v.$$

La formule $\neg$(x bien ordonnable) est un exemple de propriété typée (voir [4]). La généralisation de (*) s'énonce :

Théorème 3.1. (Boffa [4])

Soit $\varphi(v)$ une propriété typée. Alors $NF \vdash \varphi(V)$ entraîne $NF \vdash (\forall x)\ (x \approx SC(x) \longrightarrow \varphi(x))$.

Une question se pose dès lors : étant donné une propriété typée $\varphi(v)$ telle que $NF \vdash \varphi(V)$, peut-on trouver dans NF un ensemble a tel que

$$\varphi(a) \wedge a \not\approx SC(a),$$

ou encore a-t-on dans NF

$$(\forall x)\ (\varphi(x) \leftrightarrow x \approx SC(x)) \ ?$$

Nous allons répondre partiellement à cette question par un résultat de consistance relative. Pour la propriété typée $\neg$(x bien ordonnable), nous améliorerons ensuite ce résultat en établissant dans NF l'existence d'un ensemble non bien ordonnable et non équipotent à l'ensemble de ses parties.

Théorème 3.2.

Soit S une extension stratifiée consistante de NF. Alors S reste consistante si on lui ajoute deux constantes a, b et les axiomes

$$|a| < |USC(a)| < |SC(a)| \ ,$$

$$|b| > |SC(b)| \ ,$$

$$\varphi(a) \wedge \varphi(b),$$

$\varphi(x)$ variant dans toutes les propriétés typées telles que $NF \vdash \varphi(V)$.

Démonstration.

Soient S une extension stratifiée consistante de NF, $\mathcal{M}$ un modèle de S et $\triangleleft$ l'ordre total strict infini introduit lors de la démonstration de 2.2. Notons

$$A = \left\{ a \mid (\exists\, i \in \omega)\ (\mathfrak{M} \models a = |USC^{2i}(V)|\ ) \right\},$$

$$\alpha = \left\{ \langle a,b \rangle \mid a,\ b \in A \text{ et } \mathfrak{M} \models |a| < |b| \right\}.$$

Puisque $|USC(V)| < |V|$, $\langle A, \alpha \rangle$ est un ordre total strict et infini, de plus $a \,\alpha\, b$ entraîne

$$\mathfrak{M} \models |SC(a)| < |b| \ \wedge\ |a| < |USC(b)| \quad ;$$

$a \in A$ entraîne

$$\mathfrak{M} \models \quad a \approx SC(a).$$

En utilisant la version 1.2. du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski, nous obtenons un modèle $\mathfrak{N}$ de S et un automorphisme σ de $\mathfrak{N}$ tels que :

(i) $\{0,1\} \times \mathbb{Z}$ soit une partie de l'univers de $\mathfrak{N}$,

(ii) $\sigma(\langle 0,z \rangle) = \langle 0,z+1 \rangle$ et $\sigma(\langle 1,z \rangle) = \langle 1,z-1 \rangle$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$,

(iii) $a \in \{0,1\} \times \mathbb{Z}$, $a \lhd b$ entraînent respectivement $\mathfrak{N} \models a \approx SC(a)$, $\mathfrak{N} \models |SC(a)| < |b| \ \wedge\ |a| < |USC(b)|$.

Notons encore $c = \langle 0,0 \rangle$, $d = \langle 1,0 \rangle$ et soit $\varphi(x)$ une propriété typée telle que $NF \vdash \varphi(V)$.
Dès lors

$$\mathfrak{N} \models |SC(c)| < |\sigma(c)| \ \wedge\ |\sigma(d)| < |USC(d)| \ ,$$

et, en vertu du théorème 3.1. de Boffa,

$$\mathfrak{N} \models \varphi(c) \ \wedge\ \varphi(d).$$

Les formules $|SC(x)| < |y|$, $|y| < |USC(x)|$ sont stratifiées si les types de x et y sont suffisamment grands et si (type x) + 1 = type y ; d'autre part, toute propriété typée est stratifiée. Par conséquent, du théorème 1.1. de Henson, il découle

$$\mathcal{B}^{b} \models |SC(c)| < |c| \wedge |d| < |USC(d)| \wedge \varphi(c) \wedge \varphi(d) ,$$

et aussi

$$\mathcal{B}^{b} \models S ,$$

ce qui démontre le théorème. >

Remarquons que le théorème 3.2. est encore vérifié si nous imposons à a et b de satisfaire toutes les formules stratifiées $\varphi(x)$ ayant une seule variable libre et telles que

$$S \vdash (\forall x)\ (x \approx SC(x) \longrightarrow \varphi(x)) .$$

De là on déduit le

<u>Corollaire 3.3.</u>

Soient S une extension stratifiée consistante de NF et $\varphi(x)$ une formule stratifiée ayant une seule variable libre. Alors les sentences

$$(\forall x)\ (x \approx SC(x) \longleftrightarrow \varphi(x)),$$

$$(\forall x)\ (|x| \leqslant |SC(x)| \longleftrightarrow \varphi(x)),$$

$$(\forall x)\ (|x| \geqslant |SC(x)| \longleftrightarrow \varphi(x))$$

ne sont pas des théorèmes de S .

Il s'ensuit que ce corollaire est également vérifié pour les formules stratifiées contenant plusieurs variables libres.

<u>Proposition 3.4.</u>

$$NF \vdash (\exists x)\ (x \not\approx SC(x) \wedge x \text{ non bien ordonnable}) .$$

Démonstration.

Il nous suffit de trouver un cardinal m tel que

$$m \notin WC \wedge m \neq 2^{T(m)}.$$

Nous allons utiliser deux théorèmes de Henson à savoir :

(1) $NF \vdash (\exists x \in NC)(x \neq |USC(V)| \wedge 2^{T(x)} = |USC(V)|)$
(théorème 2.2 de [9]),

(2) $NF \vdash ((x \in WC \wedge T(x) < x \wedge (\forall y < x)\ (y \leqslant 2^{T(x)})) \longrightarrow$

$$(\exists y \in WC)(y = T(y) \wedge x < y \wedge x < 2^{T(x)}))$$
(théorème 3.8 de [9]).

Appliquons (1) et soit m un cardinal tel que

$$m \neq |USC(V)| \quad \wedge \quad 2^{T(m)} = |USC(V)| .$$

Deux cas peuvent se présenter :

(i) $m \nless |USC(V)|$. Alors, en prenant $p = m + |USC(V)|$, nous avons $p > |USC(V)|$ et $p \notin WC$, puisque V ne peut être bien ordonné ([22]). Il vient également

$$\begin{aligned} 2^{T(p)} &= 2^{T(m)} \cdot 2^{T(|USC(V)|)} \\ &= |USC(V)| \cdot |USC(V)| \\ &= |USC(V)| \\ &\neq p. \end{aligned}$$

(ii) $m < |USC(V)|$. Supposons $m \in WC$ et désignons par p le maximum de $|NO|$ et de m. Par conséquent $p \in WC$.

Nous savons

$$|NO| \leqslant |USC(V)| \quad (*), \quad |NO| \nleqslant |USC^2(V)| \quad (**) ;$$

en effet l'ordinal du bon ordre $\leqslant_{o}$ est de la forme $U(\alpha)$ mais non de la forme $U^2(\alpha)$.
De (*), il découle alors

$$|NO| \leqslant p \leqslant |USC(V)| \leqslant 2^{T(p)},$$

et de (**), on tire

$$T(p) < p.$$

En appliquant le résultat (2) de Henson, on obtient un cardinal q tel que

$$|NO| \leqslant p < q \wedge q = T(q),$$

ce qui est impossible en raison de (**).
Par conséquent $m \notin WC$. >

4. Positions relatives de $|x|$ et $|USC(x)|$ (suite et fin).

Continuons la discussion entamée au paragraphe 2 quant aux positions relatives de m et T(m) lorsque m est un cardinal, en distinguant cette fois les cas :

$$m \in Nn, \; m \in WC - Nn, \; m \in NC - WC.$$

Désignons par S une extension stratifiée consistante de NF.

Dans NF, il existe des cardinaux $\aleph, \aleph' \in WC - Nn$ tels que $\aleph = T(\aleph)$, $\aleph' > T(\aleph')$; en effet, il suffit de prendre $\aleph = \aleph_o$ et $\aleph' = |NO|$, puisque l'ordinal du bon ordre $\leqslant_o$, noté Ω, est tel que $\neg(\exists \alpha \in NO)(U^2(\alpha) = \Omega)$.

D'autre part, S reste consistante si on lui ajoute l'existence d'un cardinal $\aleph'' \in WC - Nn$ tel que $\aleph'' < T(\aleph'')$. En effet, pour démontrer la consistance de

$$S + (\exists x \in Nn)(x < T(x)) \qquad (*),$$

Henson [8] considère l'ordre total strict et infini obtenu en restreignant $<$ aux naturels concrets, et applique ensuite sa méthode. Mais, si n est naturel concret et si ord(n) désigne l'unique ordinal x défini par $c(x) = n$ (★), on a - comme nous allons le voir - $\aleph_{ord(n)} \neq \Lambda$; la formule $\aleph_{ord(x)} \neq \Lambda$ étant stratifiée, nous pouvons dès lors supposer que le naturel x dont il est question dans (*), vérifie $\aleph_{ord(x)} \neq \Lambda \wedge ord(x) <_o U(ord(x))$, et par conséquent, vu (I.1.1.),

$$\aleph_{ord(x)} < T(\aleph_{ord(x)}).$$

Si n est un naturel concret, $\aleph_{ord(n)} \neq \Lambda$ parce que, du fait de l'existence d'un cardinal $\aleph' \in WC$ tel que $T(\aleph') < \aleph'$, la proposition (I.1.1.) nous assure de l'existence d'un ordinal α vérifiant $(\aleph_\alpha \neq \Lambda \wedge U(\alpha) < \alpha)$, et par suite $(\aleph_\alpha \neq \Lambda \wedge ord(n) <_o \alpha)$.

Evidemment, si $m \in WC$, m et T(m) ne peuvent être incomparables. Pour les cardinaux m éléments de WC, qu'ils soient naturels ou alephs, nous connaissons donc quelles positions relatives peuvent prendre effectivement m et T(m). Qu'en est-il pour les autres cardinaux, c'est-à-dire pour les cardinaux d'ensembles non bien ordonnables ? Puisque $(\exists x \in NC)(x \nleq T(x) \nleq x)$ est consistant avec S et puisque $NF \vdash |USC(V)| < |V|$, deux questions se posent encore : peut-on ajouter de façon consistante à S, l'existence d'un cardinal $m \in NC - WC$ tel que

$$m < T(m) \;?$$

$$m = T(m) \;?$$

★ la définition de c(x) est à la page 1.

Nous allons répondre affirmativement à la première de ces deux questions grâce au théorème suivant :

Théorème 4.1.

Soit S une extension stratifiée consistante de NF. Alors S reste consistante si on lui ajoute l'axiome

$$(\exists x \text{ non bien ordonnable})\ (\ |x| < |USC(x)|\ ).$$

Démonstration.

Il s'agit d'une conséquence du théorème 3.2. En effet, d'une part, $\neg$ (x bien ordonnable) est une propriété typée et d'autre part, $\neg$(V bien ordonnable) est un théorème de NF ([22]).>

Nous pouvons finalement résumer notre discussion par le

Tableau 4.2.

	m ∈ NC		
	m ∈ Nn	m ∈ WC-Nn	m ∈ NC-WC
m=T(m)	EXISTE dans NF	EXISTE dans NF	?
m > T(m)	EXISTENCE CONSISTANTE avec S (*) (Henson [8])	EXISTE dans NF	EXISTE dans NF
m < T(m)	EXISTENCE CONSISTANTE avec S (*) (Henson [8])	EXISTENCE CONSISTANTE avec S (*)	EXISTENCE CONSISTANTE avec S(*) (théorème 4.1.)
$m \nleq T(m) \nleq m$	N'EXISTE PAS dans NF	N'EXISTE PAS dans NF	EXISTENCE CONSISTANTE avec S (*) (corollaire 2.3.)

(*) S extension stratifiée consistante de NF.

CHAPITRE III

****

A PROPOS DE L'OPERATION 2^x.

1. Définitions et propriétés élémentaires.

Pour étudier le "nombre de fois" que l'on peut itérer l'opération 2^x en partant d'un cardinal m, nous allons étudier le cardinal de l'ensemble

$$\left\{m,\ 2^m,\ 2^{(2^m)}, \ldots\right\} \ ;$$

cet ensemble fut introduit par Specker [22] et est noté $\Phi(m)$. Formellement on définit

$$\Phi(m) = \bigcap \left\{x \mid m \in x \wedge (\forall y \in x)(y \leqslant |USC(V)| \longrightarrow 2^y \in x)\right\}.$$

Les nombres de Beth $\beth_i(m)$ sont définis pour tout $i \in Nn$ de telle sorte que

$$\beth_o(m) = m,$$

$$\beth_{i+1}(m) = 2^{\beth_i(m)} \text{ si } \beth_i(m) \leqslant |USC(V)|,$$

$$\beth_{i+1}(m) = \beth_i(m) \text{ si } \beth_i(m) \not\leqslant |USC(V)| .$$

Pour ce faire, on démontre par induction sur $i \in Nn$ qu'étant donné un cardinal m, il existe une et une seule fonction f telle que

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{j \mid j \leqslant i\right\},$$

$$f(o) = m,$$

$$(\forall j < i)(f(j) \leqslant |USC(V)| \longrightarrow f(j+1) = 2^{f(j)}),$$

$$(\forall j < i)(f(j) \not\leqslant |USC(V)| \longrightarrow f(j+1) = f(j));$$

alors on note par exemple $f_{m,i}$ cette fonction et on pose $\daleth_i(m) = f_{m,i}(i)$. De la sorte la formule $x = \daleth_z(y)$ est stratifiée lorsqu'on accorde à x, y, z des types suffisamment grands et égaux entre eux.

On vérifie aisément que, si $m \in NC$, $\Phi(m)$ est l'ensemble $\{\daleth_i(m) \mid i \in Nn\}$, et que $i, j \in Nn$ entraînent

$$\daleth_{i+j}(m) = \daleth_i(\daleth_j(m)).$$

Proposition 1.1. (NF)

Soit $m \leqslant m'$. Alors :

(i) $\daleth_i(m') \leqslant |USC(V)| \longrightarrow \daleth_i(m) \leqslant \daleth_i(m')$,

(ii) $|\Phi(m)| \geqslant |\Phi(m')|$.

Démonstration.

Soit $m \leqslant m'$. La propriété (i) se démontre directement par induction sur $i \in Nn$.

Si $\Phi(m')$ est infini, il s'ensuit

$$\daleth_i(m) \leqslant \daleth_i(m') \leqslant |USC(V)| \qquad (i \in Nn),$$

et donc $|\Phi(m)| = |\Phi(m')| = \aleph_0$.

Supposons $\Phi(m')$ fini. Si $\Phi(x)$ est fini, notons $l(x)$ le minimum de $\{i \mid i \in Nn \wedge \daleth_i(x) \nleqslant |USC(V)|\}$; alors

$$\Phi(x) \approx \{j \mid j \leqslant l(x)\}, \text{ d'où } |\Phi(x)| = T^2(l(x)+1).$$

De (i), il découle dès lors

$$l(m) \geqslant l(m'), \text{ et donc } |\Phi(m)| \geqslant |\Phi(m')|. >$$

<u>Proposition 1.2.</u> (NF)

Soient $m \in NC$ et $i \in Nn$. Alors

(i) $\left(\beth_i(m) \leqslant |USC(V)| \wedge j \leqslant i+1\right) \rightarrow \beth_{T(j)}(T(m)) = T(\beth_j(m))$,

(ii) $\beth_{T(i)}(T(m)) \leqslant |USC^2(V)| \longrightarrow \beth_i(m) \leqslant |USC(V)|$.

<u>Démonstration.</u>

(i) Rappelons $(\forall x \leqslant |USC(V)|)\ (2^{T(x)} = T(2^x))$ (*).

Soit $Q(i)$ la formule

$$(\forall j \leqslant i+1)(\forall x \in NC)\ (\beth_i(x) \leqslant |USC(V)| \longrightarrow$$

$$\beth_{T(j)}(T(x)) = T(\beth_j(x))).$$

Supposons $i \in Nn$, $Q(i)$ et $\beth_{i+1}(x) \leqslant |USC(V)|$. Alors :

$$T(\beth_{i+2}(x)) = 2^{T(\beth_{i+1}(x))} \quad \text{vu } (*),$$

$$= 2^{\beth_{T(i+1)}(T(x))},$$

$$= \beth_{T(i+2)}(T(x)) \ .$$

Ainsi $(\forall i \in Nn)(Q(i) \longrightarrow Q(i+1))$ et en raison de (*), on a $Q(o)$; $Q(i)$ étant stratifiée, la proposition (i) est donc démontrée par induction.

(ii) Supposons $\beth_{T(i)}(T(m)) \leqslant |USC^2(V)|$ et $\beth_i(m) \nleqslant |USC(V)|$

et notons l le minimum de $\left\{ j \mid j \in Nn \wedge \beth_j(m) \nleqslant USC(V) \right\}$.

En raison de (i), on a

$$T(\beth_1(m)) = \beth_{T(1)}(T(m)),$$

$$\leqslant \beth_{T(i)}(T(m)) \text{ puisque } 1 \leqslant i ,$$

$$\leqslant |USC^2(V)| ,$$

et donc $\beth_1(m) \leqslant |USC(V)|$, ce qui est impossible.>

Le résultat suivant est dû à Henson [9] ; à l'opposé de la nôtre, sa démonstration n'utilise pas les nombres de Beth.

<u>Proposition 1.3.</u> (NF)

(i) Si $m \in NC \wedge \Phi(m)$ infini, on a

$$\Phi(T(m)) \text{ infini } \wedge \Phi(T(m)) = T''\Phi(m).$$

(ii) Si $m \in NC \wedge \Phi(m)$ fini et si on note γ le maximum de $\Phi(m)$, on a

$$\Phi(T(m)) = (T''\Phi(m)) \cup \Phi(T(\gamma))$$

et

$$(T''\Phi(m)) \cap \Phi(T(\gamma)) = \{T(\gamma)\} .$$

<u>Démonstration.</u>

On déduit directement (i) de 1.2.(i). Soient $m \in NC$, $\Phi(m)$ fini, 1 le minimum de

$\{i \mid i \in Nn \wedge \beth_i(m) \nleqslant |USC(V)|\}$ et $\gamma = \beth_1(m)$; γ est le maximum de $\Phi(m)$.

En raison de 1.2.(i), on a d'une part $T''\Phi(m) \subset \Phi(T(m))$, et d'autre part $\beth_i(T(\gamma)) = \beth_{i+T(1)}(T(m))$, d'où $\Phi(T(\gamma)) \subset \Phi(T(m))$; par conséquent $(T''\Phi(m)) \cup \Phi(T(\gamma)) \subset \Phi(T(m))$.

Tout élément x de $\bar{\Phi}(T(m))$ est de la forme $\daleth_{T(j)}(T(m))$; si $j \leqslant 1$, $x = T(\daleth_j(m))$ vu 1.2.(i) et donc $x \in T''\bar{\Phi}(m)$; si $j = 1 + k$ avec $k > o$, $x = \daleth_{T(k)}(T(\gamma))$ toujours en vertu de 1.2.(i) et donc $x \in \bar{\Phi}(T(\gamma))$. Finalement $\bar{\Phi}(T(m)) = (T''\bar{\Phi}(m)) \cup \bar{\Phi}(T(\gamma))$.
Si $x \in T''\bar{\Phi}(m)$ et $y \in \bar{\Phi}(T(\gamma))$, nous avons $x \leqslant T(\gamma) \leqslant y$; il s'ensuit $(T''\bar{\Phi}(m)) \cap \bar{\Phi}(T(\gamma)) = \{T(\gamma)\}$.>

2. Deux théorèmes.

Si $\bar{\Phi}(m)$ est infini, il en est de même de $\bar{\Phi}(T(m))$ (proposition 1.3.). D'ailleurs , à l'heure actuelle, nous ne connaissons dans NF aucun cardinal infini m tel que $\bar{\Phi}(m)$ soit infini; en effet, l'existence d'un tel cardinal entraînerait dans NF l'existence d'une infinité de cardinaux infinis, problème toujours ouvert dans NF. Signalons à ce sujet les résultats de Forster [7] :

$$NF \vdash \bar{\Phi}(\aleph_o) \text{ infini} \leftrightarrow (\exists x \in NCI)(\bar{\Phi}(x) \text{ infini}) \qquad (F_1),$$

$$NF \vdash m \text{ cardinal fortement cantorien} \rightarrow \bar{\Phi}(m) \text{ infini} \qquad (F_2),$$

$$NF \vdash (\forall n \in Nn)(\exists x \in NC)(|\bar{\Phi}(x)| = n + 1)$$
$$\longrightarrow (\exists y \in NCI)(\bar{\Phi}(y) \text{ infini}) \qquad (F_3),$$

$$NF \vdash (\forall n \in Nn)(n \leqslant T(n)) \longrightarrow (\forall x \leqslant T(x))(\bar{\Phi}(x) \text{ infini}) \qquad (F_4).$$

Que se passe-t-il si $\bar{\Phi}(m)$ est fini ? Hormis la relation

$$T(|\bar{\Phi}(m)|) \leqslant |\bar{\Phi}(T(m))| \qquad \text{(proposition 1.3.)},$$

la seule relation entre $|\bar{\Phi}(m)|$ et $|\bar{\Phi}(T(m))|$, dont nous savons jusqu'ici être vérifiée dans NF pour certains cardinaux m infinis est :

$$|\Phi(T(m))| = |\Phi(m)| + 1 ;$$

c'est le cas de $|V|$, $|USC(V)|$, $|USC^2(V)|$ ... Le théorème suivant montre qu'il peut en être tout autrement.

Théorème 2.1. (NF)

Il existe un cardinal m tel que $m \nleqslant |USC(V)|$ et tel que $\Phi(T(m))$ ne soit pas un ensemble cantorien fini, en particulier ce cardinal m vérifie $J_i(T(m)) \leqslant |USC(V)|$ pour tout naturel i fortement cantorien.

Démonstration.

Supposons $(\forall x \in NC)(x \nleqslant |USC(V)| \rightarrow \Phi(T(x))$ cantorien fini). De 1.3.(ii), il découle

$$(\forall x \in NC)(\Phi(x) \text{ fini} \leftrightarrow \Phi(T(x)) \text{ fini}) \qquad (*).$$

Notons m le minimum de $\{x \mid x \in WC \wedge \Phi(x) \text{ fini}\}$; ce minimum existe, en effet en prenant par exemple le cardinal p tel que $|NO| = T(p)$, nous avons $p \nleqslant |USC(V)|$ puisque l'ordinal de $\leqslant_c$ est de la forme $U(\alpha)$ mais non de la forme $U^2(\alpha)$. Vu (*), $\Phi(T(m))$ est fini et par suite $m \leqslant T(m)$. Dès lors soit q défini par $m = T(q)$; on a $q \leqslant m$ d'une part et d'autre part, vu (*), $\Phi(q)$ fini d'où $m \leqslant q$; par conséquent $m = T(m)$.

Soit γ le maximum de $\Phi(m)$. En raison de 1.3.(ii), on a dès lors

$$|\Phi(m)| = T(|\Phi(m)|) + |\Phi(T(\gamma))| - 1$$

et

$$|\Phi(T(\gamma))| > 1.$$

Utilisons maintenant le résultat de Henson ([9] , p.66) selon lequel la différence entre les naturels n et T(n) ne peut être un naturel cantorien non nul. $\overline{\Phi}(T(\gamma))$ est donc un ensemble fini et non cantorien, ce qui contredit notre hypothèse puisque $\gamma \nleq |USC(V)|$.>

<u>Corollaire 2.2.</u> (NF + R)

Il existe un cardinal m tel que

$$m \nleq |USC(V)| \wedge \overline{\Phi}(T(m)) \text{ infini.}$$

Ce dernier résultat est annoncé également par Forster dans [7] ; signalons que, dans [7] , Forster démontre aussi :

$$NF \vdash (\forall x \leqslant T(x))(\overline{\Phi}(x) \text{ infini}) \longrightarrow$$

$$(\exists x \in NC)(\overline{\Phi}(x) \text{ fini} \wedge \overline{\Phi}(T(x)) \text{ infini}) \qquad (F_5).$$

La question se pose aussi de savoir, si étant donné un naturel n, on peut trouver un cardinal x tel que $x \nleq |USC(V)|$ et $|\overline{\Phi}(T(x))| = n + 2$. Une réponse partielle à cette question est donnée par les deux théorèmes suivants de Forster :

$$NF \vdash (\forall n \in Nn)(n \leqslant T(n)) \longrightarrow$$

$$(\forall n \in Nn)(\exists x \in NC)(x \nleq |USC(V)| \wedge |\overline{\Phi}(T(x))| = n+2),$$

$$NF \vdash NCI \text{ fini} \longrightarrow (\forall n \text{ naturel fortement cantorien})(\exists x \in NC)$$

$$(x \nleq |USC(V)| \wedge |\overline{\Phi}(T(x))| = n + 2) \qquad ([7])$$

Le dernier de ces deux résultats peut s'obtenir également comme corollaire du théorème 2.1. En effet, si nous supposons NCI fini, il existe un cardinal p tel que $p \nleqslant |USC(V)|$ et $\bar{\Phi}(T(p)$ soit fini non cantorien. Notons l le minimum de

$\{i \mid i \in Nn \wedge \beth_i(T(p)) \nleqslant |USC(V)|\}$ et donnons-nous un naturel fortement cantorien n ; alors $l \neq T(l)$ et donc $n+2 < l$. Soit a le cardinal $\beth_{l-(n+1)}(T(p))$; il s'ensuit

$$a \leqslant |USC(V)| \wedge |\bar{\Phi}(a)| = n + 2,$$

mais aussi

$$a \nleqslant |USC^2(V)| ,$$

car sinon, en raison de 1.2 (ii), nous aurions $p \leqslant |USC(V)|$. Par conséquent, en prenant pour b le cardinal x vérifiant $T(x) = a$, nous avons

$$b \nleqslant |USC(V)| \wedge |\bar{\Phi}(T(b))| = n + 2. \rangle$$

Pour chaque naturel n, existe-t-il un cardinal x tel que $|\bar{\Phi}(x)| = n + 1$? Nous allons voir que nous pouvons répondre affirmativement à cette question pour les naturels n fortement cantoriens (si cette restriction tombait, alors en raison de (F_3), il existerait un cardinal infini y tel que $\bar{\Phi}(y)$ soit infini). Signalons que dans [7] Forster répond affirmativement à cette question sans aucune restriction mais moyennant l'hypothèse $(\forall n \in Nn)(n \leqslant T(n))$.

<u>Théorème 2.3.</u> (NF)

Si n est un naturel fortement cantorien, il existe un cardinal x tel que $|\bar{\Phi}(x)| = n + 1$.

<u>Démonstration.</u>

Supposons que n soit un naturel fortement cantorien tel que $\neg(\exists x)(\beth_n(x) = |V|)$; désignons par l+1 le minimum de $\{i \mid i \in Nn \wedge \neg(\exists x)(\beth_i(x) = |V|)\}$ et par a un cardinal tel que $\beth_l(a) = |V|$. Dès lors, vu 1.2.(i),

$\beth_{T(1)+1}(T(a)) = |V|$ et donc $T(1) < 1$, ce qui est impossible puisque $1 < n$. $\rangle$

3. Deux résultats de consistance relative.

Dans [7], Forster considère à plusieurs reprises la sentence

$$(\forall x \leqslant T(x)(\Phi(x) \text{ infini}),$$

cette sentence apparaît notamment dans les théorèmes (F_4) et (F_5) mentionnés plus haut. Nous allons voir que la négation de cette sentence est consistante relativement à toute extension stratifiée de NF.

Théorème 3.1.

Si S est une extension stratifiée consistante de NF, elle reste consistante quand on lui ajoute une constante c et les axiomes

$$c < \beth_k(c) < T(c) \quad \wedge \quad \Phi(c) \text{ fini} \qquad (k \in \omega \text{ et } > 0).$$

Démonstration.

Soient S une extension stratifiée consistante de NF et $\mathfrak{M} = \langle M, R \rangle$ un modèle de S. En raison du théorème de compacité, il suffit d'établir, pour tout $k \in \omega$ et > 0, la consistance de la théorie

$$S + (\exists x \in NC)(\Phi(x) \text{ fini} \wedge \beth_k(x) < T(x));$$

aussi donnons-nous un $k \in \omega$ et > 0.

Remarquons que, si r, s, $1 \in \omega$ et $1 \leqslant s$, nous avons

$$NF \vdash |USC^r(V)| < |USC^s(V)| \quad \text{ssi} \quad r > s$$

et

$$NF \vdash \daleth_1(|USC^s(V)|) = |USC^{s-1}(V)| .$$

Dès lors dans NF, si nous notons

$$m_i = |USC^{(k+2)(i+1)}(V)| \qquad (i \in \omega),$$

$\Phi(m_i)$ est fini et $m_i < m_j$ entraîne successivement

$$i > j,$$

$$(k+2)(i+1) - k > (k+2)(j+1) + 1,$$

$$\daleth_k(m_i) < T(m_j).$$

Notons

$$A = \{ a \mid a \in M \text{ et } (\exists i \in \omega)(\mathcal{M} \models a = m_i) \} ,$$

$$\alpha = \{ \langle a,b \rangle \mid a, b \in A \text{ et } \mathcal{M} \models a < b \};$$

$\langle A, \alpha \rangle$ est un ordre total strict et infini. En utilisant la version 1.2. du théorème d'Ehrenfeucht- Mostowski, nous pouvons donc obtenir un modèle $\mathcal{N}$ de S et un automorphisme σ de $\mathcal{N}$ tels que

(i) $\mathcal{Z}$ soit une partie de l'univers de $\mathcal{N}$,

(ii) $z \in \mathcal{Z}$ entraîne $\sigma(z) = z - 1$,

(iii) $z \in \mathcal{Z}$, $z <_{\mathcal{Z}} z'$ entraînent respectivement

$$\mathcal{N} \models z \in NC \wedge \Phi(z) \text{ fini}, \mathcal{N} \models \daleth_k(z) < T(z').$$

Par conséquent

$$\mathcal{N} \models z \in NC \wedge \Phi(z) \text{ fini} \wedge \daleth_k(\sigma(z)) < T(z) \qquad (z \in \mathcal{Z}).$$

La formule $(x \in NC \wedge \Phi(x)$ fini $\wedge \beth_k(y) < T(x))$ est stratifiée si les types de x et y sont suffisamment grands et si type y = (type x) + 1 ; du théorème II.1.1. de Henson, il découle donc

$$\mathcal{M}^{\sigma} \models z \in NC \wedge \Phi(z) \text{ fini } \wedge \beth_k(z) < T(z) \qquad (z \in \mathcal{Z}),$$

et, S étant une extension stratifiée de NF,

$$\mathcal{M}^{\sigma} \models S .$$

La théorie S + $(\exists x \in NC)(\Phi(x)$ fini $\wedge \beth_k(x) < T(x))$ est donc consistante.>

<u>Corollaire 3.2.</u>

Toute extension stratifiée consistante de NF reste consistante quand on lui ajoute l'axiome

$$(\exists x)\ (x < T(x) \wedge \Phi(x) \text{ fini}) .$$

Les cardinaux $|c_i|$ du lemme II.2.1. sont obtenus par compacité en partant de cardinaux de la forme

$$|USC^i(V)| + |USC^j(x)| \text{ avec } i,\ j \in \omega \text{ et } > 0 ;$$

par conséquent nous pouvons supposer

$$\Phi(|c_i|) \text{ fini } \wedge |c_i| \leqslant |USC(V)| .$$

La formule $\Phi(|x|)$ fini $\wedge\ |x| \leqslant |USC(V)|$ étant stratifiée, les ensembles obtenus à partir des c_i dans le modèle transformé par un automorphisme, vérifient aussi cette formule ; dès lors on a le

<u>Théorème 3.3.</u>

Si S est une extension stratifiée consistante de NF, elle reste consistante quand on lui ajoute les deux axiomes

$$(\exists x \in NC)\ (x \nleqslant_* T(x) \nleqslant_* x \wedge \Phi(x) \text{ fini}) ,$$

$$(\exists x \leqslant |USC(V)|)\ (x \nleqslant_* 2^{T(x)} \nleqslant_* x \wedge \Phi(x) \text{ fini}) .$$

Faisons le point quant à l'existence d'un cardinal m tel que $\Phi(m)$ soit fini, en envisageant les différentes positions relatives de m et T(m) :

<u>Tableau 3.4.</u>

$m \in NCI \wedge \Phi(m)$ fini			
$m = T(m)$	$m > T(m)$	$m < T(m)$	$m \not\leq T(m) \not\leq m$
? dans NF	EXISTE dans NF	EXISTENCE CONSISTANTE avec S (*) (corollaire 3.2.)	EXISTENCE CONSISTANTE avec S(*) (théorème 3.3.)
N'EXISTE PAS dans NF + R (Forster, (F_4), [7])		N'EXISTE PAS dans NF + R (Forster, (F_4), [7])	? dans NF+R
(*) S extension stratifiée consistante de NF.			

CHAPITRE IV

QUELQUES RESULTATS OBTENUS GRACE AUX PERMUTATIONS DE L'UNIVERS.

1. La méthode des permutations de Scott.

La méthode des permutations fut introduite dans NF par Scott [20] ; cette méthode permit d'obtenir de nombreux résultats de consistance relative dans NF et elle fut également utilisée avec succès dans ZF sans axiome de fondement (voir [2]). Etant donné une permutation τ de l'univers, cette technique modifie l'appartenance initiale $\in$ pour obtenir une nouvelle appartenance $\in_\tau$ telle que

$$x \in_\tau y \longleftrightarrow x \in \tau(y),$$

l'univers restant inchangé.

Définitions 1.1. (Henson [10])

Soit τ une permutation de V. Nous définissons les fonctions τ_k sur V, pour tout $k \in \omega$, par

$$\tau_0(x) = x,$$

$$\tau_{k+1}(x) = \{ \tau_k(y) \mid y \in \tau(x) \}.$$

Lorsque $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est une formule du langage de NF, $\varphi^\tau(x_1, \ldots x_n)$ désigne la formule obtenue en remplaçant $x \in y$ par $x \in \tau(y)$ partout dans $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Si σ est une sentence du langage de NF, on définit

$$\sigma \text{ invariante} \longleftrightarrow (\forall \chi \text{ permutation de } V)(\sigma \leftrightarrow \sigma^\chi) \ ;$$

on dira qu'une extension T de NF est une extension invariante de NF lorsque les axiomes de T seront des sentences invariantes dans NF.

Lemme 1.2. (Henson [10])

Soit $k \in \omega$. Alors

$$NF \vdash \tau \text{ permutation de } V \rightarrow \tau_k \text{ permutation de } V.$$

En procédant par induction sur la longueur des formules, on déduit le

Théorème 1.3. (Henson [10])

Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule stratifiée et $s_1, \ldots s_n$ les types respectifs des variables $x_1, \ldots x_n$ dans une stratification de $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$. Alors

$$NF \vdash \tau \text{ permutation de } V \longrightarrow$$
$$(\varphi^{\tau}(x_1, \ldots x_n) \longleftrightarrow \varphi(\tau_{s_1}(x_1), \ldots, \tau_{s_n}(x_n))).$$

Par conséquent toute sentence stratifiée, en particulier tout axiome de NF, est invariante dans NF ; la notion d'extension invariante de NF a donc un sens.

Théorème 1.4. (Scott [20])

Soient σ une sentence du langage de NF et T une extension invariante de NF. Alors la consistance de

$$T + (\exists x \text{ permutation de } V)\ (\sigma^x)$$

entraîne la consistance de

$$T + \sigma.$$

Démonstration.

Soient T une extension invariante de NF et σ une sentence du langage de NF telle que

$$T + (\exists x \text{ permutation de } V)\ (\sigma^x)$$

soit consistante. Supposons $T + \sigma$ non consistante ; il existe alors des axiomes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ de T tels que

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p) \longrightarrow \neg \sigma$$

soit un théorème du calcul des prédicats. Si x désigne une variable non présente dans les φ_i et dans σ,

$$(\varphi_1^x \wedge \ldots \wedge \varphi_p^x) \longrightarrow \neg (\sigma^x)$$

est aussi un théorème du calcul des prédicats. Dès lors

$$T \vdash x \text{ permutation de } V \rightarrow \neg (\sigma^x),$$

ce qui est impossible. $T + \sigma$ doit donc être consistante.>
La méthode des permutations permet donc de trouver des résultats de consistance relative seulement pour des sentences non invariantes dans NF.

2. Une large classe de sentences invariantes.

Dans [10], Henson démontre que l'axiome de Rosser et l'axiome des ensembles cantoriens - c'est-à-dire la sentence ($\forall x$ bien ordonnable) (Can(x) $\longrightarrow$ stCan(x)) (voir [9]) - sont des sentences invariantes dans NF. Nous allons généraliser cela en dégageant une très large classe de sentences invariantes comprenant ces deux axiomes mais aussi la plupart des sentences intéressantes concernant les cardinaux : ce seront les C - formules.

Définissons d'abord les C' - formules comme étant les formules du langage de NF, obtenues en appliquant un nombre fini de fois les règles suivantes :

(I) Toute formule stratifiée est une C' - formule.

(II) x cardinal fortement cantorien est une C' - formule.

(III) Si φ et σ sont deux C' - formules, il en est de même de $\neg\varphi$ et de $\varphi\wedge\sigma$.

(IV) Si $\varphi(x_0, x_1,\dots,x_n)$ est une C' - formule $(n \geqslant 0)$, il en est de même de $(\forall x_0 \in NC)\ \varphi(x_0,x_1,\dots, x_n)$ et de $(\forall x_0 \subset NC)\ \varphi(x_0, x_1,\dots x_n)$.

Dès lors nous disons que la formule $\sigma(x_1,\dots x_n)$ du langage de NF est une <u>C - formule</u> lorsqu'il existe une C'-formule $\varphi(x_1,\dots, x_n)$ telle que

$$NF \vdash (\forall x_1\dots x_n)(\sigma(x_1,\dots, x_n) \longleftrightarrow \varphi(x_1,\dots x_n)).$$

On obtient immédiatement les règles dérivées suivantes :

(1) Si φ et σ sont deux C-formules, il en est de même de $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\sigma$, $\varphi\vee\sigma$, $\varphi\rightarrow\sigma$, $\varphi\leftrightarrow\sigma$.

(2) Si $\varphi(x_0, x_1,\dots, x_n)$ est une C-formule $(n \geqslant 0)$, il en est de même de $(\forall x_0 \in NC)\ \varphi(x_0, x_1, \dots,x_n)$, $(\forall x_0 \subset NC)\ \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $(\exists x_0 \in NC)\ \varphi(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $(\exists x_0 \subset NC)\ \varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

(3) $T(x) = x$, $T(x) < x$, $T(x) > x$ sont des C-formules ;

en effet, par exemple, $T(x) < x$ est équivalent dans NF à $(\exists y \in NC)(y = T(x) \wedge y < x)$.

(4) Can(x), stCan(x) sont des C-formules; en effet, par exemple, Can(x) est équivalent dans NF à $(\exists y \in NC)(y = T(y) \wedge y = |x|)$.

Rappelons la notation : $SC^0(x) = x$ et $SC^1(x) = SC(x)$.

Lemme 2.1. (Henson [10], p.71)

$$NF \vdash \tau \text{ permutation de } V \longrightarrow (\mathrm{stCan}(x)^{\tau} \longleftrightarrow \mathrm{stCan}(\tau(x)))$$

Lemme 2.2.

Il existe $k_0 \in \omega$ et $k_0 > 2$ tel que $k \in \omega$ et $k \geqslant k_0$ entraînent, pour $\delta = 0$ ou $\delta = 1$,

$$NF \vdash \tau \text{ permutation de } V \longrightarrow$$
$$\big(((x \in SC^{\delta}(NC))^{\tau} \longleftrightarrow \tau_k(x) \in SC^{\delta}(NC))$$
$$((x = |y|)^{\tau} \longleftrightarrow \tau_k(x) = |\tau_{k-1}(x)|)$$
$$((x \in SC^{\delta}(NC))^{\tau} \longrightarrow \tau_k(x) = \tau_{k_0}(x)) \big).$$

Démonstration.

Soit τ une permutation de V. En raison du théorème 1.3., il existe $k_0 \in \omega$ et $k_0 > 2$ tel que $k \in \omega$ et $k \geqslant k_0 - 1$ entraînent

$$(x \in SC^{\delta}(NC))^{\tau} \longleftrightarrow \tau_k(x) \in SC^{\delta}(NC) \qquad (\delta = 0, 1),$$
$$(x = |y|)^{\tau} \longleftrightarrow \tau_k(x) = |\tau_{k-1}(y)|.$$

Si $(x \in NC)^{\tau}$, soit y tel que $(x = |y|)^{\tau}$; alors $k \geqslant k_0 - 1$ entraîne

$$\tau_k(x) = |\tau_{k-1}(y)|,$$
$$= |\{\tau_{k-2}(z) \mid z \in \tau(y)\}|,$$
$$= |\tau(y)| \text{ puisque } \tau_{k-2} \text{ est une permutation de V (1.2.)}$$
$$= \tau_{k_0-1}(x) .$$

Dès lors de $(x \subset NC)^{\tau}$, il découle

$$y \in \tau(x) \rightarrow (y \in NC)^{\tau}$$

et donc, si $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned}\tau_k(x) &= \{\tau_{k-1}(y) \mid y \in \tau(x)\},\\ &= \{\tau_{k_0-1}(y) \mid y \in \tau(x)\},\\ &= \tau_{k_0}(x) \,.\, \rangle\end{aligned}$$

Proposition 2.3.

Il existe $k_0 \in \omega$ tel que pour toute C-formule $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, pour tout n-uple $\langle \delta_1,\dots,\delta_n \rangle$ d'éléments de $\{0,1\}$ et pour tout $k \in \omega$ et $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned}NF \vdash \ &\tau \text{ permutation de } V \longrightarrow\\ &((x_1 \in SC^{\delta_1}(NC) \wedge \dots \wedge x_n \in SC^{\delta_n}(NC) \wedge\\ &\varphi(x_1,\dots,x_n))^{\tau} \longleftrightarrow\\ &(\tau_k(x_1) \in SC^{\delta_1}(NC) \wedge \dots \wedge \tau_k(x_n) \in SC^{\delta_n}(NC) \wedge\\ &\varphi(\tau_k(x_1),\dots,\tau_k(x_n)))).\end{aligned}$$

Démonstration.

Soient le $k_0 > 2$ du lemme 2.2., $k \geqslant k_0$ et $\delta_i = 0$ ou 1 $(i \in \omega)$. Il suffit de démontrer la proposition pour les C'-formules; pour ce faire, on procède par induction sur la longueur de la construction des C'-formules suivant les règles (I), (II), (III) et (IV). Envisageons les différentes possibilités, τ désignant une permutation de V.

(i) Si $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ est une formule stratifiée et si $s_1,\ldots, s_n$ sont les types respectifs de $x_1,\ldots x_n$ dans une stratification telle que $s_1,\ldots,s_n \geqslant k_o$, on a vu 1.3 et 2.2.:

$$(x_1 \in SC^{\delta_1}(NC) \wedge \ldots \wedge x_n \in SC^{\delta_n}(NC) \wedge \varphi(x_1,\ldots, x_n))^{\tau}$$

$$\leftrightarrow (\tau_k(x_1) \in SC^{\delta_1}(NC) \wedge \ldots \wedge \tau_k(x_n) \in SC^{\delta_n}(NC)$$

$$\wedge\, \varphi(\tau_{s_1}(x_1),\ldots, \tau_{s_n}(x_n))),$$

$$\leftrightarrow (\tau_k(x_1) \in SC^{\delta_1}(NC) \wedge \ldots \wedge \tau_k(x_n) \in SC^{\delta_n}(NC)$$

$$\wedge\, \varphi(\tau_k(x_1),\ldots,\tau_k(x_n))).$$

(ii) $(x \text{ cardinal fortement cantorien})^{\tau}$

$$\leftrightarrow (\exists\, y)(\mathrm{stCan}(y) \wedge x = |y|\,)^{\tau},$$

$$\leftrightarrow (\exists\, y)(\mathrm{stCan}(\tau_{k-1}(y)) \wedge \tau_k(x) = |\tau_{k-1}(y)|\,)$$

vu 1.2., 2.1. et 2.2.,

$\leftrightarrow \tau_k(x)$ cardinal fortement cantorien.

(iii) Les cas $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \sigma$ sont immédiats. Il en est de même pour les quantificateurs du fait que τ_k est une permutation de V (1.2.).>

Corollaire 2.4.

Toute sentence qui est une C-formule, est invariante dans NF.

L'axiome de Rosser et l'axiome des ensembles cantoriens sont respectivement équivalents dans NF à

$$(\forall x \in NC)\ (x \in Nn \rightarrow x = T(x)),$$

$$(\forall x \in NC)\ ((x \in WC \wedge x = T(x)) \longrightarrow \text{x cardinal fortement cantorien}),$$

et sont donc des C- formules. En fait, la plupart des sentences concernant uniquement les cardinaux sont des C- formules; il en est ainsi notamment de toutes les sentences relatives aux cardinaux que nous avons considérées, citons par exemple :

$$(\exists x)\ (\ |x| \lneq |USC(x)| \lneq |x|),$$

$$(\exists x)\ (\ |x| \lneq |SC(x)| \lneq |x|\ ),$$

$$(\exists x \in NC\text{-}WC)\ (\ x = T(x)),$$

$$(\forall x \leqslant T(x)\ (\ \Phi(x)\ \text{infini}),$$

$$(\exists x \lneq |USC(V)|\ )\ (\Phi(T(x))\ \text{fini non cantorien}).$$

Ainsi cette dernière sentence est équivalente dans NF à

$$(\exists x \in NC)(\exists y \subset NC)(x \lneq |USC(V)| \wedge y = \Phi(T(x)) \wedge y\ \text{fini} \wedge \neg\, Can(y)).$$

La méthode des permutations exposée au paragraphe 1, ne convient donc pas pour étudier la consistance ou l'indépendance, relativement à NF, de ces sentences.

3. Généralisation des résultats de Scott concernant les individus.

Un individu est un ensemble égal à son singleton. Notons I la sentence exprimant l'existence d'un ensemble dont les éléments sont les individus, c'est-à-dire la sentence

$$(\exists x)(\forall y)(y \in x \longleftrightarrow y = \{y\}).$$

Si T est une extension invariante consistante de NF, elle reste consistante quand on lui ajoute un des axiomes

$$\neg(\exists x)(x = \{x\}),$$

$$(\exists_1 x)(x = \{x\}),$$

$$\neg I ;$$

les deux premiers de ces résultats sont dus à Scott [20] et le troisième à Henson [10] , ils furent tous trois établis grâce à la méthode des permutations. Nous allons maintenant généraliser les deux premiers de ces résultats.

Si les éléments d'un ensemble sont des individus, cet ensemble est évidemment fortement cantorien ; le théorème que nous démontrons montre que la classe des individus, quand elle est un ensemble, jouit d'une grande liberté tout en devant rester fortement cantorien.

<u>Lemme 3.1.</u>

Dans NF, tout ensemble est équipotent à un ensemble ne contenant pas de singleton.

<u>Démonstration.</u>

En raison de la définition du couple de Quine, $\langle V,x\rangle$ est équipotent à V et donc $\langle V,x\rangle$ n'est pas élément de USC(V). Pour tout ensemble a, nous avons par conséquent $\{V\} \times a$ équipotent à a et disjoint de USC(V). $\rangle$

<u>Théorème 3.2.</u>

Soient $\varphi(x)$ une formule stratifiée dont la seule variable libre est x, et T une extension invariante de NF. Alors la consistance de

$$T + (\exists x \text{ cardinal fortement cantorien})\ \varphi(x)$$

entraîne la consistance de

$$T + I + \varphi(|\{x \mid x = \{x\}\}|).$$

Démonstration.

Notons $\bar{\varphi}$ la sentence

$$(\exists x \text{ cardinal fortement cantorien})\, \varphi(x)$$

et supposons que $T + \bar{\varphi}$ soit consistante. $\bar{\varphi}$ est une C-formule et, vu 2.4., est donc invariante. En raison du premier résultat de Scott mentionné plus haut, la théorie

$$T + \bar{\varphi} + \neg(\exists x)(x = \{x\})$$

est consistante, notons T' cette théorie.

Plaçons-nous maintenant dans T'. Vu 3.1., il existe un ensemble a fortement cantorien, disjoint de USC(V) et tel que $\varphi(|a|)$; soit f la fonction de domaine a telle que $f(x) = \{x\}$ pour tout $x \in a$. a étant disjoint de USC(V), $f \cup f^{-1}$ est une permutation de $a \cup USC(a)$; nous pouvons la prolonger en une permutation τ de V en posant $\tau(x) = x$ si $x \notin a \cup USC(a)$. Soit b tel que $\tau(b) = a$. Les τ_k étant des permutations de V (1.2.), on a, pour tout $k \in \omega$,

$$\tau_{k+1}(b) \approx a, \text{ d'où } \varphi(|\tau_{k+1}(b)|) ;$$

du théorème 1.3., il découle alors $\varphi(|b|)^{\tau}$. D'un autre côté, puisque $a \cap USC(V) = \Lambda$ et puisque $\neg(\exists x)(x = \{x\})$, il vient

$$(\forall x)(x \in a \leftrightarrow \tau(x) = \{x\}),$$

c'est-à-dire

$$(b = \{x \mid x = \{x\}\})^{\tau}.$$

Par conséquent

$$(I \wedge \varphi(|\{x \mid x = \{x\}\}|))^{\tau},$$

et on conclut donc grâce au théorème 1.4. de Scott. >
Remarquons que le théorème 3.2. est encore vérifié si nous affaiblissons l'hypothèse

$\varphi(x)$ stratifiée

en la remplaçant par

$\varphi(x)$ C-formule.

Dans la démonstration, seule la conclusion $\varphi(|b|)^{\tau}$ nécessite alors quelques explications supplémentaires : en raison de 2.3., il existe $k_0 \in \omega$ tel que $k \geqslant k_0$ entraînent

$$NF \vdash (x \in NC \wedge \varphi(x))^{\tau} \longleftrightarrow (\tau_k(x) \in NC \wedge \varphi(\tau_k(x))) ;$$

en fixant k suffisamment grand et en posant $\tau_{k+1}(c) = |\tau_k(b)|$, nous avons donc

$$T' \vdash (c = |b|)^{\tau} \text{ et } T' \vdash \varphi(c)^{\tau},$$

d'où

$$T' \vdash \varphi(|b|)^{\tau}.$$

Désignons toujours par T une extension invariante consistante de NF. A partir du théorème précédent, nous pouvons retrouver les résultats de Scott mentionnés plus haut : en prenant pour $\varphi(x)$ la formule $x = 0$, nous avons la consistance de $T + \neg(\exists x)(x = \{x\})$, et en prenant $x = 1$ nous avons la consistance de $T + (\exists_1 x)(x = \{x\})$.

En fait, si $k \in \omega$ et $k > 0$, en considérant la formule

$$(\exists x_1,\dots,x_k)\ (x = |\{x_1,\dots,x_k\}| \wedge (\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq k}} x_i \neq x_j)),$$

on obtient la consistance de

T + il existe exactement k individus.

En raison du théorème de compacité, nous pouvons dès lors ajouter de façon consistante à T, ω constantes c_i et les axiomes

$$\begin{cases} I, \\ c_i = \{c_i\} & (i \in \omega), \\ c_i \neq c_j & (i, j \in \omega \text{ et } i \neq j). \end{cases}$$

De plus, puisque, dans NF + R, Nn et SC(Nn) sont fortement cantoriens, on déduit de 3.2. le

<u>Corollaire 3.3.</u>

Si T est une extension invariante de NF + R, la consistance de T entraîne la consistance de

$$T + I + |\{x \mid x = \{x\}\}| = \aleph_0$$

et de

$$T + I + |\{x \mid x = \{x\}\}| = c,$$

c désignant le cardinal du continu.

4. A propos des ordres totaux définissables sur l'univers.

Dans [3] , Boffa développe une autre méthode liée aux permutations de l'univers, permettant de trouver dans ZF et dans NF des résultats à propos des ensembles définis par une formule stratifiée. Nous allons utiliser cette méthode en considérant une permutation de l'univers qui échange deux individus.

Si f est une fonction, nous définissons la fonction f^* sur $SC(\mathrm{dom}(f))$ par

$$f^*(x) = \{ f(y) \mid y \in x \},$$

et les fonctions $f_{(n)}$ pour $n \in \omega$ par

$$f_{(o)} = f,$$

$$f_{(n+1)} = (f_{(n)})^*.$$

<u>Théorème 4.1.</u> (Boffa [3])

Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule stratifiée et $s_1, \ldots, s_n$ les types respectifs de $x_1, \ldots, x_n$ dans une stratification de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Alors

$$NF \vdash \tau \text{ permutation de } V \longrightarrow$$

$$(\varphi(\tau_{(s_1)}(x_1), \ldots, \tau_{(s_n)}(x_n)) \longleftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

La démonstration de ce théorème se fait par induction sur la longueur de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Soit $\sigma(x,y)$ une formule, les définitions suivantes vont de soi :

$\sigma(x,y)$ connexe et antisymétrique sur V

$$\leftrightarrow ((\forall x',y')((\sigma(x',y') \wedge \sigma(y',x')) \rightarrow x' = y')$$

$$\wedge (\forall x',y')(\sigma(x',y') \vee \sigma(y',x) \vee x' = y')),$$

$\sigma(x,y)$ ordonne totalement V

$$\leftrightarrow (\sigma(x,y) \text{ connexe et antisymétrique sur V}$$

$$\wedge (\forall x',y',z)((\sigma(x',y') \wedge \sigma(y',z)) \rightarrow \sigma(x',z))$$

$$\wedge (\forall x')\, \sigma(x',x')),$$

$\sigma(x,y)$ choisit dans les paires

$$\leftrightarrow ((\forall x',y')(\exists_1 z)(\sigma(\{x',y'\},z))$$

$$\wedge (\forall x',y')(\sigma(\{x',y'\}, x') \vee \sigma(\{x',y'\}, y'))).$$

Remarquons que, si $\sigma(x,y)$ est une formule stratifiée connexe et antisymétrique sur V telle que dans une stratification on ait type x = type y, la formule $\varphi(x,y)$ suivante

$$(\forall u,v)((x = \{u,v\} \wedge \sigma(u,v) \wedge u \neq v) \rightarrow y = u)$$

$$\wedge (\forall u)(x = \{u\} \rightarrow y = u),$$

choisit dans les paires et est stratifiée.

Proposition 4.2.

Soient T une extension invariante et consistante de NF, $\sigma(x,y)$ une formule stratifiée dont les seules variables libres sont x et y. Alors les sentences

$\sigma(x,y)$ ordonne totalement V,

$\sigma(x,y)$ connexe et antisymétrique sur V,

$\sigma(x,y)$ choisit dans les paires

ne sont pas des théorèmes de T.

<u>Démonstration.</u>

En raison de 3.2., la théorie

$$T + (\exists x,y)(x \neq y \wedge x = \{x\} \wedge y = \{y\})$$

est consistante, soit T' cette théorie.
Supposons $T \vdash (\sigma(x,y)$ connexe et antisymétrique sur V) (respectivement $T \vdash (\sigma(x,y)$ choisit dans les paires)).
Plaçons-nous dans T' ; soient a, b deux individus différents et τ la permutation de V échangeant a et b, et laissant fixes les autres ensembles.
Alors, si $k \in \omega$,

$$\tau_{(k)}(a) = b, \tau_{(k)}(b) = a \text{ et } \tau_{(k)}(\{a,b\}) = \{a,b\}.$$

En utilisant 4.1., il vient dès lors

$$\sigma(a,b) \longleftrightarrow \sigma(b,a)$$

(respectivement $\sigma(\{a,b\}, a) \longleftrightarrow \sigma(\{a,b\}, b)$),

et par conséquent a = b.
Ainsi nous obtenons une contradiction dans T'. Notre hypothèse est donc fausse. $\rangle$

<u>Théorème 4.3.</u>

Soient T une extension invariante de NF, $\sigma(x,y)$ une formule dont les seules variables libres sont x et y, et qui est stratifiée lorsque les types de x et y sont égaux et suffisamment grands. Alors

$T \vdash \neg(\sigma(x,y)$ connexe et antisymétrique sur V)

et

$T \vdash \neg(\sigma(x,y)$ ordonne totalement V).

Démonstration.

Si T n'est pas consistante, le théorème est évident. Supposons donc T consistante. Dans les conditions du théorème, la sentence

$\sigma(x,y)$ connexe et antisymétrique sur V

est stratifiée et donc invariante (1.3.), soit φ cette sentence. Si $T \nvdash \neg\varphi$, la théorie $T + \varphi$ serait une extension invariante consistante de NF et donc, vu 4.2., $T + \varphi \nvdash \varphi$; par conséquent $T \vdash \neg\varphi$. >

De même on démontre le

Théorème 4.4.

Soient T une extension invariante de NF, $\sigma(x,y)$ une formule dont les seules variables libres sont x et y, et qui est stratifiée lorsque les types de x et y sont suffisamment grands et lorsque type x = (type y) + 1 . Alors

$T \vdash \neg(\sigma(x,y)$ choisit dans les paires).

Nous pouvons exprimer ces deux derniers théorèmes en terme d'ensemble définissable : par définition, un ensemble a est définissable dans T par la formule $\varphi(x)$ lorsque

$$T \vdash (\forall x)(x = a \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Définissons encore :

$$f \text{ fonction de choix dans les paires} \longleftrightarrow \big(f : 2 \longrightarrow 1$$

$$\wedge (\forall x, y)(f(\{x,y\}) \subset \{x,y\}).$$

<u>Corollaire 4.5.</u>

Soit T une extension invariante de NF. Alors, dans T, il n'existe ni ordre total sur l'univers, ni relation antisymétrique et connexe sur l'univers, ni fonction de choix dans les paires, qui soit définissable par une formule stratifiée ayant une seule variable libre.

<u>Démonstration.</u>

Par exemple, supposons qu'il existe dans T une fonction de choix dans les paires, définissable par une formule stratifiée $\varphi(x)$. Alors, dans T, la formule $\sigma(x, y)$ suivante

$$(\exists z)(\varphi(z) \wedge \langle x, \{y\}\rangle \in z),$$

choisit dans les paires et est stratifiée si les types de x et y sont suffisamment grands et si type x = (type y) + 1, ce qui est impossible (4.4.). $\rangle$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BIRKHOFF, Lattice Theory, A.M.S. Colloq. Publ., 25, New York, 1967.

[2] M. BOFFA, Les ensembles extraordinaires, Bull. Soc. Math. de Belgique, 20 (1968), p.3-15.

[3] M. BOFFA, Stratified Formulas in Zermelo-Fraenkel Set Theory, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Série Math., 19 (1971), p.275-280.

[4] M. BOFFA, Sets equipollent to their power set in NF, J.S.L., 40 (1975), p. 149-150.

[5] C.C. CHANG et H.J. KEISLER, Model Theory, Studies in Logic, North-Holland, 1973.

[6] A. EHRENFEUCHT et A. MOSTOWSKI, Models of axiomatic theories admitting automorphisms, Fund. Math., 43 (1956), p.50-68.

[7] T. FORSTER, Ph. D. Thesis, University of Cambridge, 1976.

[8] C.W. HENSON, Finite sets in Quine's New Foundations, J.S.L., 34 (1969), p. 589-596.

[9] C.W. HENSON, Type-raising operations on cardinal and ordinal numbers in Quine's "New Foundations", J.S.L., 38 (1973), p. 59-68.

[10] C.W. HENSON, Permutation methods applied to Quine's "New Foundations", J.S.L., 38 (1973), p. 69-76.

[11] T. JECH, Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing, Lecture Notes in Math., 217, 1971, Springer-Verlag.

[12] T. JECH, The Axiom of choice, Studies in Logic, North-Holland, 1973.

[13] S. OREY, Formal development of ordinal number theory, J.S.L., 20 (1955), p. 95-104.

[14] S. OREY, New Foundations and the axiom of counting, Duke Math. Journal, 31 (1964), 655-660.

[15] A. PETRY, A propos des individus dans les "New Foundations" de Quine, C.R. Acad. Sc. Paris, 279 série A (1974), p. 623-624.

[16] A. PETRY, Sur l'incomparabilité de certains cardinaux dans les "New Foundations" de Quine, C.R. Acad. Sc. Paris, 281 série A (1975), p. 673-675.

[17] W.V. QUINE, New Foundations for mathematical logic, Am. Math. Monthly, 44 (1937), p. 70-80.

[18] W.V. QUINE, New Foundations for mathematical logic, From a logical point of view, Harvard (1953), p.80-101.

[19] J.B. ROSSER, Logic for mathematicians, McGraw-Hill, 1953.

[20] D. SCOTT, Quine's individuals, Logic, methodology and philosophy of science (E. Nagel et al., Editors), Stanford University Press, Stanford, 1962, p. 111-115.

[21] W. SIERPINSKI, Cardinal and Ordinal Numbers, Warsaw 1965.

[22] E. P. SPECKER, The axiom of choice in Quine's New Foundations for mathematical logic, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 39 (1953), p. 972-975.

[23] A. TARSKI, Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, Fund. Math., 5 (1924), 147-154.

[24] A. TARSKI, Cardinal Algebras, Oxford University Press, 1949.

[25] J. TRUSS, On successors in cardinal arithmetic, Fund-Math. 78 (1973), p. 7-21.

[26] J. TRUSS, Convex sets of cardinals, Proc. London Math. Soc. (3), 27 (1973), p. 577-599.

[27] J. VARLET, Cours de 3me cycle, Liège 1975.

[28] R.L. VAUGHT, Review de [6], J.S.L., 31 (1966), p. 644-645.

* * * *