UNE CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DES STRUCTURES SATISFAISANT LES MEMES SENTENCES STRATIFIEES

André PÉTRY
(Institut Supérieur Industriel Liégeois)

L désigne le langage classique du premier ordre avec égalité, une seule sorte de variable, et dont le seul symbole non logique est $\in$. Rappelons que les formules stratifiées sont les formules de L obtenues en enlevant tous les types dans les formules de la théorie simple des types, la formule étant qualifiée de n-stratifiée si les types enlevés se trouvent parmi les entiers 0, 1, ..., n-1. On donne ici une caractérisation algébrique du fait que deux structures pour le langage L satisfont les mêmes sentences stratifiées ou seulement n-stratifiées.

k représente toujours et indifféremment soit l'ensemble Z des entiers positifs, négatifs ou nuls, soit l'ensemble ω des entiers positifs ou nuls, soit un entier supérieur ou égal à 2; il est convenu que "Z-stratifié" et "ω-stratifié" sont synonymes de "stratifié". Au paragraphe 2, on introduit les k-automorphismes d'une structure (pour le langage L) A; les automorphismes de A et les permutations de l'univers de A existant à l'intérieur de A, supposé être alors un modèle de NF, sont des exemples de ω-automorphismes de A. Etant donné un k-automorphisme f de A, on modifie l'interprétation donnée à $\in$ comme Scott et Henson l'ont déjà fait pour les exemples mentionnés ci-dessus : X est élément de Y dans la structure modifiée, notée A^f, si et seulement si X est élément de f(Y) dans la structure initiale A.
Au paragraphe 3, notre caractérisation s'énonce alors : deux structures satisfont les mêmes sentences k-stratifiées si et seulement si la première a une ultrapuissance M munie d'un k-automorphisme f telle que M^f soit isomorphe

à l'ultrapuissance, modulo le même ultrafiltre, de la seconde. Ceci rappelle le Théorème d'isomorphisme de Keisler-Shelah donnant une caractérisation algébrique du fait que deux structures sont élémentairement équivalentes; ce théorème joue d'ailleurs un rôle essentiel dans la démonstration de la proposition énoncée ci-dessus.
Enfin, au paragraphe 4, on s'intéresse plus particulièrement aux k-automorphismes des modèles de NF.

1. Notations.
Rappelons que k désigne soit Z, soit ω, soit un entier supérieur ou égal à 2, dans les deux premiers cas T et T' désignent tous deux l'ensemble k, dans le troisième cas T est l'ensemble $\{i \in \omega : i < k\}$ et T' est l'ensemble $\{i \in \omega : i < k-1\}$.

Le langage L_k est le langage de la théorie des types à k sortes d'objets, T étant la collection des types de L_k. Dans L_k, on dispose pour chaque i dans T d'une sorte de variable x^i, y^i, z^i ... et pour chaque i dans T' d'un symbole $\in_i$; les formules de L_k sont obtenues en utilisant les signes logiques habituels au départ des formules atomiques de la forme

$$x^i = y^i, \; x^j \in_j y^{j+1}$$

i variant dans T et j dans T'. Une structure pour le langage L_k est par conséquent de la forme

$$< A_i : i \in T \;, \;\; R_j : j \in T' > \;\; ,$$

R_j étant une partie de $A_j \times A_{j+1}$. Une formule φ de L est donc k-stratifiée si et seulement s'il existe une formule Ψ de L_k tel que φ soit obtenue en enlevant tous les indices de type dans Ψ, étant entendu que des variables différentes de L_k sont remplacées par des variables différentes de L; l'assignation qui à chaque variable de φ associe le type de la variable correspondante de Ψ est appelée une k-stratification de φ.
Si i est un entier supérieur ou égal à 2, rappelons que NF_i est la théorie de langage L dont les axiomes non logiques sont les axiomes non logiques i-stratifiés de NF.

2. <u>k-automorphismes</u>.

Soit $\mathcal{A} = \langle A,R\rangle$ une structure pour le langage L. Un k-automorphisme f de $\mathcal{A}$ est une permutation de A pour laquelle il existe une famille $\langle f_i : i \in T' \rangle$ de permutations de A telles que :

- f_o coïncide avec f,
- aRb soit équivalent à $f_i(a)\, R\, f_{i+1}(b)$ quels que soient a,b dans A et i,i+1 dans T'.

Cette définition rappelle celle d'un isomorphisme glissant d'une structure pour le langage L_ω (Specker [13]), en fait un ω-automorphisme de $\mathcal{A}$ n'est rien d'autre qu'un isomorphisme glissant de la structure $\langle A_i : i \in \omega, R_i : i \in \omega\rangle$ où les A_i coïncident tous avec A et les R_i avec R.

Exemples.

Tout automorphisme de $\mathcal{A}$ est un ω-automorphisme et même un Z-automorphisme de $\mathcal{A}$. Un autre exemple de ω-automorphisme nous est donné par les permutations de l'univers d'un modèle de NF existant à l'intérieur de ce modèle; supposons que $\mathcal{A}$ soit un modèle de NF et qu'il existe un élément p de A tel que, dans $\mathcal{A}$, p soit une permutation de l'univers V (V est défini comme étant l'ensemble $\{x : x = x\}$). Plaçons-nous à l'intérieur de $\mathcal{A}$ et raisonnons dans NF : nous définissons, de proche en proche et pour chaque i dans ω, une fonction p_i en posant

$$p_o = p,$$

$$p_{i+1} = \{\langle x,y\rangle : y = \{p_i(z) : z \in x\}\},$$

dès lors, les p_i sont des permutations de V et

$$(\forall x,y)(x \in y \leftrightarrow p_i(x) \in p_{i+1}(y)).$$

Par conséquent, la fonction p, regardée de l'extérieur de $\mathcal{A}$, nous donne un ω-automorphisme de $\mathcal{A}$. Comme on le constate plus loin, cet ω-automorphisme n'est pas en général un Z-automorphisme. Les deux exemples que nous venons de donner, ont permis d'obtenir de nombreux résultats de consistance relative concernant NF. La méthode utilisant un automorphisme est due à Henson, elle a permis d'obtenir des résultats de consistance relative à propos des ensembles finis de NF (Henson [7]) et ensuite des nombres cardinaux de NF (Pétry [11]). La méthode utilisant une permutation de l'univers a été utilisée pour la première fois par Scott ([12]) et par la suite par Boffa ([1]), Henson ([8]), Hinnion ([9]) et Pétry ([10]). Ces deux méthodes consistent toutes deux à modifier l'interprétation donnée à $\in$ comme on va le faire maintenant pour un k-automorphisme quelconque.

Supposons que f soit un k-automorphisme de A. On définit la relation R^f sur A par :

$$a\ R^f\ f \Leftrightarrow a\ R\ f(b) \qquad \text{(pour tout a,b dans A) ;}$$

la structure A modifiée par f est la structure $< A,R^f >$ et est notée A^f. Soit $< f_i : i \in T' >$ la famille de permutations de A satisfaisant la définition du k-automorphisme f. De proche en proche, on définit la fonction $f_{(i)}$ pour chaque i dans T de telle sorte que :

- $f_{(o)}$ soit la fonction identité restreinte à A,
- $f_{(i+1)} = f_i \cdot f_{(i)}$ si i,i+1 sont $\geqslant 0$ et dans T,
- $f_{(i-1)} = f_{i-1}^{-1} \cdot f_{(i)}$ si i,i-1 sont $\leqslant 0$ et dans T.

Les $f_{(i)}$ sont des permutations de A et, pour tout i dans T', on a

$$f_{(i+1)} = f_i \cdot f_{(i)} .$$

Proposition.

Soient $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ une formule k-stratifiée, $t_1,\dots,t_n$ les types respectifs de $x_1,\dots,x_n$ dans une k-stratification de $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, et $a_1,\dots,a_n$ des éléments de A. Alors

$$A^f \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$$

si et seulement si

$$A \models \varphi[f_{(t_1)}(a_1),\dots,f_{(t_n)}(a_n)] .$$

En particulier A et A^f satisfont les mêmes sentences k-stratifiées.

Démonstration.

Si i et i+1 sont dans T', on sait :

$$(\star) \qquad a\ R\ b \Leftrightarrow f_i(a)\ R\ f_{i+1}(b) \qquad \text{(a,b dans A),}$$

d'où également

$$(\star\star) \qquad a\ R\ b \iff f_i^{-1}(a)\ R\ f_{i+1}^{-1}(b) \qquad (a,b \text{ dans } A).$$

Soient a,b fixés dans A. Il vient :

$$a\ R^f\ b \iff f_{(o)}(a)\ R\ f_{(1)}(b)\ ,$$

$$a\ R^f\ b \iff f_o f_{(o)}(a)\ R\ f_1 f_{(1)}(b)\ ,$$

c'est-à-dire

$$a\ R^f\ b \iff f_{(1)}(a)\ R\ f_{(2)}(b)\ ;$$

en appliquant de la sorte successivement $(\star)$, on obtient pour chaque $i \geqslant 0$ et dans T' :

$$a\ R^f\ b \iff f_{(i)}(a)\ R\ f_{(i+1)}(b)\ .$$

Cette relation est encore vérifiée pour $i \leqslant 0$ et dans T', en effet

$$a\ R^f\ b \iff f_{-1}^{-1}(a)\ R\ b \quad \text{vu } (\star\star)\ ,$$

c'est-à-dire

$$a\ R^f\ b \iff f_{(-1)}(a)\ R\ f_{(o)}(b)\ ,$$

et ainsi de suite en utilisant successivement $(\star\star)$.
La proposition est donc vérifiée pour la formule atomique "$x \in y$", elle l'est aussi pour "$x = y$", on conclut dès lors en procédant par induction sur la longueur de $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. □

Corollaire.
Soit $\varphi(x)$ une formule stratifiée ayant une seule variable libre. S'il existe un et un seul élément de A satisfaisant $\varphi(x)$ dans A, cet élément est un point fixe de tout Z-automorphisme de A.

Démonstration.
On peut trouver une Z-stratification de $\varphi(x)$ accordant à "x" le type 0 et donc aussi une autre accordant le type 1. Par conséquent, quel que soit le Z-automorphisme f, $A \models \varphi[a]$ et $A \models \varphi[f(a)]$ sont tous deux équivalents à $A^f \models \varphi[a]$ et donc équivalents entre eux. □

Par exemple l'univers V, l'ensemble vide Λ sont des points fixes de tout Z-automorphisme d'un modèle de NF_2. Le corollaire nous montre aussi qu'en général une permutation de l'univers existant à l'intérieur d'un modèle de NF n'est pas un Z-automorphisme mais est seulement un ω-automorphisme.

Désignons par Ext l'axiome d'extensionnalité

$$(\forall x,y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \ ,$$

et par Singl la sentence

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z = x)$$

exprimant que le singleton de tout ensemble x (noté $\{x\}$) existe. Soit f une permutation de A. D'une part, si $A \models$ Ext, il existe au plus une seule permutation g de A telle que, pour tout a,b dans A,

$$a \ R \ b \Leftrightarrow f(a) \ R \ g(b).$$

D'autre part, si $A \models$ Singl, il existe au plus une seule permutation h de A telle que, pour tout a,b dans A,

$$a \ R \ b \Leftrightarrow h(a) \ R \ f(b),$$

en effet, si h est une telle permutation et si $A \models c = \{d\}$, alors $A \models f(c) = \{h(d)\}$, l'unicité découle dès lors de Singl. On en déduit :

Remarque.
Si les sentences Ext et Singl sont satisfaites dans A, la famille $\langle f_i : i \in T' \rangle$ intervenant dans la définition d'un k-automorphisme f est univoquement déterminée par f.

3. Théorème.
Deux structures A, B pour le langage L satisfont les mêmes sentences k-stratifiées si et seulement si il existe un ultrafiltre D et un k-automorphisme f de l'ultrapuissance $\Pi_D A$ tels que l'ultrapuissance $\Pi_D B$ soit isomorphe à $(\Pi_D A)^f$.

Démonstration.

La condition suffisante découle de la Proposition. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfaisant les mêmes sentences k-stratifiées. Quelle que soit la structure $\mathcal{M} = \langle M,E \rangle$ pour le langage L, notons $\mathcal{M}^\star$ la structure $\langle M_i : i \in T, E_j : j \in T' \rangle$ où les M_i, E_j coïncident tous respectivement avec M,E. Dès lors $\mathcal{A}^\star$ et $\mathcal{B}^\star$ sont deux structures élémentairement équivalentes (pour le langage L_k). Le Théorème d'isomorphisme de Keisler-Shelah ([4] , 6.1.15) selon lequel deux structures sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles ont des ultrapuissances (modulo le même ultrafiltre) isomorphes, est aussi vérifié pour le langage à plusieurs sortes d'objets L_k. Il existe donc un ultrafiltre D tel que les ultrapuissances $\Pi_D(\mathcal{A}^\star)$ et $\Pi_D(\mathcal{B}^\star)$ soient isomorphes, soit $\langle F_i : i \in T \rangle$ l'isomorphisme de $\Pi_D(\mathcal{A}^\star)$ sur $\Pi_D(\mathcal{B}^\star)$. Les ultrapuissances $\Pi_D(\mathcal{A}^\star)$ et $\Pi_D(\mathcal{B}^\star)$ coïncident respectivement avec $(\Pi_D\mathcal{A})^\star$ et $(\Pi_D\mathcal{B})^\star$. Notons $\mathcal{C} = \langle C,P \rangle$ l'ultrapuissance $\Pi_D\mathcal{A}$ et $\mathcal{D} = \langle G ,Q \rangle$ l'ultrapuissance $\Pi_D\mathcal{B}$. Soient a,b des éléments quelconques de C. Pour tout i dans T', on a :

(1) $$a \; P \; b \iff F_i(a) \; Q \; F_{i+1}(b) \; .$$

Considérons la famille $\langle f_i : i \in T' \rangle$ définies par :

(2) $$f_i = F_{i+1}^{-1} \, . \, F_i \; .$$

Les f_i sont des permutations de C et, si i et i+1 sont dans T', il découle de (1) :

$$a \; P \; b \iff f_i(a) \; P \; f_{i+1}(b) \; ;$$

f_o est donc un k-automorphisme de $\mathcal{C}$. De plus, vu (1),

$$a \; P^{f_o} \; b \iff F_o(a) \; Q \; F_1 f_o(b) ,$$

c'est-à-dire, vu (2),

$$a \; P^{f_o} \; b \iff F_o(a) \; Q \; F_o(b) \; ;$$

F_o est donc un isomorphisme de $\mathcal{C}^{f_o}$ sur $\mathcal{D}$. □

4. k-automorphismes des modèles de NF.

Dans ce paragraphe, on suppose NF consistant et $\mathcal{A}$ désigne un modèle quelconque de NF.

Si f est 4-automorphisme de A, A^f est aussi un modèle de NF. En effet A et A^f satisfont alors les mêmes sentences 4-stratifiées et on sait que $NF = NF_4$ (Grišin [6]). Celà n'est pas vrai pour un 3-automorphisme quelconque. En effet, il n'existe pas de théorie 3-stratifiée consistante impliquant NF (Boffa [2]), donc on peut trouver B satisfaisant les mêmes sentences 3-stratifiées que A et n'étant pas un modèle de NF; en appliquant alors le Théorème, on obtient une ultrapuissance de A, soit C, qui est bien entendu un modèle de NF et qui possède un 3-automorphisme g tel que C^g ne soit pas un modèle de NF.

Si AI désigne une version 3-stratifiée de l'axiome de l'infini (par exemple l'axiome C1 de [5]), la théorie $NF_3 + \neg AI$ est consistante, celà résulte de ce que les théorèmes 3-stratifiés de NF_3 coïncident avec les théorèmes de TT_3^∞ (Boffa-Crabbé [3]) mais comme on le remarque dans [3] , tous les modèles de NF_2 satisfont les mêmes sentences 2-stratifiées. Par conséquent, en appliquant le Théorème, nous obtenons une ultrapuissance C de A munie d'un 2-automorphisme qui n'est pas un 3-automorphisme (les 2-automorphismes d'une structure coïncident simplement avec les permutations de l'univers de cette structure).

En considérant les permutations de l'univers V de A existant à l'intérieur de A, on a déjà remarqué qu'il existe de nombreux ω-automorphismes de A qui ne sont pas des Z-automorphismes. Pour terminer, montrons que les Z-automorphismes sont réellement plus généraux que les automorphismes. Plus précisément, si nous désignons par S l'ensemble de toutes les formules stratifiées satisfaites dans A, il existe des sentences φ et Ψ de L telles que :

- $S + \varphi$ et $S + \Psi$ soient consistants,
- quels que soient le modèle M de $S + \varphi$ et l'automorphisme f de M, Ψ ne soit pas satisfait dans M^f

(en raison du Théorème, celà est faux pour les Z-automorphismes). Dans NF un individu est un ensemble égal à son singleton; soient φ la sentence de L exprimant qu'il n'existe pas d'individu et Ψ la sentence de L exprimant qu'il existe un et un seul individu, φ et Ψ sont évidemment non stratifiés. La théorie $S + \varphi$ est consistante (Scott [12] , Henson [8]) et la théorie

$S + \Psi$ est aussi consistante (Pétry [10]), soient M un modèle de $S + \varphi$ et f un automorphisme de M. f est aussi un automorphisme de M^f; par conséquent, si a est le seul individu de M^f, a = f(a). Or, en raison de la Proposition, $M^f \models a = \{a\}$ est équivalent à $M \models f(a) = \{a\}$; par suite $M^f \models \Psi$ impliquerait $M \not\models \varphi$.

Références.

[1] Boffa M., Entre NF et NFU, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (série A), vol. 277 (1973), p. 821-822.

[2] Boffa M., On the axiomatization of NF, Colloque Internationl de Logique, Clermont-Ferrand 1975, Colloques internationaux du C.N.R.S. n° 249.

[3] Boffa M. et Crabbé M., Les théorèmes 3-stratifiés de NF_3, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (série A), vol. 280 (1975), p. 1657-1658.

[4] Chang C.C. et Keisler H.J., Model Theory, North-Holland, 1973.

[5] Gödel K., The consistency of the continuum hypothesis, Princeton, 1940.

[6] Grišin V., Equivalence du système NF de Quine avec l'un de ses fragments (en russe), Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsiya, série 2, n° 1 (1972), p. 22-24.

[7] Henson C.W., Finite sets in Quine's New Foundations, Journal of Symbolic Logic, 34 (1969), p. 589-596.

[8] Henson C.W., Permutation methods applied to Quine's "New-Foundations", Journal of Symbolic Logic, 38 (1973), p. 69-76.

[9] Hinnion R., Trois résultats concernant les ensembles fortement cantoriens dans les "New-Foundations" de Quine, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (série A), vol. 279 (1974), p. 41-44.

[10] Pétry A., A propos des individus dans les "New-Foundations" de Quine, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (série A), vol. 279 (1974), p. 623-624.

[11] Pétry A., On cardinal numbers in Quine's New Foundations, Set Theory and Hierarchy Theory, Bierutowice, Lecture Notes in Mathematics, vol. 619, Springer-Verlag, 1977, p. 241-250.

[12] Scott D., Quine's individuals, Logic, methodology and philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford, 1962, p. 111-115.

[13] Specker E., Typical Ambiguity, Logic, methodology and philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford, 1962, p. 116-124.

47, rue J. Stiernet,
4252 Omal-Geer (Belgique).