LA THÉORIE DES TYPES DE RUSSELL ET WHITEHEAD

INTRODUCTION A LA THEORIE DES TYPES

On sait que la théorie des types est destinée à résoudre un certain nombre de paradoxes, paradoxes qui ont trait à des objets de nature diverse : propositions, classes, relations, nombres cardinaux, etc. Du point de vue des mathématiques, cependant,les paradoxes les plus importants sont ceux qui ont trait à des fonctions propositionnelles ; d'une part, c'est en termes de fonctions propositionnelles que sont définies les notions de classe, de relation, de nombre cardinal, etc. ; d'autre part, il est clair que les propositions comme telles n'ont qu'un intérêt indirect pour les mathématiques.

Ramsey a réparti les paradoxes en deux groupes, qu'il appelle le groupe A et le groupe B. Le groupe A contient les paradoxes dits "logiques" ; ces paradoxes sont appelés ainsi parce qu'ils peuvent être énoncés exclusivement à l'aide de termes logiques ou mathématiques ; au groupe A appartient par exemple le paradoxe "de la propriété imprédicable", paradoxe dû à Russell. Le groupe B contient les paradoxes que Ramsey appelle "épistémologiques" et qu'on préfère appeler aujourd'hui "paradoxes sémantiques" ; ces paradoxes ne peuvent pas être énoncés exclusivement à l'aide de termes logiques ou mathématiques ; leur formulation nécessite en outre des termes qui font référence au langage ou au symbolisme, ou encore à des contenus de pensée non spécifiquement logiques ; au groupe B appartient par exemple le paradoxe "de l'adjectif hétérologique", paradoxe dû à Grelling.

La division introduite par Ramsey entraîne une distinction correspondante à l'intérieur de la théorie des types. La théorie simple des types aura pour objet de résoudre les paradoxes logiques ; la théorie ramifiée des types, appelée aussi "théorie des ordres" aura pour objet de résoudre les paradoxes sémantiques.

Dans les Principia Mathematica, Russell et Whitebead développent l'idée que les paradoxes résultent tous d'un même cercle vicieux. Les paradoxes, en effet, ont trait à des ensembles qui forment ce que Russell et Whitehead appellent des totalités illégitimes. Un ensemble, diront-ils, forme une totalité illégitime lorsque cet ensemble est tel qu'il ne peut pas être déterminé ("well-defined") à partir des éléments qui le composent, étant donné qu'il contient lui-même des éléments qui présupposent pour leur détermination la totalité des éléments de l'ensemble.

Considérons, pour commencer, à titre d'exemple, le cas d'une totalité illégitime qui sera susceptible d'être éliminée par la théorie simple des types. L'ensemble des valeurs d'une fonction propositionnelle telle que ϕx forme une totalité. Supposons maintenant que la fonction ϕx soit considérée, à son tour, comme une des valeurs de la variable x. Il n'est pas difficile de voir que, dans ces conditions, l'ensemble des valeurs de ϕx forme une totalité illégitime. En effet, une fonction propositionnelle n'est déterminée que si on détermine préalablement quelle est la totalité de ses valeurs (1). Mais ceci, à son tour, implique, dans le cas de la fonction ϕx, qu'on ait d'abord déterminé quelle est la totalité des valeurs de la variable x. Or c'est ce qui est impossible si, comme nous le supposons, la fonction ϕx est elle-même un élément de la totalité des valeurs de la variable x.

Considérons d'autre part, toujours à titre d'exemple, le cas d'une totalité illégitime qui sera susceptible d'être éliminée par la théorie ramifiée des types. L'ensemble des propositions forme une totalité. Mais cette totalité contient elle-même des propositions qui se réfèrent à la totalité des propositions. Tel est le cas par exemple de la proposition "Toutes les propositions sont vraies ou fausses". Une telle proposition n'est déterminée que si on détermine préalablement quelle est la totalité des propositions auxquelles la proposition se réfère. Mais cela précisément est impossible, puisque la proposition est elle-même un élément de la totalité des propositions.

Que les paradoxes résultent tous d'un même cercle vicieux, et plus particulièrement de la supposition qu'il existe des totalités illégitimes, cette idée, Russell et Whitehead l'ont reprise à Poincaré. En effet, Poincaré considère qu'il faut chercher la source commune des paradoxes dans le fait que tous les paradoxes reposent sur ce qu'il appelle des définitions non prédicatives, définitions que Poincaré juge illégitimes parce que circulaires. Selon Poincaré, une définition est non prédicative lorsqu'elle définit un objet par référence à des ensembles dont l'existence, à son tour, dépend de l'objet à définir.

A partir de ce qui précède, il est clair que le principe qui nous permettra de résoudre les paradoxes est celui-là même qui nous permettra d'éliminer les totalités illégitimes. Ce principe, que Russell et Whitehead appellent "principe du cercle vicieux", peut être énoncé comme suit : "Ce qui implique une référence à tous les membres d'une collection, ne peut pas être lui-même un des membres de la collection".

---

(1) *Cela résulte du fait qu'une fonction propositionnelle est définie par cela qu'elle représente n'importe quel objet appartenant à un domaine d'objets, le domaine des valeurs de la fonction : ainsi, par exemple, la fonction ϕx représente, au choix, un des objets ϕa, ϕb, ϕc, etc., objets qui seront considérés comme les valeurs de la fonction ϕx (Exemple d'une fonction proportionnelle : "x est un homme").*

LA THEORIE SIMPLE DES TYPES.

La théorie simple des types repose sur un certain nombre de clauses. Ces clauses tantôt découlent directement d'une application du principe du cercle vicieux, à savoir qu'une fonction ne peut pas prendre comme argument une entité qui présuppose elle-même la fonction, tantôt résultent d'un examen des conditions auxquelles une fonction doit satisfaire pour être signifiante, c'est-à-dire pour former avec un argument un tout doué de signification. Ces clauses sont les suivantes :

(1) Une fonction ne peut pas prendre comme argument une entité qui contient ("involves") la fonction elle-même. En particulier, une fonction ne peut pas se prendre elle-même comme argument ;

(2) Une fonction ne peut pas prendre comme argument une entité qui peut être dérivée de la fonction;

(3) (Appelons "arguments possibles d'une fonction" les arguments avec lesquels une fonction forme à chaque fois un tout doué de signification). Une fonction F ne peut pas prendre comme argument une fonction G qui aurait parmi ses arguments possibles un des arguments possibles de la fonction F ; la fonction F ne pourra pas non plus prendre comme argument une entité qui serait dérivable de la fonction G ;

(4) Si une fonction est un argument possible d'une fonction F, alors une entité qui n'est pas une fonction n'est pas un argument possible de la fonction F. Inversement, si une entité qui n'est pas une fonction est un argument possible d'une fonction F, alors une fonction n'est pas un argument possible de la fonction F.

Désignons par '$\phi\hat{x}$' la fonction dont les valeurs sont de la forme ϕx; '$\phi\hat{x}$' désigne alors la fonction elle-même par opposition à une quelconque de ses valeurs. Utilisant cette notation, nous pouvons illustrer les trois premières clauses de la manière suivante. En vertu de la clause (1), la fonction $\phi\hat{x}$ ne peut pas prendre la fonction $\phi\hat{x}$ comme argument ; l'entité $\phi(\phi\hat{x})$ ne peut donc pas être considérée comme une des valeurs de la fonction $\phi\hat{x}$; la clause (1) a donc en particulier comme effet de rejeter une expression telle que '$\phi(\phi\hat{x})$', cette expression étant considérée comme dépourvue de sens. La clause (2) aura comme effet de rejeter, comme étant également dépourvues de sens, des expressions telles que $\phi(\phi\hat{x}.\ \phi\hat{x})$, $\phi(\phi\hat{x} \vee \psi\hat{x})$. Enfin, la clause (3) aura comme effet de rejeter de même des expressions telles que $\phi(\psi\hat{x})$, $\phi(\psi\hat{x}.\ \psi\hat{x})$.

Il est clair, à partir de ce qui précède, que les fonctions qui ont un argument possible en commun ne sont pas susceptibles d'être des arguments les unes pour les autres, et que ces fonctions, à leur tour, ne peuvent pas avoir d'argument possible en commun avec les fonctions dont elles sont elles-mêmes des arguments. Nous sommes ainsi amenés à introduire une hiérarchie, une <u>distinction de niveaux</u>, dans les domaines des entités susceptibles d'être des fonctions ou des arguments de fonction :

Le <u>premier niveau</u> de la hiérarchie comprendra les entités qui ne sont pas des fonctions, mais qui sont des arguments possibles de fonction. On appellera ces entités des individus (1);

Le <u>deuxième niveau</u> de la hiérarchie est alors formé des fonctions dont les arguments possibles, et les seuls arguments possibles, sont les entités du premier niveau. Les fonctions du deuxième niveau sont donc ce qu'on peut appeler des <u>fonctions d'individu</u>;

Le <u>troisième niveau</u> de la hiérarchie réunira de nouvelles fonctions, distinctes des précédentes, à savoir les fonctions dont les arguments possibles, et les seuls arguments possibles, sont les entités du deuxième niveau. Les fonctions du troisième niveau sont donc ce qu'on peut appeler <u>des fonctions de fonction d'individu</u>. Et ainsi de suite.

Remarquons, pour commencer, que, en vertu de la hiérarchie des niveaux, toutes les fonctions d'un même niveau ont comme seuls arguments possibles les entités du niveau immédiatement inférieur. Une fonction ne peut donc pas prendre comme argument une entité qui, bien que d'un niveau inférieur à celui de la fonction, ne serait pas du niveau immédiatement inférieur à celui de la fonction. Et cela se comprend. En effet, supposons, par exemple, que les fonctions de fonction de fonction d'individu puissent également prendre comme arguments des fonctions d'individu. Mais les fonctions d'individu sont les arguments possibles des fonctions de fonction d'individu. Les fonctions de fonction de fonction d'individu auraient donc des arguments possibles en commun avec les fonctions de fonction d'individu. Or cela contredirait la clause (3), puisque les fonctions de fonction d'individu sont elles-mêmes des arguments possibles des fonctions de fonction de fonction d'individu.

Remarquons, d'autre part, que, dans la hiérarchie des niveaux, toutes les fonctions d'un même niveau sont distinctes de toutes les fonctions de tous les autres niveaux. Il n'est pas difficile de voir pourquoi. En effet, si on pouvait situer une même fonction à différents niveaux —— comme il semble d'ailleurs naturel de le faire dans le cas, par exemple, de la propriété "<u>imprédicable</u>" (voir plus loin le paradoxe de Russell) ——, rien n'interdirait de considérer la fonction, située à un niveau inférieur, comme un argument possible de la <u>même</u> fonction située à

(1) *Il est à noter que les individus au sens de la théorie ramifiée des types ne sont pas nécessairement des individus au sens de la théorie simple des types. Selon cette dernière théorie, un individu est une entité définie négativement par cela qu'elle n'est pas une fonction ; au sens de la théorie ramifiée des types, nous le verrons, un individu est toute entité susceptible d'être sujet dans une proposition atomique.*

un plus haut niveau, ce qui contredirait la clause (1).

Introduisons maintenant la notion de <u>type</u>. On appelle "<u>type</u>" l'ensemble de tous les arguments possibles d'une fonction, c'est-à-dire l'ensemble de tous les arguments avec lesquels une fonction forme à chaque fois un tout doué de signification.

De ce qu'un type est l'ensemble de tous les arguments possibles d'une fonction, il suit évidemment qu'un type est l'ensemble de tous les arguments possibles de toutes les fonctions qui ont les mêmes arguments possibles. Il est clair, à partir de là, que les individus forment un type. En effet, les individus sont les seuls arguments possibles des fonctions d'individu, et les fonctions d'individu ont toutes les mêmes arguments possibles(1). On appellera le type auquel appartiennent les individus, le <u>type</u> 0. Pour des raisons analogues, il est clair que les fonctions d'individu forment un type. On appellera le type auquel appartiennent les fonctions d'individu, le <u>type</u> 1. Et ainsi de suite.

On peut résumer la théorie simple des types en disant que cette théorie introduit entre les fonctions et arguments de fonction une hiérarchie fondée sur une distinction de <u>types</u>, hiérarchie en vertu de laquelle

1) toute entité — fonction ou argument de fonction — appartient à un type déterminé, qui est unique pour l'entité, et

2) aucune fonction ne peut prendre comme argument une entité dont le type n'est pas immédiatement inférieur à celui de la fonction.

Il existe une différence fondamentale entre la hiérarchie des types et celle que nous étudierons plus loin, la hiérarchie des ordres. La hiérarchie des types, en effet, est fondée essentiellement sur la nature même des objets : si une fonction rejette certains arguments pour en adopter d'autres, cela tient à la signification même de la fonction ainsi qu'à la signification des arguments. La hiérarchie des ordres, au contraire, nous le comprendrons mieux plus loin, est essentiellement relative à la manière même dont nous nous référons aux objets.

---

(1) *Russell et Whitehead considèrent que deux fonctions ont tous leurs arguments possibles en commun ou bien n'ont aucun argument possible en commun. Ce principe est omniprésent dans la théorie simple des types, et c'est lui qui en particulier permet de comprendre la portée de la clause (3). En effet, si la fonction F et la fonction G ont un argument possible en commun, ces fonctions auront tous leurs arguments possibles en commun. Dans ces conditions, tout ce qui rend la fonction F signifiante rendra la fonction G signifiante, et inversement. Or, la fonction F n'est pas signifiante avec comme argument la fonction F elle-même. D'où il suit alors que la fonction F n'est pas signifiante non plus avec la fonction G comme argument.*

Voyons, pour terminer, comment la théorie simple des types permet de résoudre le paradoxe dit "de la propriété imprédicable". Ce paradoxe est plus connu sous une autre formulation, une formulation en termes de classes : le paradoxe a trait alors, non plus à "la propriété imprédicable", mais à "la classe des classes qui ne se contiennent pas elles-mêmes".

Le paradoxe "de la propriété imprédicable" peut être énoncé comme suit :

Il arrive qu'une propriété puisse être attribuée à elle-même ; par exemple, la propriété d'être abstrait, au sens d'être un objet possible pour la pensée, est elle-même abstraite en ce sens ; appelons de telles propriétés, des propriétés prédicables. Par opposition, on appellera "imprédicable" une propriété qui ne peut pas être attribuée à elle-même ; par exemple, la propriété d'être concret, au sens d'être un objet possible des sens, n'est pas elle-même, concrète en ce sens. La question qu'on peut alors se poser est celle de savoir si la propriété "imprédicable",elle-même, est ou non imprédicable. Or, si la propriété imprédicable est imprédicable, elle ne peut pas être attribuée à elle-même,et, partant, elle est prédicable ; si, au contraire, la propriété imprédicable n'est pas imprédicable, elle peut être attribuée à elle-même, et, partant, elle est imprédicable.

La théorie simple des types permet de résoudre le paradoxe de Russell en montrant que la formulation de ce paradoxe n'est pas conforme aux exigences de la hiérarchie des types. En effet, quel que soit le type auquel appartient la propriété "imprédicable", cette propriété appartient à un type déterminé, et ce type est unique pour la propriété. Or, il n'est pas permis de prendre comme argument d'une fonction une entité du même type que la fonction.

LA THEORIE SIMPLE DES TYPES ET LE SYSTEME DES PRINCIPIA MATHEMATICA

Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead appliquent un principe qu'ils appellent "principe de l'ambiguïté systématique", principe en vertu duquel on convient de ne pas indiquer le type des symboles qui occurrent dans une formule, ceci afin de pouvoir préserver le caractère de généralité des lois mathématiques.

C'est ainsi qu'on écrira "$\psi x \vee \sim\phi x$" sans donc spécifier à quel type appartient la propriété ϕ. L'idée n'est pas que ϕ tient lieu ici de n'importe quelle propriété de n'importe quel type, mais bien de n'importe quelle propriété du type 1, ou de n'importe quelle propriété du type 2, et ainsi de suite. L'idée est donc que la formule fonctionne en quelque sorte comme un schéma et tient lieu ainsi d'un nombre indéfini de formules, les formules "$\phi_1 x \vee \sim \phi_1 x$", "$\phi_2 x \vee \sim \phi_2 x$", et ainsi de suite.

Est-ce à dire maintenant qu'on va pouvoir élaborer le système des Principia Mathematica sans avoir à faire intervenir la théorie simple des types ? Plus exactement, sans avoir à faire intervenir d'autres conditions que celles qui lient par exemple une formule telle que "$\phi_1 x \vee \sim \phi_1 x$", à savoir que dans cette formule il convient que x soit d'un type immédiatement inférieur à celui de ϕ_1, et donc du type 0 ? La question n'est pas aussi simple que cela. Nous avons, en effet, à tenir compte des rapports de type qui lient dans une même formule les différentes fonctions qui interviennent dans cette formule. Regardons cela de plus près.

Considérons d'abord un exemple. Supposons que la fonction ϕx soit signifiante pour un argument x du type n ; supposons, d'autre part, que la fonction ψx soit signifiante pour un argument x du type n + 1. De ces suppositions il ne suit d'aucune manière que la fonction "$\phi x \vee \psi x$" soit elle-même signifiante. Au contraire. Si x est du type n, il ne peut pas rendre ψx signifiant, et, partant, il ne peut pas rendre "$\phi x \vee \psi x$" signifiant ; si x est du type n + 1, il ne rendra signifiant, de même, que ψx; et si x est d'un tout autre type que n ou n + 1, il ne rendra ni ϕx ni ψx signifiants. Ainsi, pour que la fonction "$\phi x \vee \psi x$" soit signifiante, il convient que les fonctions ϕx et ψx aient les mêmes types d'arguments. Par conséquent, pour que la fonction "$\phi x \vee \psi x$" puisse intervenir dans un système de logique, il faudra qu'elle soit accompagnée de la clause que les fonctions ϕx et ψx ont des arguments qui sont du même type, sans quoi la fonction globale devra être considérée comme non signifiante, et donc finalement comme non existante.

Voyons comment la théorie simple des types intervient dans un système de logique tel que le calcul des fonctions propositionnelles élémentaires.

Pour définir la notion de fonction propositionnelle élémentaire, partons de la notion de proposition atomique. Une proposition atomique est une proposition qui n'est composée d'aucune autre proposition et qui ne contient aucune variable. Une proposition moléculaire est un complexe de propositions atomiques construit à l'aide de connecteurs logiques. Une proposition élémentaire est une proposition atomique ou moléculaire. Une fonction propositionnelle élémentaire est une expression qui contient une ou plusieurs variables et qui est telle que lorsqu'on attribue à ces variables des valeurs déterminées, l'expression représente une proposition élémentaire. Sont donc des fonctions propositionnelles élémentaires, les expressions "p", "q", "r", etc. Sont également des fonctions propositionnelles élémentaires, les expression "ϕx", "ψx", "ϕy", etc. Les premières expressions sont des fonctions qui ont des propositions comme arguments ;les secondes expressions sont des fonctions qui ont comme arguments des sujets ou constituants de propositions atomiques. Dans ce qui suit, nous appellerons les fonctions propositionnelles élémentaires, simplement, des fonctions.

Remarquons maintenant ce qui suit. On pourrait distinguer différents types parmi les propositions : par exemple, distinguer entre la proposition "Socrate est mortel", proposition qui attribue une propriété à un individu, et la proposition "La divisibilité est imprédicable", proposition qui attribue une propriété à une fonction ; rien n'empêche cependant de relier par des connecteurs logiques des propositions qui appartiendraient à des types différents ; on peut donc considérer que toutes les propositions appartiennent finalement au même type, puisqu'aussi bien une expression comme "p ou q" reste signifiante lorsque cette expression prend comme arguments des propositions qui appartiennent à des types différents. Par contre, nous l'avons vu, une expression telle que "ϕx ou ψx" n'est plus signifiante si ϕ est signifiant pour un argument d'un autre type que l'argument de ψ. Et c'est pourquoi il ne suffira pas, pour construire le calcul des fonctions, de partir du calcul des propositions et de substituer dans les lois de ce calcul partout "ϕx", "ϕy", "ψx", etc. aux expressions "p", "q", "r", etc.

Une première différence apparaît déjà au niveau des règles de formation des deux calculs. La calcul des propositions contient la règle "si p et q sont des propositions, (p ou q) est une proposition". Le calcul des fonctions, lui, ne peut pas contenir la règle "si ϕx et ψx sont des fonctions, alors (ϕx ou ψx) est une fonction". D'autre part, il est clair que, au niveau des lois, nous avons dans le calcul des propositions "p implique que q implique p", mais que nous ne pouvons pas avoir dans le calcul des fonctions "ϕx implique que ψx implique ϕx".

Le calcul des fonctions contiendra deux espèces de lois. Les lois de la première espèce seront de la forme "La fonction f est valide" ; cette assertion doit être interprétée comme tenant lieu de l'assertion "La fonction f est signifiante et la fonction f est valide" ; pour démontrer la loi "La fonction f est valide", il faudra donc d'abord démontrer que la fonction f est signifiante, on dira aussi "existe", et ensuite montrer que la fonction f est valide, ce qui revient à montrer que la fonction f est une instance substitutive d'une loi du calcul des propositions. Les lois de la seconde espèce seront de la forme "Si telle condition de signifiance est réalisée, la fonction f est valide" ; cette assertion doit être interprétée comme tenant lieu de l'assertion "Si telle condition est réalisée, la fonction f est signifiante; la fonction f est alors valide" ; pour démontrer la loi "Si telle condition de signifiance est réalisée, la fonction f est valide", il faudra donc d'abord démontrer que si cette condition est réalisée, la fonction f est signifiante, et ensuite montrer que la fonction f est une instance substitutive d'une loi du calcul des propositions.

Pour construire le calcul des fonctions, on ajoute au calcul des propositions les deux axiomes suivants :

Axiome I. Si ϕx est signifiant, alors si a est du même type que x, ϕa est signifiant, et, inversement, si ϕx est signifiant, alors si ϕa est signifiant, a est du même type que x.

Une conséquence de cet axiome est que tous les arguments possibles d'une même fonction doivent être du même type. Car, si x et a sont des arguments possibles de la fonction ϕx, alors ϕx et ϕa sont signifiants, et, partant, x et a sont du même type.

Axiome II. Si, pour un a, il y a une proposition ϕa, alors il y a une fonction ϕx, et inversement.

L'expression "être du même type que" utilisée dans l'axiome I sera définie comme suit :

Idée primitive : Individu : x est un individu si x n'est ni une proposition, ni une fonction.

Définition d'"être du même type que" : u et v sont du même type si

(1) u et v sont des individus,

(2) u et v sont des fonctions ayant des arguments du même type,

(3) u et une fonction, et v sa négation,

(4) u est la fonction ϕx ou la fonction ψx, et v est la fonction "ϕx ou ψx",

(5) u et v sont des propositions (élémentaires).

A partir de ces axiomes, on peut démontrer les analogues des règles de formation du calcul des propositions.

"Si ϕx est une fonction, il existe une fonction non ϕx". En effet, si ϕx est une fonction, il existe une proposition ϕa ; par conséquent, il existe une proposition non ϕa, ceci en vertu de l'idée primitive de la négation (calcul des propositions) ; d'où il suit qu'il existe une fonction non ϕx.

"Si ϕx et ψx sont des fonctions du même type, il existe une fonction (ϕx ou ψx)". En effet, si ϕx et ψx sont des fonctions du même type, ces fonctions ont des arguments qui sont tous du même type ; or, de ce que ϕx est une fonction, il suit qu'il existe une proposition ϕa, et de ce que ψx est une fonction, il suit qu'il existe une proposition ψb, et donc aussi une proposition ψa, puisque a et b sont du même type ; il existe donc une proposition "ϕa ou ψa", ceci en vertu de l'idée primitive de la disjonction ; d'où il suit qu'il existe une fonction ϕx ou ψx".

Une fois acquises les règles de formation du calcul des fonctions, on pourra démontrer les lois de ce calcul.

Soit à démontrer "ϕx ou non ϕx". On montre d'abord que cette fonction existe. En effet, la fonction non ϕx existe, et elle est du même type que la fonction ϕx, donc la fonction "ϕx ou ϕx" existe. On montre ensuite que cette fonction est une instance substitutive d'une loi du calcul des propositions, ce qui est immédiat.

Soit à démontrer "Si ϕx et ψx sont des fonctions du même type, alors 'ϕx implique que ψx implique ϕx'". On démontre cette loi écrite en notation primitive : "Si ϕx et ψx sont des fonctions du même type, alors 'non ϕx ou (non ψx ou ϕx)'". On démontre d'abord que si ϕx et ψx sont du même type, la fonction existe. En effet, si ϕx et ψx sont du même type, les fonctions non ψx et ϕx sont du même type, et donc il existe une fonction "non ψx ou ϕx" ; or, la fonction non ϕx est du même type que la fonction "non ψx ou ϕx", puisque non ϕx est du même type que ϕx, et que ϕx est du même type que "non ψx ou ϕx" ; donc la fonction "non ϕx ou (non ψx ou ϕx)" existe. D'autre part, il est clair que cette fonction est une instance substitutive de la loi "non p ou (non q ou p)", loi qui est équivalente à la loi "p implique que q implique p".

-====-

INTRODUCTION A LA THEORIE RAMIFIEE DES TYPES

La théorie simple des types ne suffit pas à faire droit au principe du cercle vicieux. Considérons par exemple la fonction propositionnelle $(\phi).\phi x$. Rien dans la théorie simple des types n'interdit de considérer comme une propriété ϕ de x, la propriété même d'avoir toutes les propriétés ϕ. En d'autres termes, rien dans la théorie simple des types n'interdit de supposer que la fonction $(\phi).\phi x$ est une des valeurs de la fonction ϕx elle-même. Or, une telle supposition serait contraire au principe du cercle vicieux. Car, en vertu de ce principe, la fonction $(\phi).\phi x$, qui implique une référence à la totalité des valeurs de la fonction ϕx, ne peut être elle-même un élément de cette totalité, c'est-à-dire ne peut être elle-même une des valeurs de la fonction ϕx (1).

C'est pour remédier à une telle situation que la théorie <u>ramifiée</u> des types introduit entre les fonctions d'un même type une hiérarchie d'ordres. On ne pourra donc plus dire d'un argument x qu'il satisfait "toutes les fonctions ϕ", mais seulement que cet argument satisfait "toutes les fonctions ϕ d'un ordre donné n". Or, comme nous le verrons plus loin, la propriété de satisfaire toutes les fonctions d'un ordre donné n n'est pas elle-même une fonction d'ordre n, mais une fonction d'ordre n + 1.

(1) *La fonction $(\exists\phi).\phi x$, qui implique elle aussi une référence à la totalité des valeurs de la fonction ϕx, ne pourra pas, de même, être elle-même une des valeurs de la fonction ϕx.*

Dans cette perspective, la propriété que posséderait x de satisfaire toutes les fonctions ϕ ne pourra plus être considérée comme une des valeurs de la fonction ϕ elle-même. Et cela suffit non seulement pour faire droit au principe du cercle vicieux, mais encore, comme nous le verrons, pour écarter des paradoxes comme celui "de l'adjectif hétérologique".

Nous verrons que la théorie ramifiée des types est en réalité une théorie trop stricte. C'est ainsi que si on veut se conformer à la hiérarchie des ordres, il ne sera plus possible de fournir une définition satisfaisante de l'identité. La hiérarchie des ordres, d'autre part, ne permet plus de formuler le principe de l'induction mathématique dans toute sa généralité. Enfin, la hiérarchie des ordres mène à devoir abandonner certaines parties essentielles de l'analyse, celles où intervient la notion de "borne supérieure", cette notion n'étant plus définissable de la manière habituelle en termes de la notion de "coupure".

Pour parer à ces désavantages de la théorie ramifiée des types, Russell et Whitehead ont introduit un axiome dit "de réductibilité". Cet axiome, nous le verrons, doit permettre de réduire, dans certaines conditions, la différence dans l'ordre des fonctions.

L'axiome de réductibilité, cependant, ne possède pas l'évidence qu'on est en droit d'exiger d'un axiome logique. Russell et Whitehead reconnaissent ce fait, mais ils ne voient pas comment il serait possible de se passer de l'axiome. Dans un cas, cependant, celui de l'induction mathématique, les auteurs ont réussi à formuler les définitions requises sans recourir à l'axiome de réductibilité.

STRUCTURE DE LA THEORIE RAMIFIEE DES TYPES

Introduisons d'abord la notion de fonction propositionnelle élémentaire d'individu.

A cette fin, nous rappelons préalablement quelques notions connues. Une proposition atomique est une proposition de la forme

R_1a ("a a la propriété R_1"), ou

R_2ab ("a est dans la relation R_2 à b"), ou

R_3abc ("a, b et c sont dans la relation R_3"), etc.

Une caractéristique essentielle de la proposition atomique est ainsi que la proposition atomique n'est composée d'aucune autre proposition. a, b, c,..., les sujets des propositions atomiques, sont appelés des <u>individus</u>. (Il est à noter que les individus, sujets des propositions atomiques, ne sont pas nécessairement des individus au sens de la théorie simple des types ; en effet, une fonction, une classe ou une relation peuvent fort bien constituer le sujet d'une proposition atomique). A partir de propositions atomiques, on peut construire, à l'aide de connecteurs logiques, des propositions nouvelles, appelées "propositions <u>moléculaires</u>". Une proposition moléculaire est une combinaison finie de propositions atomiques. On appelle les propositions atomiques ou moléculaires, des propositions <u>élémentaires</u>. Une caractéristique essentielle de la proposition élémentaire, c'est que la proposition élémentaire ne contient aucune expression qui impliquerait une quantification, telles les expressions "tout", "quelque", "aucun".

On appellera "<u>fonction propositionnelle élémentaire d'individu</u>" toute expression obtenue en remplaçant dans une proposition élémentaire les noms d'individu par des variables d'individu.

Considérons maintenant le domaine formé de toutes les fonctions propositionnelles élémentaires d'individu qui sont d'un même type donné t(les individus, arguments des fonctions, seront du type t - 1). La <u>théorie ramifiée des types</u> peut alors être définie comme une théorie qui a pour objet de montrer comment on peut, par généralisations et quantifications successives des fonctions élémentaires d'individu du type t, engendrer l'ensemble des fonctions propositionnelles du type t selon une hiérarchie d'ordres.

On commence par introduire la notion de <u>matrice</u>. Une matrice est une fonction qui ne contient aucune variable <u>apparente</u>, c'est-à-dire qui ne contient aucune variable liée.

Il est clair que toute fonction propositionnelle élémentaire d'individu est une matrice. Une matrice qui est une fonction propositionnelle élémentaire d'individu est appelée une matrice <u>du premier ordre</u>. Sont ainsi des matrices du premier ordre, les fonctions

$$R_1x, \qquad R_2xx, \qquad R_1x \supset R_1y.$$

A partir d'une matrice du premier ordre, il est possible d'obtenir de nouvelles fonctions propositionnelles, en quantifiant une ou plusieurs des variables d'individu qui occurrent dans la matrice. (On veillera à ne pas quantifier toutes les variables d'individu, sans quoi on obtiendra non plus une fonction mais une proposition !). On appellera "fonction <u>du premier ordre</u>" toute fonction qui ou bien est une matrice du premier ordre ou bien est obtenue à partir d'une matrice du premier ordre par la quantification de variables d'individu. Voici quelques exemples de fonctions du premier ordre qui ne sont pas des matrices du premier ordre :

$$(x).R_2xy, \qquad (x):R_1x.\supset.R_1y, \qquad (\exists x).R_1y.$$

Toute fonction du premier ordre est une fonction propositionnelle d'individu. Mais une fonction du premier ordre qui n'est pas une matrice du premier ordre n'est pas une fonction propositionnelle élémentaire d'individu ; elle est une fonction qui a comme valeurs des propositions qui ne sont pas des propositions élémentaires, mais ce qu'on appelle des propositions générales.

Une matrice du second ordre est une matrice qui contient parmi ses arguments au moins une matrice du premier ordre, et dont tous les autres arguments sont des individus. Une matrice du second ordre est une fonction qui résulte d'une matrice du premier ordre par la généralisation d'au moins une fonction du premier ordre. Sont ainsi des matrices du second ordre, les fonctions.

ϕx, $\phi(x,y)$, $\phi x \supset \phi y$, où ϕ est une variable de fonction du premier ordre.

A partir d'une matrice du second ordre, il est possible d'obtenir de nouvelles fonctions propositionnelles, en quantifiant une ou plusieurs des variables (variables d'individu, variable de fonction) qui occurrent dans la matrice. (Ici, à nouveau, on aura soin de ne pas quantifier toutes les variables qui occurrent dans la matrice). On appellera "fonction du second ordre" toute fonction qui ou bien est une matrice du second ordre ou bien est obtenue à partir d'une matrice du second ordre par la quantification de variables. Sont par exemple des fonctions du second ordre, les expressions suivantes :

$$(x).\phi x, \qquad (x)(y).\phi(x,y), \qquad (x):\phi x.\supset.\phi y,$$
$$(\phi).\phi x, \qquad (\phi)(x).\phi(x,y), \qquad (\phi)(x)(y):\phi x.\supset.\psi y,$$

où ϕ et ψ sont des variables de fonction du premier ordre.

Une matrice du troisième ordre sera définie, à son tour, comme une matrice qui contient parmi ses arguments au moins une matrice du second ordre, et dont tous les autres arguments sont des matrices du premier ordre ou des individus. Les matrices du troisième ordre et les fonctions qui en résultent par la quantification de variables formeront alors ensemble les fonctions du troisième ordre. Et ainsi de suite.

On dira qu'une fonction propositionnelle est prédicative lorsque cette fonction est une matrice.

C'est en termes de la notion de fonction propositionnelle prédicative que sera énoncé l'axiome dit "de réductibilité". On définit d'abord quand deux fonctions propositionnelles sont équivalentes :

Deux fonctions propositionnelles à un argument sont équivalentes si et seulement si les deux fonctions ont les mêmes valeurs de vérité pour les mêmes arguments.

Ce point étant acquis, on énonce l'axiome de réductibilité comme suit :

Toute fonction propositionnelle à un argument est équivalente à une fonction propositionnelle prédicative du même argument.

Soit ϕx et fx des fonctions propositionnelles dont l'ordre n'est pas spécifié et dont l'argument x est un individu ou une fonction de n'importe quel ordre. Si fx est une fonction prédicative, nous écrirons $f!x$. Ecrivons, d'autre part, $\phi x \equiv fx$ pour marquer que ϕx est équivalent à fx. Nous pouvons alors, à la suite de Russell et Whitehead, écrire comme suit l'axiome de réductibilité :

$$(\exists f) : \phi x . \equiv_x . f!x.$$

Pour des fonctions propositionnelles à deux, trois et, d'une manière générale, à n arguments, des formulations correspondantes de l'axiome de réductibilité pourront être introduites s'il y a lieu. (Il conviendra naturellement d'établir à chaque fois préalablement une définition concordante de l'équivalence entre deux fonctions propositionnelles).

L'exposé qui précède se réfère au paragraphe *12 des *Principia Mathematica*. Mais dans l'introduction à la première édition du même ouvrage, une définition différente est donnée de la notion de fonction prédicative. Une fonction prédicative y est définie comme une fonction qui est d'un ordre immédiatement supérieur à son argument, c'est-à-dire qu'une fonction est prédicative lorsqu'elle a l'ordre le plus bas compatible avec le fait d'avoir l'argument qu'elle a. Les deux définitions ne se recouvrent pas. Considérons, par exemple, la fonction $(x).Rxy$. En vertu de la définition donnée dans le paragraphe *12, cette fonction n'est pas prédicative parce qu'elle n'est pas une matrice ; par contre, en vertu de la définition donnée dans l'introduction, la fonction est prédicative, à savoir par le simple fait qu'elle est une fonction du premier ordre.

C'est la définition donnée dans l'introduction que nous adopterons dans la suite de notre exposé. Cette définition, en effet, par les conséquences qu'elle autorise à tirer de l'axiome de réductibilité, permet, mieux que l'autre définition, de comprendre comment il faut résoudre les difficultés liées à la hiérarchie des ordres.

LA THEORIE DES TYPES ET LE PARADOXE DE GRELLING

Voyons comment la théorie ramifiée des types permet d'écarter un paradoxe comme celui dit "de l'adjectif hétérologique", paradoxe dû à Grelling. Le paradoxe de Grelling est le suivant :

Il arrive qu'un adjectif désigne une propriété qui peut être attribuée à l'adjectif lui-même ; par exemple, le mot "français" est lui-même français ; appelons de tels adjectifs, des adjectifs <u>autologiques</u>. Par opposition, on appellera "<u>hétérologique</u>" un adjectif qui désigne une propriété qui ne peut pas être attribuée à l'adjectif lui-même ; par exemple, le mot "long" n' est pas lui-même long. La question qu'on peut alors se poser est celle-ci : est-ce que l'adjectif "hétérologique" est lui-même hétérologique ? On voit immédiatement que cette question mène à une contradiction. Car, si l'adjectif "hétérologique" est hétérologique, il désigne une propriété qui ne peut pas lui être attribuée, et, partant, il n'est pas hétérologique ; si, au contraire, l'adjectif "hétérologique" n'est pas hétérologique, il désigne une propriété qui peut lui être attribuée, et, partant, il est hétérologique.

La théorie ramifiée des types permet d'écarter le paradoxe de Grelling, en montrant que la formulation de ce paradoxe n'est pas conforme aux exigences de la hiérarchie des ordres.

Pour le voir, examinons, d'un point de vue formel, comment on passe, dans le paradoxe de Grelling, par exemple de la prémisse "l'adjectif 'hétérologique' est hétérologique" à la conclusion "l'adjectif 'hétérologique' n'est pas hétérologique".

Soit ϕ n'importe quelle propriété. Et soit R la relation qui existe entre un adjectif et la propriété que cet adjectif désigne. Représentons par 'Het' la propriété d'être hétérologique, et considérons ainsi l'expression 'Het' comme une abréviation de l'adjectif "hétérologique". Dans le paradoxe de Grelling, on part, pour commencer, de la définition de l'expression "x est hétérologique" :

$$\mathrm{Het}(x) . =_{Df} . : \exists\phi : xR\phi . \sim \phi(x) \quad (1).$$

On considère alors le cas où x est l'adjectif "hétérologique" lui-même :

$$\mathrm{Het}(\text{'Het'}) . \supset . : \exists\phi : \text{'Het'}R\phi . \sim \phi(\text{'Het'}) \quad (2)$$

De la supposition que l'adjectif "hétérologique" désigne une propriété , on conclut, sémantiquement, que cette propriété est la propriété d'être hétérologique, ce qui donne :

$$\mathrm{Het}(\text{'Het'}) . \supset : \text{'Het'}R\mathrm{Het} . \sim \mathrm{Het}(\text{'Het'}) \quad (3)$$

Enfin, par une application d'un principe de logique propositionnelle, le principe "de simplification", on obtient à partir de (3) :

$$\text{Het}(\text{'Het'}) . \supset . \sim \text{Het}(\text{'Het'}) \qquad (4)$$

Remarquons maintenant que, en vertu de la théorie ramifiée des types, il convient que dans la formule (1) la fonction ϕx soit limitée à un ordre déterminé. Soit n cet ordre. La fonction Het(x) est alors une fonction d'un ordre supérieur à n. Dans ces conditions, la fonction Het(x) ne peut pas être considérée comme une des valeurs de la fonction ϕx elle-même. Il résulte de là que nous ne pouvons pas, pour obtenir (3) à partir de (2), substituer dans (2) 'Het' à 'ϕ'.

On peut résumer l'essentiel de ce qui précède en disant que, dans le paradoxe de Grelling, l'adjectif "hétérologique" n'est pas un adjectif dans le même sens que les adjectifs dont on dit qu'ils sont ou ne sont pas hétérologiques. Par cette remarque le paradoxe de Grelling se trouve être résolu, puisqu'on n'a plus alors à se demander si l'adjectif "hétérologique" est ou n'est pas hétérologique.

On pourrait se poser la question intéressante de savoir si l'axiome de réductibilité ne viendrait pas ici compenser les effets restrictifs de la théorie ramifiée des types. En d'autres termes, si nous adoptons l'axiome de réductibilité, n'allons-nous pas voir réapparaître les paradoxes sémantiques, et, dans l'espèce, le paradoxe de Grelling ? Comme l'a fait remarquer Ramsey, ce danger n'existe pas, et cette situation est due précisément au caractère sémantique des paradoxes. En effet, de ce que l'adjectif "hétérologique" désigne la propriété d'être hétérologique et de ce qu'il existe une propriété prédicative équivalente à la propriété d'être hétérologique, il ne suit d'aucune manière que l'adjectif "hétérologique" désigne cette propriété prédicative équivalente.

LA THEORIE DES TYPES ET LA DEFINITION DE L'IDENTITE

L'identité est habituellement définie comme suit :

$$x = y . =_{Df} : (\phi) : \phi x . \supset . \phi y,$$

ce qui signifie : x et y sont identiques si et seulement si y a toutes les propriétés de x.

Le problème de la définition de l'identité est alors le suivant. La définition de l'identité contrevient à la théorie ramifiée des types, puisqu'elle se réfère à une totalité de propriétés sans spécifier quel est l'ordre de ces propriétés. Mais, d'autre part, il est clair que intuitivement x et y sont identiques si et seulement si x et y ont toutes leurs propriétés en commun, quel que soit l'ordre de ces propriétés.

Il semble bien que le problème ainsi posé soit insurmontable. Nous ne pouvons pas limiter les propriétés de x et de y à des propriétés par exemple du premier ordre ; il serait en effet inconcevable d'affirmer que x et y sont identiques alors qu'ils diffèrent par une ou plusieurs propriétés du second ordre. Bien entendu, si nous posons que x et y ont toutes leurs propriétés du second ordre en commun, il en résultera que x et y ont toutes leurs propriétés du premier ordre en commun (en effet, la propriété d'avoir toutes les propriétés du premier ordre qui appartiennent à x est une propriété du second ordre qui appartient à x); mais alors, à nouveau, le fait que x et y aient toutes leurs propriétés du second ordre en commun, n'exclut pas qu'ils diffèrent par une ou plusieurs propriétés du troisième ordre.

Dans le cadre de la théorie ramifiée des types, il n'est donc pas possible de formuler une définition satisfaisante de l'identité. Le mieux que nous pourrions faire, c'est de remplacer, dans la définition de l'identité, le définissant par l'esquisse d'une conjonction infinie de définissants limités, chacun, à un ordre déterminé :

$$x = y . =_{Df} : \phi_1 x \supset_{\phi_1} \phi_1 y . \phi_2 x \supset_{\phi_2} \phi_2 y . \phi_3 x \ \ldots$$

Mais ce serait là une solution trompeuse, car une énumération, lorsqu'elle doit se poursuivre à l'infini, ne peut donner une définition complète.

Si nous avons recours à l'axiome de réductibilité, nous pourrons formuler une définition satisfaisante de l'identité. Appelons "propriété prédicative" d'un objet, toute fonction prédicative que satisfait cet objet. Et pour marquer qu'une propriété ϕ est prédicative, écrivons "$\phi ! x$". Nous pouvons alors formuler la définition de l'identité comme suit :

$$x = y . =_{Df} : (\phi) : \phi ! x . \supset . \phi ! y ,$$

C'est-à-dire : x et y sont identiques si et seulement si y a toutes les propriétés prédicatives de x. En effet, en vertu de l'axiome de réductibilité, toute fonction à un argument est équivalente à une fonction prédicative de cet argument. Si donc x et y ont toutes leurs propriétés prédicatives en commun, il est clair qu'il n'est pas possible, dans ces conditions, que x et y diffèrent par une ou plusieurs propriétés d'un ordre supérieur à l'ordre prédicatif. (Supposons, en effet, qu'il existe une propriété de x que y ne possède pas, propriété d'un ordre supérieur à l'ordre des propriétés prédicatives de x ; cette propriété de x sera équivalente à une propriété prédicative de x ; d'où il faudrait conclure qu'il existe une propriété prédicative de x que y ne possède pas).

Si nous limitons le champ d'application de l'identité à des objets qui sont des individus au sens de la théorie ramifiée des types, nous pouvons formuler la définition de l'identité de la manière suivante :

x et y sont identiques si et seulement si x et y ont toutes leurs propriétés du premier ordre en commun.

En effet, une conséquence de l'axiome de réductibilité est que toute fonction d'individu est équivalente à une fonction du premier ordre. Car toute fonction d'individu est équivalente à une fonction prédicative d'individu, et toute fonction prédicative d'individu est, par la définition même de la notion de fonction prédicative, une fonction du premier ordre.

LA THEORIE DES TYPES ET LA NOTION DE BORNE SUPERIEURE

Rappelons, pour commencer, comment on peut définir la notion de borne supérieure en termes de la notion de coupure.

Partons de la définition du nombre réel donnée par Dedekind:

On appelle "coupure" des rationnels, toute paire ordonnée $\langle A, B \rangle$ telle que

1) A et B sont non vides,
2) $A \cup B$ est l'ensemble des rationnels,
3) si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x<y$, c'est-à-dire que tout élément de A précède tout élément de B.

Un nombre réel est alors défini comme une coupure des rationnels.

Russella donné une formulation quelque peu simplifiée de la définition de Dedekind. Il définit le nombre réel comme une coupure inférieure des rationnels. Soit Ra l'ensemble des rationnels. Une coupure inférieure des rationnels est un ensemble A tel que

1) A est non vide,
2) $A \subset Ra$,
3) si $x \in A$ et $y \in (Ra. \sim A)$ alors $x < y$, c'est-à-dire que tout élément de A précède tout rationnel hors de A,

4) pour tout $x \in A$, il existe un $y \in A$ tel que $x < y$, c'est-à-dire que A n'a pas de plus grand élément.

Introduisons maintenant la notion de borne supérieure. Soit E un ensemble de nombres réels. On appelle "borne supérieure" de E, une coupure inférieure des rationnels qui est la somme des membres de E, c'est-à-dire une coupure inférieure des rationnels qui contient comme éléments et comme seuls éléments tous les rationnels qui sont éléments d'un quelconque membre de E.

Ces points étant acquis, examinons quelle est la difficulté liée à la notion de borne supérieure.

En vertu de la théorie des classes exposée dans les *Principia Mathematica*, chaque classe peut être considérée comme classe de tous les objets qui satisfont une fonction propositionnelle donnée. Toute classe est en ce sens déterminée par une fonction propositionnelle. Nous pouvons exprimer cela en disant que toute classe a sa caractéristique définissante.

Les nombres réels, définis par le procédé des coupures inférieures, sont des classes de rationnels. Un nombre réel a donc une caractéristique définissante, qui est une fonction de rationnels. Or, en vertu de la théorie ramifiée des types, il convient que toute caractéristique définissante, par cela même qu'elle est une fonction propositionnelle, soit limitée à un ordre donné. Cet ordre est fini, étant donné que le nombre des arguments et des variables apparentes dans une fonction est lui-même fini. Appelons n l'ordre le plus élevé que l'on rencontre parmi les caractéristiques qui définissent les réels. Considérons alors un ensemble E de réels dont les caractéristiques définissantes sont de l'ordre n. En vertu de ce qui précède, la borne supérieure de l'ensemble E pourra être analysée comme la classe de tous les rationnels qui satisfont la fonction de satisfaire une quelconque des fonctions d'ordre n qui déterminent les membres de E. Or, en vertu de la hiérarchie des ordres, la fonction de satisfaire une quelconque fonction d'ordre n, n'est pas elle-même une fonction d'ordre n, mais une fonction d'ordre n + 1. La caractéristique définissante de la borne supérieure de l'ensemble E est donc d'un ordre supérieur à celui des nombres réels. D'où il faut conclure que la borne supérieure de l'ensemble E n'est pas elle-même un nombre réel.

La difficulté liée à la notion de borne supérieure peut être levée, si nous avons recours à l'axiome de réductibilité. Une conséquence évidente de cet axiome est, en effet, que l'ordre de toute fonction non prédicative peut être réduit d'au moins un degré. Or, il est clair que la caractéristique définissante de la borne supérieure de l'ensemble E n'est pas une fonction prédicative, étant donné que cette caractéristique est une fonction de rationnels et que les rationnels sont, par hypothèse, d'ordre inférieur à n. L'ordre n + 1 de la caractéristique définissante de la borne supérieure de l'ensemble E peut donc être ramené à l'ordre n qui est celui des réels.

LA THEORIE DES TYPES ET LE PROBLEME DE L'INDUCTION MATHEMATIQUE

Selon P.M., l'induction mathématique n'est autre que l'application à la suite naturelle des nombres d'une notion qui est applicable à toutes les relations, à savoir la notion de l'ancestrale d'une relation.

Soit R une relation. L'ancestrale de R est notée R_*. L'expression "xR_*y" se lira "x est l'ancêtre de y relativement à la relation R"; on peut aussi la lire "y appartient à la suite formée par la relation R et commençant par x" ou, encore, "y est identique à x ou y suit x dans la suite formée par la relation R".

La définition de l'ancestrale d'une relation est la suivante :

x est l'ancêtre de y si et seulement si, pour toute propriété ϕ, le fait que y a la propriété ϕ résulte du fait que

1) x a la propriété ϕ,
2) pour tout z et tout w, si z a la relation R à w, alors, si z a la propriété ϕ, w a la propriété ϕ.

En d'autres termes, x est l'ancêtre de y si et seulement si y a toutes les propriétés de x qui sont héréditaires dans la suite formée par la relation R. On peut noter la définition qui précède comme suit :

$$xR_*y =_{Df} \quad zRw. \supset_{z,w}.\phi z \supset \phi w \;:\supset_{\phi}.\phi x \supset \phi y$$

Pour mieux comprendre cette définition, interprétons "y suit x dans la suite R" comme signifiant "x a la relation R à y, ou x a la relation R à z qui lui-même a la relation R à y, ou...". Dans ces conditions, il est clair que si x a la propriété ϕ et que ϕ est héréditaire dans la suite R, alors y a la propriété ϕ. En effet, x est l'ancêtre de y. Ainsi, premier cas, x est identique à y : il est immédiat que y a la propriété ϕ; deuxième cas, x a la relation R à y : y a la propriété ϕ en vertu de la clause (1) et d'une application de la clause (2) ; troisième cas, x a la relation R à z qui lui-même a la relation R à y : y a la propriété ϕ en vertu de la clause (1) et d'une double application de la clause (2) ; et ainsi de suite.

La définition de l'ancestrale d'une relation, définition élaborée par P.M., s'inspire de celle donnée par Frege dans la Begriffsschrift. Frege est la premier à avoir cherché à définir logiquement l'ordre dans une suite. On peut formuler la définition de Frege en ces termes :

y suit x dans la suite formée par la relation R si et seulement si pour n'importe quelle propriété ϕ, le fait que y a la propriété ϕ peut être établi à partir des deux seules conditions suivantes :

1) si x a la relation R à z, alors z à la propriété ϕ,

2) pour tout z et tout w, si z a la relation R à w, alors si z a la propriété ϕ, w a la propriété ϕ.

En fait, ce que Frege définit ainsi, ce n'est pas l'ancestrale de R, mais ce qu'on appelle l'ancestrale propre de R. On dit que x est l'ancêtre propre de y si et seulement si y suit x dans la suite R. Le rapport entre les deux notions est donc que x est l'ancêtre de y si et seulement si x est identique à y ou x est l'ancêtre propre de y.

En désignant l'ancestrale propre de R par $R_{\circledast}$, on peut noter la définition de Frege comme suit :

$$xR_{\circledast}y =_{Df} \quad zRw . \supset_{z,w} . \phi z \supset \phi w : xRz \supset \phi z . : \supset_{\phi} \phi y .$$

On voit facilement que si $xR_{\circledast}y$ au sens de Frege, alors $xR_{*}y$ au sens de P.M. Supposons, en effet, que $xR_{\circledast}y$ au sens de Frege. Pour montrer que $xR_{*}y$ au sens de P.M., il faut établir que si ϕ est héréditaire et que ϕx, alors ϕy. Or, si ϕx, alors, en vertu du caractère héréditaire de ϕ, $xRz \supset \phi z$, et, donc, en vertu de la définition de Frege, ϕy.

L'idée que l'induction mathématique résulte d'une application de la notion de l'ancestrale d'une relation, c'est là aussi une idée reprise à Frege. Si Frege a consacré une partie entière de la Begriffsschrift à l'élaboration d'une définition logique de l'ordre dans une suite, c'est parce qu'il considère, comme l'atteste les Grundlagen, la suite naturelle des nombres comme un cas particulier d'une suite R, et, plus loin, l'induction mathématique comme un cas particulier d'un raisonnement applicable à toute suite.

Comment faut-il comprendre cette idée que l'induction mathématique résulte d'une application de la notion de l'ancestrale d'une relation ? Regardons cela de plus près. En utilisant la définition de l'ancestrale d'une relation R, on peut construire le raisonnement suivant :

x a la propriété ϕ,
la propriété ϕ est héréditaire dans la suite R

---

si y est identique à x ou si y suit x dans la suite R, alors y a la propriété ϕ.

Appelons ce raisonnement, le raisonnement <u>inductif</u>. Ce que Russell et Whitehead veulent dire, c'est que <u>l'induction</u> mathématique est un cas particulier du raisonnement inductif. L'induction mathématique, en effet, est un raisonnement qui conclut au fait que tout nombre naturel a la propriété ϕ, en partant du double fait que 0 a la propriété ϕ et que tout successeur immédiat d'un nombre naturel qui aurait la propriété ϕ a lui-même la propriété ϕ. Considérons alors la succession immédiate de deux nombres naturels comme un cas particulier d'une relation R, et, d'autre part, interprétons le fait d'être un nombre naturel comme le fait d'être identique à 0 ou de suivre 0 dans la suite naturelle des nombres. Il est clair que l'induction mathématique, ainsi interprétée, est un cas particulier du raisonnement inductif.

Revenons à la définition de l'ancestrale d'une relation. Cette définition, telle que nous l'avons formulée, n'est pas conforme aux exigences de la théorie ramifiée des types, parce qu'il n'est pas spécifié quel est l'ordre des propriétés ϕ. Nous allons rencontrer ici les mêmes difficultés que lors de la définition de l'identité.

Supposons, en effet, que nous prenions, pour commencer, comme propriétés héréditaires de x des propriétés du premier ordre. Dans ces conditions, nous formulerons la définition de l'ancestrale d'une relation de la manière suivante : xR_*y signifie par définition

$$zRw . \supset_{z,w} \phi_1 z \supset \phi_1 w : \supset_{\phi_1} . \phi_1 x \supset \phi_1 y \qquad (1)$$

Le point suivant est alors de savoir si nous pourrons déduire de la formule (1) la condition que y a toutes les propriétés héréditaires du second ordre qui appartiennent à x, condition qu'on peut formuler comme suit :

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_2 z \supset \phi_2 w : \supset_{\phi_2} . \phi_2 x \supset \phi_2 y \qquad (2)$$

Remarquons, pour commencer, que la formule (2) est dans une relation de déductibilité mutuelle avec la formule suivante :

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_2 z \supset \phi_2 w : \supset . \phi_2 x \supset \phi_2 y \qquad (3)$$

Ce qu'il faut donc examiner, c'est si la formule (1) autorise la formule (3). Prenons alors par exemple le cas où $\phi_2 x = (\phi_1) . \phi_1 x$. On voit que la formule (1) autorise la formule

$$zRw . \supset_{z.w} . \phi_1 z \supset_{\phi_1} \phi_1 w : \supset . \phi_1 x \supset_{\phi_1} \phi_1 y \qquad (4)$$

Or, la formule $\phi_1 x \supset_{\phi_1} \phi_1 y$ implique la formule $(\phi_1)\phi_1 x . \supset . (\phi_1)\phi_1 y$. Ainsi, la formule(1) autorisera la formule

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_1 z \supset_{\phi_1} \phi_1 w : \supset : (\phi_1)\phi_1 x . \supset . (\phi_1)\phi_1 y$$
$$\supset : \phi_2 x \supset \phi_2 y \qquad (5).$$

Il resterait donc à montrer que l'antécédent de la formule (3), l'expression $zRw . \supset_{z,w} . \phi_2 z \supset \phi_2 w$, c'est-à-dire l'expression $zRw . \supset_{z,w} : (\phi_1)\phi_1 z . \supset . (\phi_1)\phi_1 w$, implique l'antécédent de la formule (5), l'expression $zRw . \supset_{z,w} . \phi_1 z \supset_{\phi_1} \phi_1 w$. Seulement, il n'est pas difficile de voir qu'une telle implication n'est pas valable dans tous les cas (l'implication est valable par exemple lorsque le domaine des propriétés du premier ordre est limité à des fonctions logiques ; l'implication est valable également lorsque le domaine des propriétés du premier ordre est limité à une seule propriété).

De ce qui précède, il suit que si nous voulons appliquer l'induction mathématique à des propriétés du second ordre, il ne suffit pas que ces propriétés soient héréditaires, il faut encore que les propriétés du premier ordre qui les composent soient elles-mêmes héréditaires. En d'autres termes, si $\phi_2 x = (\phi_1)\phi_1 x$, il ne suffit pas, comme nous l'avons vu, que nous avons

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_2 z \supset \phi_2 w, \text{ c'est-à-dire } zRw \supset_{z,w} : (\phi_1)\phi_1 z . \supset . (\phi_1)\phi_1 w,$$

Il faut encore que nous ayons

$$zRw . \supset_{z,w} . \phi_1 z \supset_{\phi_1} \phi_1 w.$$

Or, comme le font remarquer les auteurs des Principia Mathematica, c'est là une conséquence fâcheuse, car il existe des propriétés importantes du second ordre auxquelles nous voulons appliquer l'induction mathématique et qui sont donc héréditaires, alors que les propriétés du premier ordre qui les composent ne le sont pas. Tel est par exemple le cas de certaines propriétés de la forme $xR_* z . \phi_1 z$ qui sont telles que nous avons

$$xR_* z . \phi_1 z . zRw : \supset_{z,w} . xR_* w . \phi_1 w ,$$

alors que nous n'avons pas

$$\phi_1 z . zRw : \supset_{z,w} . \phi_1 w.$$

Si nous adoptons l'axiome de réductibilité, nous pourrons parer aux difficultés qui précèdent et formuler une définition satisfaisante de l'ancestrale d'une relation, à savoir comme suit :

$$xR_*y. =_{Df}. : zRw. \supset_{z,w}. \phi!z \supset \phi!w : \supset_\phi \phi!x \supset \phi!y.$$

En effet, si y possède toutes les propriétés héréditaires prédicatives qui appartiennent à x, il est impossible, en vertu de l'axiome de réductibilité, que y ne possède pas toutes les propriétés héréditaires d'ordre supérieur qui appartiennent à x. Car, soit ϕ_n une propriété héréditaire non prédicative appartenant à x. Dans ces conditions, il existe, en vertu de l'axiome de réductibilité, une propriété prédicative équivalente ϕ_p appartenant elle aussi à x. Or, de ce que ϕ_n et ϕ_p sont des fonctions équivalentes, et donc des fonctions qui sont satisfaites par les mêmes arguments, il suit que si ϕ_n est héréditaire, ϕ_p est héréditaire. Or ϕ_p appartient à x. Donc ϕ_p appartient à y. D'où il suit que ϕ_n également appartient à y.

Dans l'appendice B aux Principia Mathematica, Russell et Whitehead ont montré qu'il n'est pas nécessaire de faire appel à l'axiome de réductibilité pour arriver à une définition satisfaisante de l'ancestrale d'une relation. Dans le cas de la notion d'identité, on devait, en l'absence de l'axiome de réductibilité, recourir à une suite infinie de définitions relatives, chacune, à un ordre déterminé. Dans le cas présent, on pourra, au contraire, se suffire d'une seule définition qui permettra de couvrir tous les ordres. Regardons cela de plus près.

Partons de l'idée que x est l'ancêtre de y si et seulement si y a toutes les propriétés héréditaires qui appartiennent à x. Posons alors, pour commencer, que $xR_{*m}y$, où m est n'importe quel ordre, signifie par définition

$$zRw. \supset_{z,w}. \phi_m z \supset \phi_m w : \supset_{\phi m}. \phi_m x \supset \phi_m y .$$

Or, comme on le montre en détail dans l'appendice B des Principia Mathematica, il est possible d'établir que

$$\text{si } m > 5, \text{ alors } R_{*m} = R_{*5} \qquad (1).$$

Il suit de là que

$$\text{si } m > 5, \text{ alors } xR_{*5}y. \supset_{x,y}. xR_{*m}y \qquad (2)$$

Ainsi, en vertu de (2), de ce que y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 5 qui appartiennent à x, il suit que y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 6 qui appartiennent à x, toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 7 qui appartiennent à x, et ainsi de suite. Il est clair, d'autre part,que

$$\text{si } m = n + 1, \text{ alors } xR_{*m}y. \supset_{x,y}. xR_{*n}y \qquad (3)$$

En effet, avoir toutes les propriétés héréditaires de l'ordre n qui appartiennent à x est une propriété de l'ordre m, qui est héréditaire, et qui appartient à x ; y a donc cette propriété ; y a donc également toutes les propriétés héréditaires de l'ordre n qui appartiennent à x. A partir de (3), il sera toujours possible d'obtenir, à l'aide d'un nombre fini d'étapes, que

$$\text{si } 1 \leqslant m < 5, \text{ alors } xR_{*5}y . \supset_{x,y} . xR_{*m}y \qquad (4)$$

Ainsi, en vertu de (4), de ce que y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 5 qui appartiennent à x, il suit que y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 4 qui appartiennent à x, toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 3 qui appartiennent à x, et ainsi de suite. Nous pouvons donc conclure à partir de ce qui précède, et plus particulièrement en vertu des clauses (2) et (4) prises conjointement, que <u>si y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 5 qui appartiennent à x, y aura toutes les propriétés héréditaires de x quel que soit l'ordre de ces propriétés</u>. On obtient donc une définition <u>complète</u> de l'ancestrale d'une relation, entendez une définition qui couvre tous les ordres, en posant que

$$xR_{*}y . =_{Df} . : zRw . \supset_{z,w} . \phi_5 z \supset \phi_5 w : \supset_{\phi_5} . \phi_5 x \supset \phi_5 y \ .$$

La définition qui précède est une proposition déductivement plus faible que la définition formulée en termes de propriétés prédicatives. Considérons par exemple le cas où nous avons affaire à des propriétés du quatrième ordre. Partant de la définition formulée en termes de propriétés prédicatives, nous pouvons conclure à l'équivalence

$$xR_{*}y . \equiv . : zRw . \supset_{z,w} . \phi_4 z \supset \phi_4 w : \supset_{\phi_4} . \phi_4 x \supset \phi_4 y$$

En partant au contraire de la définition formulée en termes de propriétés du cinquième ordre, nous pourrons seulement conclure à l'implication

$$xR_{*}y . \supset . : zRw . \supset_{z,w} . \phi_4 z \supset \phi_4 w : \supset_{\phi_4} . \phi_4 x \supset \phi_4 y$$

Cette situation est due au fait que la définition formulée en termes de propriétés prédicatives opère conjointement à l'axiome de réductibilité, et qu'il n'y a pas, dans les <u>Principia Mathematica</u>, un équivalent logique à cet axiome. Au fond, la portée de la définition formulée en termes de propriétés prédicatives est la suivante :

pour tout n : x est l'ancêtre de y si et seulement si y a toutes les propriétés héréditaires d'ordre n qui appartiennent à x.

La portée de la définition formulée en termes de propriétés du cinquième ordre est au contraire celle-ci ;

pour tout n égal ou supérieur à 5 : x est l'ancêtre de y si et seulement si y a toutes les propriétés héréditaires d'ordre n qui appartiennent à x ;

cette condition, qui est plus restreinte que la précédente, est en fait équivalente à la suivante :

x est l'ancêtre de y si et seulement si pour tout n y a toutes les propriétés héréditaires d'ordre n qui appartiennent à x.

La question se pose dès lors de savoir s'il est possible, en l'absence de l'axiome de réductibilité, d'appliquer l'induction mathématique à des propriétés d'un ordre inférieur à 5. Considérons par exemple le cas où nous avons affaire à des propriétés du second ordre. A partir de la première définition de l'ancestrale d'une relation, définition formulée en termes de propriétés prédicatives, on peut construire le raisonnement inductif suivant, raisonnement qu'on requiert pour l'application de l'induction mathématique à des propriétés du second ordre :

x a la propriété ϕ_2
la propriété ϕ_2 est héréditaire dans la suite R

---

si y est identique à x ou si y suit x dans la suite R, alors y a la propriété ϕ_2.

En effet, la clause "y est identique à x ou y suit x" est identique, en vertu de la définition, à la condition "y a toutes les propriétés héréditaires prédicatives qui appartiennent à x", et cette condition, à son tour, est équivalente, en vertu de l'axiome de réductibilité, à la condition "y a toutes les propriétés héréditaires du second ordre qui appartiennent à x". Par contre, à partir de la seconde définition de l'ancestrale d'une relation, définition formulée en termes de propriétés du cinquième ordre, on ne pourra, semble-t-il, construire que le seul raisonnement inductif suivant :

x a la propriété ϕ_5
la propriété ϕ_5 est héréditaire dans la suite R

---

si y est identique à x ou si y suit x dans la suite R, alors y a la propriété ϕ_5.

Il n'est pas difficile, cependant, de montrer qu'on peut construire le raisonnement inductif (1) également à partir de la seconde définition de l'ancestrale d'une relation. En effet, le raisonnement (1) est équivalent au raisonnement qu'on obtient en déplaçant dans (1) l'antécédent de la conclusion vers les prémisses :

x a la propriété ϕ_2

la propriété ϕ_2 est héréditaire dans la suite R

y est identique à x ou y suit x dans la suite R

---

y a la propriété ϕ_2.

Or, dans le raisonnement (2), la clause "y est identique à x ou y suit x" est équivalente, en vertu de la seconde définition de l'ancestrale d'une relation, à la condition "y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 5 qui appartiennent à x". Mais, nous avons vu que si y a toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 5 qui appartiennent à x, y a également toutes les propriétés héréditaires de l'ordre 2 qui appartiennent à x. La prémisse "y est identique à x ou y suit x dans la suite R" autorise donc la prémisse additionnelle "y a toutes les propriétés de l'ordre 2 qui sont héréditaires dans la suite R et qui appartiennent à x. Et cela suffit pour qu'on puisse passer dans le raisonnement (2) des prémisses à la conclusion.