LOGICA IN COMMUNICATIE

Déjà parus

Cahier 1 — épuisé
Intuitionnisme et théorie de la démonstration.

Cahier 2 — épuisé
Textes de Jean Pieters.

Cahier 3 — épuisé
J.L. Moens, *Forcing et sémantique de Kripke–Joyal.*

Cahier 4 — épuisé
La théorie des ensembles de Quine.

Cahier 5
T.E. Forster, *Quine's New Foundations.*

Cahier 6
Logique et informatique.

Cahier 7
L'antifondation en logique et en théorie des ensembles.

Cahier 8
Ph. de Groote (ed.), *The Curry–Howard Isomorphism.*

Cahier 9
A. Pétry (éd.), *Méthodes et analyse non standard.*

Cahier 10
M.R. Holmes, *Elementary Set Theory with a Universal Set.*

Cahier 11
Chr. Michaux (ed.), *Definability in Arithmetics and Computability.*

Cahier 12
P. Van Praag, *Aspects de la dualité en mathématique.*

Cahier 13
O. Esser *Une théorie positive des ensembles.*

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

14

LOGICA IN COMMUNICATIE

Kristof De Clercq

Centre National de Recherches de Logique
Nationaal Centrum voor Navorsingen in de Logica

ACADEMIA–BRUYLANT LOUVAIN-LA-NEUVE 2005

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

Cahier 14 rédigé par :
Kr. De Clercq,
Universiteit Gent.

Secrétariat :
St. Godefroid.

Composition :
D. Dzierzgowski.

Centre national de recherches de logique
`http://www.lofs.ucl.ac.be/cnrl/Cahiers`

D/2005/4910/13 ISBN 2-87209-793-7

Imprimé en Belgique.

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Inhoudsopgave

Woord Vooraf **9**

Ten Geleide **11**

1 Het schetsen van het kader **19**
1.1 Inleiding 19
1.2 Het Interrogatief Model 21
1.3 Het dialoogmodel van Carlson 24
1.4 Welke rol kan een logica hier spelen? 26
1.5 Vraaglogica 27
1.6 Belief revision 28
1.7 Vertrouwde redeneervormen zonder positieve test 29
1.8 Inconsistente opvattingen 32

2 Inferentiële erotetische logica **35**
2.1 Inleiding 35
2.2 Intuïties 37
2.3 Afspraken 39
2.4 Soorten vragen 40
2.5 De logische basis 41
2.6 Basisbegrippen 42

2.7 Evocatie en generatie van vragen 45
2.7.1 Definities 45
2.7.2 Opmerkingen 47
2.8 Erotetische implicatie 49
2.8.1 Definities 49
2.8.2 Kritiek 50
2.9 Algemene bemerkingen 53
2.9.1 Logische alwetendheid 53
2.9.2 Orakelen met klassieke logica 54
2.9.3 Relevantie 58

3 Adaptieve logica's 61
3.1 Inleiding 61
3.2 Het standaardformaat voor vlakke adaptieve logica's 63
3.3 Dynamische bewijzen 66
3.4 Semantiek 71
3.5 Opmerking 72

4 De vraaglogica VA 73
4.1 Inleiding 73
4.2 Voorbereiding 75
4.2.1 Bepaling van de welgevormde formules 75
4.2.2 Presupposities, vragen en antwoorden 77
4.2.3 De verzameling premissen 79
4.3 De logica V 84
4.3.1 Syntaxis van V 84
4.3.2 Semantiek van V 87
4.3.3 Enkele nuttige meta-theorema's voor V 90
4.4 De adaptieve logica VA 92
4.5 Semantiek van VA 96
4.6 Vereenvoudigde semantiek voor VA 97
4.7 Voorbereiding van de bewijstheorie 100
4.8 Dynamische bewijstheorie van VA 104
4.9 Afleidbare regels van VA 113
4.10 Enkele meta-eigenschappen van VA 115
4.11 Tot slot 115

5 Erotetische concepten 117
5.1 Inleiding . . . 117
5.2 Evocatie en onderdrukking van een vraag . . . 118
5.3 Erotetische implicatie . . . 124
5.3.1 Implicatie van vragen in V en VA . . . 124
5.3.2 W-implicatie . . . 136
5.3.3 Een evaluatie van implicatie en W-implicatie . . . 141
5.4 Implicatie van vragen: een voorstel op basis van VA . . . 143
5.5 Voorlopige conclusies en open problemen . . . 152

6 Belief revision 157
6.1 Inleiding . . . 157
6.2 Het standaard AGM-model . . . 158
6.3 Inconsistente opvattingen . . . 163
6.4 De (zwakke) (monotone) paraconsistente logica CLuN . . . 166
6.5 De inconsistentie-adaptieve logica AL . . . 169
6.5.1 Bewijstheorie . . . 171
6.5.2 Semantiek . . . 171
6.5.3 Definities en nuttige theorema's voor AL . . . 172
6.6 Over het gebruik van deductief gesloten verzamelingen . . . 174
6.7 Postulaten van rationaliteit voor operaties op basissen . . . 177
6.7.1 Expansie . . . 178
6.7.2 Contractie . . . 179
6.8 Postulaten voor contractie . . . 187
6.9 Van de postulaten naar de constructie . . . 195
6.10 Basis-gegenereerde contractie . . . 198
6.11 Revisie . . . 201
6.12 Tot slot . . . 207

7 Toekomstig onderzoek 209

Bibliografie. 213

Woord Vooraf

Ik dank het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO-Vlaanderen) en de Belgian American Educational Foundation (B.A.E.F.) voor hun steun.

Daarnaast wil ik vooral de volgende mensen bedanken voor hun aanmoedigingen, kritische opmerkingen en pertinente vragen: Diderik Batens, Joke Meheus, Leon Horsten, Jean Paul Van Bendegem, Erik Weber, en Liza Verhoeven.

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Ten Geleide

Diderik Batens en Joke Meheus

Het werkstuk van Kristof De Clercq dat hier voorligt, vormt, zelfs binnen de traditie waarin het ontstond, een hoogst opmerkelijke bijdrage. Het is zowel opmerkelijk wegens de problemen die erin worden opgelost als wegens het gemak waarmee metatheoretische bewijzen worden geleverd, dikwijls steunend op originele bewijsmethoden.

De titel *Logica in Communicatie* geeft het algemene probleemveld aan. Twee centrale aspecten daarvan worden uitgewerkt: vragen en de dynamiek van overtuigingen — technisch gesproken: erotetische logica en 'belief revision'. Beide aspecten treden zowel op in ons dagdagelijks denken als in de wetenschappen.

Met de hierna volgende korte tekst hopen we de lezer op het juiste been te zetten, zodat de lezer voeling krijgt met de traditie van waaruit de tekst is geschreven, en hem daardoor in een juist perspectief plaatst. Daarnaast zullen we ook een kort en zeer algemeen overzicht geven van de problemen die door Kristof De Clercq worden opgelost, zodat ook de lezer die niet vertrouwd is met het behandelde materiaal, de originaliteit van de bijdrage kan inschatten.

De traditie. Zoals vele andere disciplines, heeft ook de logica perioden van bloei en perioden van stilstand gekend. De late negentiende eeuw en vooral de eerste helft van de twintigste eeuw vormde duidelijk een periode van grote bloei. Niet alleen speelde de logica, vooral onder impuls van de *Wiener Kreis*, een centrale rol in de uitbouw van de wetenschapsfilosofie en van de analytische wijsbegeerte in het algemeen, maar bovendien werden de zogenaamde limitatieve theorema's bewezen, waardoor ons begrip van de wiskunde, dat twee en een half millennium had stand gehouden, grondig werd dooreengeschud.

Gedurende het laatste deel van de twintigste eeuw kwam aan deze bloei een einde. Veel logici bedreven hoofdzakelijk 'normale wetenschap'. Anderen waren met baanbrekend werk bezig (relevante logica's, counterfactuals, paraconsistente logica's, ...). Maar de logica verloor steeds meer voeling met andere disciplines waarin ze nuttig kon worden toegepast. De meeste wetenschapsfilosofen beschouwden logica als een onbruikbaar instrument. De uitzonderingen, zoals Jaakko Hintikka en Theo Kuipers, gebruikten uitsluitend klassieke logica, met alle beperkingen vandien. De naturalistische 'wending' in de kennisleer en in veel andere delen van de wijsbegeerte richtte de aandacht op empirisch materiaal. In de wiskunde was het grondslagenonderzoek een specialisme geworden, terwijl logici weinig of niets bijdroegen tot procedures die het zoeken van bewijzen zouden kunnen vergemakkelijken. De informatietechnologie bouwde moeizaam eigen procedures uit, met weinig hulp vanwege de logica. Voor toepassingen op het alledaags denken bleek de klassieke logica onbruikbaar en bleken veel niet-standaard logica's te esoterisch.

Het *cahier* dat hier voorligt maakt deel uit van een Gentse onderneming die erop gericht is de logica uit te bouwen tot een discipline die haar oorspronkelijk oogmerk weer ter harte neemt: een explicatie bieden voor de redeneervormen die feitelijk worden gebruikt, zowel in de wetenschappen als in ons alledaags denken. De interne dynamiek van de logica wordt daarbij niet uit het oog verloren: de moeizaam ontwikkelde metatheorie die de eigenschappen van de ontwikkelde systemen aantoont en ze daardoor hun kracht verleent, moet op de ontwikkelde systemen worden toegepast. Maar het hoofddoel blijft een dienende logica, die relevant en nuttig is voor de pogingen die mensen doen om de wereld vorm te geven aan de hand van descriptieve, evaluatieve en prospectieve beweringen.

Veel courant gebruikte redeneervormen hebben als bijzonder kenmerk dat er geen positieve test voor is, met andere woorden dat ze zelfs niet partieel recursief zijn. Deze redeneervormen vertonen steeds een interne dynamiek:

naarmate het redeneerproces vordert kan ons inzicht in de premissen stijgen, waardoor een eerder afgeleid besluit als niet-afgeleid moet worden beschouwd. Klassieke logici hebben gepoogd enkele dergelijke redeneervormen te benaderen. Zo heeft Hintikka een benadering uitgewerkt voor het zoeken, vanuit een gegeven theorie, van een verklaring voor een singulier feit. Zijn benadering verwijst naar de heuristiek voor het vinden van bewijzen (in de klassieke logica). De bedoelde redeneervorm wordt dus herleid tot een zoekproces dat weliswaar aan bepaalde regels onderworpen kan zijn, maar dat buiten de eigenlijke logica wordt gehouden. In het Gentse Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie werd resoluut geopteerd voor een andere aanpak: adaptieve logica's worden ontwikkeld met het doel een *explicatum* te bieden voor dergelijke redeneervormen. Het *explicatum* bestaat dus uit een volwaardige bewijstheorie en semantiek, en dus ook een afleidbaarheidsrelatie en een semantische-gevolgrelatie.

Adaptieve logica's hebben een preferentiële semantiek en een dynamische bewijstheorie. In een preferentiële semantiek wordt de semantische-gevolgrelatie bepaald aan de hand van een basislogica (in de huidige context ondergrens-logica genoemd) en een selectiecriterium. $\Gamma \vDash A$ alss A geverifieerd wordt door alle geselecteerde modellen van Γ. In een dynamische bewijstheorie zijn de lijnen van een bewijs op elk stadium al dan niet gemarkeerd — welke lijnen gemarkeerd zijn wordt bepaald door de markeringsdefinitie. Een adaptieve logica in standaardformaat wordt bepaald door een ondergrens-logica, een verzameling abnormaliteiten die wordt gekarakteriseerd door een logische vorm, en een adaptieve strategie. Met betrekking tot de semantiek legt de ondergrens-logica de modellen vast, terwijl het selectiecriterium wordt bepaald door de strategie in termen van de verzameling abnormaliteiten die door de modellen van de premissen worden geverifieerd. In dynamische bewijzen wordt aan elke afgeleide formule een verzameling abnormaliteiten gekoppeld (de *voorwaarde* waarop de formule is afgeleid). De afleidingsregels worden vastgelegd door de ondergrens-logica en de verzameling abnormaliteiten, de markeringsdefinitie wordt vastgelegd door de strategie.

Voor de bewijstheorie dient een onderscheid te worden gemaakt tussen afleidbaarheid op een stadium (van het bewijs) en finale afleidbaarheid. Intuïtief uitgedrukt: A is finaal afleidbaar uit Γ alss er een bewijs uit Γ is waarin A is afgeleid op een ongemarkeerde lijn i en dit bewijs stabiel is met betrekking tot *deze* markering — in geen enkele extensie van het bewijs wordt lijn i gemarkeerd. Soms treedt dergelijke stabiliteit slechts op een oneindig punt op. Vandaar dat de technische definitie (zie de tekst van Kristof De Clercq) anders luidt: A is finaal afgeleid op lijn i in een stadium s van een bewijs alss aan de volgende voorwaarden is voldaan: lijn i is ongemarkeerd in stadium s en elke extensie van dat stadium waarin i gemarkeerd is, heeft een verdere extensie waarin i ongemarkeerd is. Men kan dit speltheoretisch interpreteren: telkens een opponent erin slaagt de lijn te markeren, kan de proponent ervoor zorgen dat ze weer ongemarkeerd is.

Wanneer een adaptieve logica in standaardformaat staat, dan is meteen de bewijstheorie en de semantiek vastgelegd. Bovendien werden voor grote delen van de metatheorie, waaronder correctheid en volledigheid, bewijzen geleverd die alleen steunen op het standaardformaat en niet op specifieke eigenschappen van de specifieke logica.

Het is nuttig even in te gaan op het mogelijk bezwaar dat de bepaling van finale afleidbaarheid wel aantrekkelijk kan zijn, maar computationeel weinig nut heeft, omdat ze ons niet toelaat uit te maken of een bepaald gevolg nu al dan niet finaal afleidbaar is uit een verzameling premissen. Ten eerste ligt dit aan de redeneervorm waarvoor de adaptieve logica een explicatie biedt. Ten tweede kan worden aangetoond dat, naarmate dynamische bewijzen vorderen, het inzicht in de premissen meestal stijgt, namelijk telkens zinnige stappen worden gezet, en nooit daalt. Dit betekent dat dynamische bewijzen convergeren naar stabiliteit. Op een eindig ogenblik is stabiliteit misschien niet bereikt, zodat men moet kiezen tussen handelen in onzekerheid (op basis van de huidige inzichten) en pogen de onzekerheid te reduceren door het bewijs verder te zetten. Ten derde werd een procedureel criterium voor finale afleidbaarheid uitgewerkt. Hoewel er geen positieve test is, laat het toepassen van deze procedure in veel gevallen toe te besluiten dat een bepaalde conclusie wel degelijk (of net niet) finaal afleidbaar is uit een verzameling premissen.

De bijdrage. Zowel erotetische logica als de logica die bij 'belief revision' hoort, hebben betrekking op centrale aspecten van de menselijke communicatie. Vragen stellen mensen van kindsbeen af. Antwoorden bepalen een groot deel van onze opvoeding en vormen ook voor volwassenen een centrale bron van informatie. Deze en andere informatie noopt ons ertoe voortdurend ons overtuigingssysteem uit te breiden, in te krimpen of te herzien. Ook in de wetenschappen zijn vragen centraal; wetenschappelijke problemen kunnen immers worden gezien als verzamelingen (of clusters) van vragen. Uit de literatuur is bovendien voldoende bekend dat de mechanismen voor 'belief revision' uitvoerig werden aangewend in een poging om pak te krijgen op de ontwikkeling van wetenschappelijke theorieën.

Hebben erotetische logica's en 'belief revision' er behoefte aan te worden gekarakteriseerd aan de hand van adaptieve logica's? Het antwoord is "ja" en wel om twee verschillende redenen.

In de erotetische logica worden onder meer definities gegeven die vastleggen (1) wat de relatie is tussen beschrijvende premissen en vragen (die erdoor worden geëvoceerd) en (2) wat de relatie is tussen beschrijvende premissen en vragen enerzijds en afgeleide vragen anderzijds (erotetische implicatie). Zo een definitie legt dan misschien wel correct vast wanneer een vraag door een verzameling beschrijvende premissen wordt geëvoceerd, maar kan geen explicatie leveren voor het redeneerproces dat van de premissen leidt tot de vraag. Alleen een bewijs kan deze explicatie bieden. Aangezien er, voor minimaal aanvaardbare definities van evocatie, geen positieve test is voor "vraag Q wordt geëvoceerd door Γ", is de logica die een explicatie vormt van het redeneerproces noodzakelijkerwijze adaptief (op predikatief niveau). Voor 'belief revision' geldt deze eerste reden niet, want de klassieke literatuur erover is volledig propositioneel. De tweede reden geldt echter wel degelijk.

De tweede reden heeft te maken met inconsistenties. Bijna elk geheel van overtuigingen is inconsistent. Er zijn een aantal bekende en goed gedocumenteerde voorbeelden van inconsistente wetenschappelijke theorieën en geen mens heeft een volkomen consistent geheel van opvattingen. Een centrale vraag van de logica had dus al meer dan twee millennia moeten luiden: hoe moeten we omgaan met inconsistente opvattingen? Helaas is er ook vandaag een groot aantal logici die deze vraag niet stellen en werd er in hele domeinen van de logica niet eens over deze vraag nagedacht. Zo gaat bijna elke erotetische logica uit van consistente beschrijvende premissen, en gaat bijna het gehele onderzoek over 'belief revision' ervan uit dat overtuigingssystemen consistent zijn. We hebben het hier niet over de filosofische achtergrond van die systemen, maar over hun formele eigenschappen: in aanwezigheid van *Ex Falso Quodlibet* evoceert een inconsistente verzameling premissen geen enkele vraag en valt er aan een inconsistent geheel van overtuigingen niets te expanderen, niets te contraheren en niets te reviseren. Klassieke logici zullen wellicht opmerken dat de wereld (of de correcte beschrijving ervan) consistent is. Of dit klopt kunnen we hier niet bespreken, maar ook als het klopt is het naast de kwestie. We hebben geen logica nodig om besluiten te trekken uit ware overtuigingen, we hebben een logica nodig om besluiten te trekken uit onze overtuigingen, en die zijn, helaas, maar al te dikwijls inconsistent.

Om (tenminste in bepaalde contexten) met inconsistente premissen om te gaan hebben we een paraconsistente logica nodig. Niet elke paraconsistente logica levert echter bevredigende resultaten op. Er komen dan weliswaar inconsistenties voor in onze kennis, maar voor de overdonderende meerderheid van beweringen A geldt dat A en $\sim A$ niet beide tot onze overtuigingen behoren. We moeten er dus van uitgaan dat een overtuiging 'normaal' consistent is, dit wil zeggen: tenzij en totdat het tegendeel is aangetoond. Vanuit logisch oogpunt maakt dit een bijzonder groot verschil uit. Indien bijvoorbeeld zowel $\sim A$ als $A \vee B$ tot onze overtuigingen behoren, dan zullen we daaruit willen besluiten tot B, tenzij wanneer er een reden is om dat niet te doen. De eenvoudigste dergelijke reden is dat ook A tot onze overtuigingen behoort. De vorige twee zinnen gelden ook wanneer het geheel van onze overtuigingen inconsistent is. Met andere woorden, ook wanneer zowel C als $\sim C$ uit onze overtuigingen afleidbaar zijn, zullen we uit $\sim A$ en $A \vee B$ normaal willen besluiten tot B.

Eens we inzien dat we met inconsistente premissen moeten kunnen omgaan, kunnen we de klassieke logica niet meer gebruiken, want die kan dat niet. We kunnen echter evenmin een monotone paraconsistente logica hanteren, want die gaat er niet van uit dat een overtuiging normaal consistent is. Wat we nodig hebben, is een *zo consistent mogelijke* interpretatie van de premissen. Precies dit doen inconsistentie-adaptieve logica's, zoals **ACLuN1** en **ACLuN2** die Kristof De Clercq gebruikt.

In zijn *Logica in Communicatie* werkt Kristof De Clercq adaptieve erotetische logica's uit — technisch gaat het om modale adaptieve logica's die, onder een voor de hand liggende vertaling, erotetische logica's karakteriseren. Bovendien herwerkt hij de 'belief revision' mechanismen op basis van inconsistentie-adaptieve logica's. Hij doet echter veel meer dan dat.

De karakterisering van erotetische logica's is zeer algemeen. Anders gezegd, ze slaat op een verzameling van erotetische logica's. Door welbepaalde verdere eisen op te leggen, worden specifiekere logica's bekomen.

Erotetische logica's krijgen dus niet alleen een bewijstheorie en een semantiek, er wordt meteen een geünificeerde aanpak voor een grote verzameling erotetische logica's voorgesteld. Dit is een bijzonder belangrijke stap, want het is weinig plausibel dat dezelfde erotetische logica in alle contexten adequaat zou zijn.

Deze karakterisering is nog steeds gericht op consistente premissen. Dit lijkt ons een gelukkige beslissing. De karakterisering is reeds een voldoende sterke krachttoer. De auteur kon niet alle problemen tegelijkertijd oplossen en het resultaat is reeds zo verschillend van de beschikbare aanpakken dat de lezer alleen maar dankbaar kan zijn er niet nog een complicatie bij te moeten nemen. Toch wordt in een afzonderlijke afdeling getoond hoe de karakterisering kan worden veralgemeend tot het inconsistente geval. Opmerkelijk is dat de veralgemening, indien ze wordt toegepast op consistente premissen, precies hetzelfde resultaat oplevert als de consistente aanpak.

In het hoofdstuk over 'belief revision' wordt, zoals beloofd, de standaard-aanpak daarvoor veralgemeend tot het inconsistente geval. De lezer zal ongetwijfeld onder de indruk komen van het diepe inzicht waarmee dit gebeurt: heel het binnen de AGM-aanpak uitgewerkte instrumentarium wordt opgevoerd en in de veralgemening betrokken, alles voorzien van de nodige bewijzen. De lezer zal evenzeer onder de indruk komen van het resultaat. Het gaat namelijk wel degelijk om een veralgemening in die zin dat voor consistente overtuigingen precies hetzelfde resultaat wordt bekomen als met de standaard-aanpak, terwijl het resultaat voor inconsistente overtuigingen er precies uitziet zoals men intuïtief vanuit de standaard-aanpak verwacht — beter gezegd, zoals men na grondige overweging vanuit de standaard-aanpak verwacht, want, zoals blijkt uit de tekst, vielen ook op dit punt een aantal harde noten te kraken.

De competente lezer zal niet alleen geboeid zijn door de opmerkelijke resultaten en aangenaam verrast door de strengheid en helderheid van de metatheoretische bewijzen. De lezer zal ook, bijna terloops, opmerkelijke oplossingen aantreffen voor talrijke interessante problemen. Om maar een voorbeeld te geven, Kristof De Clercq slaagt erin WH-vragen (zoals "Wie heeft Jan vermoord?") op een zinnige manier te behandelen zonder ω-volledigheid van de modellen te veronderstellen, wat door velen voor onmogelijk werd gehouden.

De indruk die wij van het lezen van dit boek over hielden was dubbel. Enerzijds is het alsof de uitwerking van bruikbare logica's pas aan het begin van haar ontwikkeling staat. Anderzijds is deze ontwikkeling bij logici als Kristof De Clercq beslist in goede handen.

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 1

Het schetsen van het kader

1.1. Inleiding

Als we het hebben over communicatie, dan wordt daar doorgaans het uitwisselen van informatie tussen minstens 2 partijen (tussen mensen, mens-computer, computer-computer, enz.) onder verstaan. Een typische vorm waarin deze uitwisseling van informatie plaatsvindt, is de dialoog.

In hun invloedrijke typologie onderscheiden Walton en Krabbe ([WK95]) een aantal basistypes van dialogen, die van elkaar onderscheiden worden door de beginsituatie, de doelstellingen van elk van de participanten, en de doelstelling van de dialoog zelf (die verschillend kan zijn van die van de participanten). We overlopen kort drie verschillende types van dialogen die ze onderscheiden. [1]

Een dialoog van *overreding* start vanuit een conflictsituatie waarin de ene participant p gelooft, en de andere $\neg p$, en beiden proberen de ander ervan te overtuigen van gedacht te veranderen. In principe gaat de dialoog voort tot het conflict is opgelost.

1. Andere types van dialogen die in [WK95] onderscheiden worden, zijn onderhandelings-dialogen en polemieken. De meeste dialogen tussen mensen kunnen vermoedelijk als een combinatie van deze zes basistypes worden gemodelleerd. Walton en Krabbe leggen er weliswaar de nadruk op dat ze niet claimen dat hun typologie uitputtend is.

Een dialoog van *onderzoek* start niet vanuit een conflict, maar vanuit een gebrek aan kennis. De twee participanten proberen het waar of vals zijn van een bepaalde propositie p aan te tonen. De dialoog stopt wanneer dit doel bereikt wordt, of als beide participanten beseffen dat ze geen bewijs voor het waar of vals zijn van p kunnen vinden.

Een *informatie-zoekende* dialoog lijkt sterk op een onderzoeksdialoog, maar er is een verschil in de beginvoorwaarden. Een informatie-zoekende dialoog start wanneer er een asymmetrie tussen de participanten bestaat, in die zin dat de ene participant denkt dat de andere over meer (of meer betrouwbare) informatie inzake een bepaald onderwerp beschikt dan hijzelf. Een typisch voorbeeld hiervan is een dialoog tussen een expert en een leek.

We zijn voornamelijk geïnteresseerd in combinaties van bovenstaande types van dialogen, zonder dat we deze in deze tekst gaan uitwerken. We willen enkel een kader schetsen waarbinnen de resultaten van de hoofdstukken 4, 5 en 6 kunnen geïnterpreteerd worden. In de rest van dit hoofdstuk besteden we eerst enige aandacht aan het Interrogatief Model van Hintikka. Daarna besteden we aandacht aan het dialoogmodel van Carlson. Tot slot gaan we in op enkele algemene kenmerken van menselijke redeneringen, en de rol van logica daarin.

Afspraak. We gebruiken "alss" (zowel in bewijzen als in doorlopende tekst) als afkorting voor "als en slechts als". De afkorting "wff" staat voor "well-formed formula" (welgevormde formule). Voor verzamelingen worden steeds Griekse hoofdletters gebruikt. Waar $\mathbf{L}$ een logica is, wordt de verzameling syntactische $\mathbf{L}$-gevolgen van Γ aangeduid met $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma)$, waarbij $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A\}$.

1.2. Het Interrogatief Model

Het Interrogatief Model van Hintikka [2] is een spel tussen “de Onderzoeker” en de “Natuur” (ook het “Orakel” genoemd). [3] De rol van de Natuur beperkt zich tot het passief beantwoorden van de vragen van de (actieve) onderzoeker. De Natuur of het Orakel wordt verondersteld steeds *ware* antwoorden te geven. In de eenvoudige versie van het model heeft de onderzoeker op elk stadium van het spel de keuze tussen twee zetten: een *deductieve* zet of een *interrogatieve* zet. Een deductieve zet houdt in dat de onderzoeker een formule afleidt uit de verzameling premissen waarover hij beschikt. Een interrogatieve zet komt erop neer dat de onderzoeker een vraag stelt aan de Natuur. Als de Natuur de vraag beantwoordt, wordt dit antwoord als nieuwe premisse aan de verzameling premissen toegevoegd.

Het interrogatief model van Hintikka is een uitwerking van het aloude idee dat we, om een hoofdvraag te kunnen beantwoorden, een aantal “kleinere” hulp-vragen moeten stellen en (proberen) beantwoorden. Het beantwoorden van die vragen komt vaak neer op het raadplegen van een externe bron van informatie (een database, een expert, een getuige, een labo, enzovoort). Het is duidelijk dat hulp-vragen moeten bijdragen tot het vinden van het juiste antwoord op de hoofdvraag. Hoe we tot die hulp-vragen kunnen komen, wordt door Hintikka niet echt beantwoord. Een (poging tot) antwoord op deze vraag wordt gegeven door de inferentiële erotetische logica van Wiśniewski (die we bespreken in het volgende hoofdstuk).

Hintikka gebruikt (een lichte variant op) de tableau-methode van Beth om de zetten van de Onderzoeker bij te houden. Bij het begin van het spel staat de verzameling initiële premissen T in de linkerkolom van het tableau, en de te onderzoeken conclusie C in de rechterkolom (de Onderzoeker probeert na te gaan of het mogelijk is dat T waar is en C vals). C moet opgevat worden als het antwoord op een zogenaamd “grote” vraag. De “kleine” vragen die de Onderzoeker aan de Natuur stelt, met het oog op het oplossen van de “grote” vraag, noemt Hintikka “operationele” vragen. Antwoorden op operationele vragen worden in de linkerkolom van het des-

2. Hintikka en zijn medewerkers hebben heel veel gepubliceerd over hun Interrogatief Model. Aangezien veel artikels eerder programmatisch zijn, en bovendien vaak overlappend, wijzen we hier enkel op (een greep uit) de belangrijkste publicaties: [Hin83], [Hin85], [Hin89], [HH95], [Hin96] en [Hin99].

3. Met de Natuur, of het Orakel, wordt eigenlijk — iets meer prozaïsch — een externe bron van informatie bedoeld.

betreffende subtableau toegevoegd. De tableau-regels voor de deductieve zetten zijn dezelfde als die voor Beth-tableaux. Voor de interrogatieve zetten stelt Hintikka een beperkt aantal regels voor. We geven een voorbeeld van de regel voor het afleiden van een alternatief-vraag:

> Als een disjunctie $S_1 \vee S_2$ voorkomt in de linkerkolom van een (sub)-tableau, mag de Onderzoeker deze gebruiken als de presuppositie van de vraag $(S_1 \vee S_2)?$. De twee mogelijke antwoorden zijn S_1 en S_2. Als de Natuur een van deze antwoorden geeft, dan mag het toegevoegd worden aan de linkerkolom van hetzelfde (sub)tableau.

Om een vraag in een interrogatieve zet te kunnen gebruiken, wordt (enkel) geëist dat de presuppositie van een vraag moet afgeleid zijn (als een gevolg van eerdere deductieve zetten, of als element van de initiële premissen). De onderzoeker kan vrij kiezen tussen een deductieve zet of een interrogatieve zet: de reeds bekomen presuppositie van een vraag kan gebruikt worden als een premisse voor een deductieve zet, of de ermee corresponderende vraag kan effectief worden gesteld. Mogelijk wordt op die manier nieuwe informatie bekomen, die dan weer kan gebruikt worden voor het maken van verdere afleidingen. De keuze tussen de verschillende zetten, alsook de keuze tussen de verschillende toegelaten vragen (waarvan de presuppositie dus is afgeleid), is een kwestie van *strategie*.

Hintikka legt heel sterk de nadruk op het belang van strategieën. Hij stelt bijvoorbeeld dat het stellen van een which-vraag (bijv. "Door wie werd Piet vermoord?") vanuit strategisch oogpunt voordeliger is dan het stellen van een ja-nee-vraag ("Werd Piet door Jan vermoord?"). Als een antwoord bekomen wordt op de which-vraag, bijv. "Isaac heeft Piet vermoord.", dan hebben we het individu dat we zochten, geïdentificeerd. Maar het is een hopeloze opgave ditzelfde individu te identificeren aan de hand van een reeks ja-nee vragen (in de veronderstelling dat we niet over bijkomende informatie over de verdachten beschikken). We weten immers niet waar we moeten beginnen (we kunnen moeilijk de ganse rij van mogelijke individuen aflopen). Veel verder gaan de strategieën van Hintikka echter niet. Jung ([Jun96, p. 97 e.v.]) stelt dit gebrek aan uitgewerkte strategieën terecht aan de kaak. Hoe de 'logica van Sherlock Holmes' er zou kunnen uitzien, kan — ondanks de titels van een aantal van zijn artikels — niet uit de geschriften van Hintikka worden opgemaakt.

In [HHM99] wordt de veronderstelling dat het Orakel enkel ware antwoorden geeft, opgegeven. De Onderzoeker kan beslissen om een verkregen antwoord 'tussen haakjes te plaatsen' (op een later stadium kan hij beslissen de haakjes weer weg te halen). Ook alle formules die met deductieve stappen bekomen werden en daarvoor steunden op het tussen haakjes geplaatste antwoord, moeten op hun beurt tussen haakjes geplaatst worden. Wanneer of in welke omstandigheden een formule tussen haakjes moet worden geplaatst, wordt een strategische beslissing genoemd. Het interrogatief model van Hintikka is dus, in zijn latere versies, uitgerust met een primitief systeem van 'belief revision'. In hoofdstuk 6 bestuderen we een veel complexer systeem van 'belief revision'.

Wiśniewski (in [Wiś03]) wijst terecht op een aantal tekortkomingen van het Interrogatief Model. In een interrogatief spel zijn er enkel *deductieve* inferenties. Vragen worden noch als premissen noch als gevolgen gebruikt. Vragen dienen enkel om nieuwe, relevante informatie in het spel te brengen (de hoofdvraag (eigenlijk een direct antwoord C daarop) bepaalt het doel van het spel). Er is dus geen sprake van *erotetische* inferenties, en dus ook niet van een echte onderliggende vraaglogica.

Daarnaast wijst Wiśniewski erop dat in het Interrogatief Model niet gegarandeerd wordt dat een afgeleide vraag ook nuttig is voor het beantwoorden van de hoofdvraag. Een vraag waarvan de presuppositie is afgeleid, kan gesteld worden of kan genegeerd worden. Als de vraag gesteld wordt, geeft het Orakel mogelijk een waar direct antwoord terug. Maar dit verkregen direct antwoord is mogelijk van geen enkel nut voor het beantwoorden van de hoofdvraag (omdat de vraag niet relevant of 'cognitief nuttig' was voor (het beantwoorden van) de hoofdvraag).

Wiśniewski zal hier eisen dat een goede hulp-vraag een vraag is waarvan *elk* direct antwoord potentieel nuttig moet zijn voor het beantwoorden van de hoofdvraag. Elk direct antwoord moet potentieel nuttig zijn, omdat we op voorhand niet kunnen weten welk direct antwoord van de vraag waar is, en we dus het risico moeten vermijden dat een van de directe antwoorden waar blijkt te zijn, maar niet nuttig is voor het beantwoorden van de hoofdvraag (zie hoofdstuk 2). In [Bat03b] wordt deze eis als te streng beoordeeld en vervangen door de eis dat minstens een van de directe antwoorden van de hulp-vraag potentieel nuttig is voor het beantwoorden van de hoofdvraag (cf. infra). In hoofdstuk 5 zullen we een aantal verschillende mogelijkheden bepalen.

In de volgende afdeling bespreken we het dialoogmodel van Carlson. Dit is in heel wat aspecten nauw verwant met het Interrogatief Model van Hintikka, en heeft ook een aantal vergelijkbare tekortkomingen. Maar het opzet van Carlsons dialoogmodel is zeer interessant.

1.3. Het dialoogmodel van Carlson

Carlson ([Car83]) vat een dialoog op als een spel. [4] De voornaamste elementen waardoor een dialoogspel wordt gekarakteriseerd zijn de volgende:

(1) het doel van het spel;

(2) het aantal spelers van het spel;

(3) de regels waaraan de spelers zich moeten houden; en

(4) de strategieën van de spelers.

Bij Carlson werken de spelers die deelnemen aan het dialoogspel steeds zo goed mogelijk samen om de gezamenlijke doelstelling te bereiken: het bekomen van een waar en informatief antwoord op een bepaald probleem of op een bepaalde vraag. Aan het dialoogspel nemen n spelers deel ($n \geqslant 1$). [5] De dialogen beperken zich tot vraag-antwoord-dialogen. De toegestane zetten bestaan dan ook enkel uit (het uiten van) declaratieve zinnen of (het stellen van) vragen. De spelers kunnen dus enkel informatie ontvangen, verwerken en verzenden. Andere mogelijke zetten, zoals bijv. het geven van bevelen of opdrachten, worden niet behandeld.

4. Dit idee was natuurlijk niet nieuw, zoals we net hebben gezien. Het is reeds terug te vinden bij Wittgenstein, en werd opgepikt door (onder meer) Hintikka (zie bijv. [Hin73], [HS79] en [Hin81]). Maar het idee is mijns inziens nog steeds het best en meest volledig uitgewerkt in [Car83]. Carlson is trouwens een leerling van Hintikka.

5. Als $n = 1$ hebben we te maken met een grensgeval, namelijk een monoloog (of een dialoog met zichzelf). Dat dit een grensgeval is, is relatief: elke speler zal immers 'gedwongen' worden om, in een dialoog met n spelers, de dialoog met zichzelf aan te gaan (cf. infra). De standaardsituatie is een dialoog tussen 2 spelers (dit kan nog vrij gemakkelijk gepresenteerd worden). Voor de uitbreiding naar n spelers (dus een eindig aantal), staan vooral praktische bezwaren in de weg, geen wetten.

Wat het opzet [6] van Carlson zo aantrekkelijk maakt, is dat de spelers geen geïdealiseerde actoren zijn. Van de spelers wordt bijv. niet verwacht dat ze steeds ware, consistente en volledige antwoorden kunnen geven op de vragen die aan hen gesteld worden. Spelers zijn zich niet van alle gevolgen van hun opvattingen bewust (er is geen deductieve sluiting). Als gevolg daarvan is het mogelijk dat twee spelers dezelfde opvatting A hebben, maar niet beiden de opvatting B hebben (hoewel B een logisch gevolg is van A). Het is toegelaten dat een speler inconsistente opvattingen heeft (zonder dat dit tot trivialiteit leidt). Het is ook toegelaten dat de opvattingen van de verschillende spelers incompatibel zijn met elkaar (zonder dat dit leidt tot trivialiteit). Een van de belangrijke functies van de dialoog tussen de spelers zal er juist in bestaan die 'tekortkomingen' in de verzameling opvattingen van elke speler bloot te leggen, en — indien mogelijk — weg te werken.

Een ander aantrekkelijk punt in het voorstel van Carlson is dat elke speler 'verantwoordelijk' is voor wat er met zijn verzameling opvattingen gebeurt. [7] Op elk stadium van de dialoog wordt een speler geacht zijn verzameling opvattingen uit te breiden, te wijzigen of er elementen uit te schrappen. Een speler voert deze operaties uit door een (interne) dialoog te voeren met zichzelf, en dus de dialoogregels toe te passen op zijn eigen opvattingen: het stellen van vragen, het proberen beantwoorden ervan door nieuwe afleidingen te maken, het afleiden van nieuwe vragen uit eerder gestelde vragen.

Een van de grote tekortkomingen van Carlsons model is dat er geen echte vraaglogica (die toelaat om vragen uit andere vragen af te leiden) voorzien is. [8] Een andere belangrijke tekortkoming is dat Carlson sterk de nadruk

---

6. Mijn enthousiasme wordt vooral opgewekt door de inleiding van Carlson ([Car83, pp. xiii–xxiii]), waarin hij zijn opzet uiteenzet, en door een aantal aspecten van de eerste 8 hoofdstukken. Over de logische uitwerking ben ik over het algemeen veel minder enthousiast: de uitwerking van de 'strategieën' is, zoals dit ook bij Hintikka steeds het geval is, nogal mager (om het op zijn zachtst te zeggen), en van een echte vraaglogica is, eveneens zoals bij Hintikka, niet echt sprake (cf. infra).

7. Carlson werkt hiervoor met 'kleine mogelijke werelden' (die inconsistenties kunnen bevatten), in de context van een epistemische logica. Op de concrete technische uitwerking van Carlsons model gaan we echter niet in.

8. Net als in het Interrogatief Model van Hintikka bestaat de vraag-'logica' erin dat, als de presuppositie van een vraag is afgeleid, die vraag mag gesteld worden.

legt op het belang van strategieën en relevantie, maar daar voor de rest uitermate vaag over blijft. [9]

De uitgangspunten van het dialoogmodel van Carlson zijn zeer interessant, de logische uitwerking ervan is dat veel minder. In wat volgt zullen we nagaan welke rol recent ontwikkelde niet-standaardlogica's kunnen spelen in de logische uitwerking van Carlsons model.

1.4. Welke rol kan een logica hier spelen?

Uit de (bondige) beschrijving van het model van Carlson kunnen we twee zeer belangrijke mechanismen distilleren die in quasi elke dialoog zullen spelen:

(1) het stellen van vragen en het geven van antwoorden;

(2) het wijzigen van de opvattingen van een speler doorheen het verloop van de dialoog. [10]

In een dialoog tussen twee (of meer) mensen worden vragen gesteld, worden vragen uit andere vragen afgeleid, worden vragen op een of andere manier beantwoord, wijzigen mensen, onder invloed van het gezegde, soms hun opvattingen, enzovoort. Doorgaans gaan al deze handelingen gepaard met redeneringen. Een logica [11] kan deze redeneringen op hun correctheid beoordelen. Een logica legt aan de hand van een aantal regels en definities vast wat een bewijs is van een gevolg uit een verzameling premissen. Bewijzen vormen dan *explicaties* voor (een bepaald type van)

9. We illustreren dit even aan de hand van [Car83, pp. 45–46], waar Carlson stelt dat relevantie het centrale concept moet zijn van een theorie van dialogen. In dat verband stelt hij dat de "Be relevant!"-maxime van Grice kan vervangen worden door de maxime "Be rational!". Vervolgens 'bepaalt' Carlson rationeel zijn als het volgen van de optimale strategie. De optimale strategie is die strategie waardoor je het best je doelstellingen bereikt. En daarmee is de kous af.

10. We hebben het model van Carlson als voorbeeld genomen, omdat het, ondanks de gebreken, qua uitgangspunten dicht aanleunt bij wat wij willen uitwerken. Er zijn echter talloze dialoogmodellen (partieel) ontwikkeld. Daarin spelen het stellen van vragen en het geven van antwoorden en een of andere lijst van opvattingen van elke speler die doorheen de dialoog kan wijzigen steeds een belangrijke rol.

11. Door het uiteenlopend karakter van de redeneerprocessen, en de veelheid van contexten, zal een veelheid aan logica's moeten worden ontworpen om de verschillende redeneringen te benaderen.

menselijke redeneringen. De term ‘explicatie’ is afkomstig van Carnap (zie [Car50, pp. 1–18]). De taak van een explicatie bestaat erin om een bepaald inexact concept te transformeren in een exact concept, waarbij de overeenkomst tussen de twee concepten niet volledig moet zijn. Zo is bijv. ‘H_2O’ een explicatie voor ‘water’. Een explicatie is, in tegenstelling tot het explicandum, helder en precies en vertoont sterke (maar daarom geen volledige) gelijkenissen met het explicandum. Een bewijs is helder en precies en vertoont sterke gelijkenissen met een (bepaald type van) feitelijke redenering. [12]

In de volgende afdeling gaan we kort in op de logica van vragen. Daarna gaan we kort in op ‘belief revision’. In de volgende hoofdstukken gaan we daar veel dieper op in.

1.5. Vraaglogica

De belangrijkste doelstelling van de eerste logici die zich met vragen bezig hielden (we denken vooral aan Harrah en Belnap) was een verzameling formele middelen te ontwikkelen, die geschikt waren voor een formalisering en de daaropvolgende analyse van de concepten vraag en antwoord, en de relaties ertussen. Heel vaak gebeurde de analyse tegen de achtergrond van mogelijke toepassingen, in de sfeer van het beantwoorden van vragen, of ‘information retrieval’. Dus vanaf het begin speelde het concept van een ‘database’ een belangrijke rol. Een vaak gebruikt beeld was het volgende: een vraagsteller formuleert een ‘query’, en de ‘ondervraagde’ zoekt het antwoord op in een database en formuleert het in een vorm die effectief de ‘query’ van de vraagsteller beantwoordt.

De participanten in een dialoog worden niet gedreven door een grenzeloze honger naar kennis. Ze zijn geïnteresseerd in een bepaald probleem of in een bepaalde topic. De problemen en topics van een dialoog kunnen worden gerepresenteerd door een aantal vragen. Hoe informatie bepaalde vragen doet rijzen, en hoe uit gerezen vragen andere vragen worden afgeleid, die nuttig zijn voor het beantwoorden van de eerste, wordt bestudeerd in de inferentiële erotetische logica van Wiśniewski. Deze wordt

12. Mijn opvattingen in deze paragraaf, over de rol van een logica, zijn in sterke mate gebaseerd op de opvattingen van Diderik Batens (zie bijv. [Bat03a]).

gepresenteerd in hoofdstuk 2. In hoofdstukken 4 en 5 ontwikkelen we een alternatieve benadering.

Volgens Manor ([Man82]) vereisen de maximes van Grice, als principes van conversationele coöperatie, dat als de persoon aan wie een vraag wordt gesteld niet in staat is een direct antwoord op de vraag te geven, deze dan (indien mogelijk) een eliminerend of een corrigerend antwoord zou moeten geven. [13] Ik denk dat dit bovendien moet uitgebreid worden naar conditionele en partiële antwoorden op de vraag. Aangezien steeds het sterkst mogelijke antwoord moet gegeven worden (maar niet meer dan dat) moet de antwoordende partij dus bij voorkeur een direct of corrigerend antwoord op de vraag geven; als dat niet mogelijk is, een partieel antwoord, vervolgens een conditioneel antwoord, en pas in laatste instantie een eliminerend antwoord.

Als de informatie verdeeld is over de verschillende spelers, en ze dus moeten samenwerken om tot een oplossing te kunnen komen, zijn *conditionele* en *partiële* antwoorden uiterst belangrijk, om toch tot een oplossing te kunnen komen. Samen met Rob Vanderbeken heb ik in [DV03] een logische procedure uitgewerkt om relevante conditionele antwoorden te genereren (in de context van een informatie-zoekende dialoog).

1.6. Belief revision

De opvattingen van een speler in een dialoog kunnen inconsistent zijn. De opvattingen van elke speler kunnen consistent zijn, maar een aantal opvattingen van verschillende spelers kunnen incompatibel of met elkaar inconsistent zijn. Sommige spelers zijn leken (op een domein, of op alle domeinen), en dus zijn hun opvattingen inzake een bepaald onderwerp niet zo betrouwbaar (hoewel ze het wel bij het rechte eind kunnen hebben), en andere spelers zijn experten in een domein, en dus worden hun opvattingen als zeer betrouwbaar ingeschat (hoewel ze zich vanzelfsprekend kunnen vergissen). De mogelijkheid dat ze dezelfde termen gebruiken om verschillende zaken aan te duiden (ambiguïteiten) laat ik nog buiten beschouwing. Hoe moet een speler nu omgaan met het verkregen antwoord op de door

13. De verschillende soorten antwoorden (directe, eliminerende, corrigerende, enz.) worden bepaald in hoofdstukken 2 en 5.

hem gestelde vraag, als dit antwoord bijvoorbeeld de presuppositie van zijn vraag tegenspreekt?

Ik ben er dan ook van overtuigd dat een vraaglogica, zeker als men die wil toepassen op dialogen, van weinig praktisch nut is als er geen mechanisme van 'belief revision' aan gekoppeld wordt. Vraaglogici als Belnap en Harrah hebben in hun vroege analyse steeds sterke interesse gehad voor vormen van 'belief revision'. We citeren in dit verband Groenendijk en Stokhof, die in dit citaat refereren aan het werk van Belnap en Harrah: "It is remarkable to note that many issues that form the core of important current developments in semantics and cognitive science, such as dynamics of reasoning, update and revision of belief, are already present in these early analyses, albeit not in the form in which they shape the debate today." ([GS96, p. 1097]). Deze aspecten worden in de inferentiële erotetische logica van Wiśniewski volledig genegeerd. In het laatste hoofdstuk gaan we op een aantal aspecten van 'belief revision' in.

1.7. Vertrouwde redeneervormen zonder positieve test

We weten dat, waar **CL** de volledige klassieke logica is, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$ niet beslisbaar is: er is geen algoritme om dit uit te maken. [14] We weten wel dat er een *positieve test* is voor $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$: er is een procedure die, *als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$, dit in een eindig aantal stappen aantoont. Maar er is geen *negatieve test* voor $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$ (of: er is geen positieve test voor $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} A$): er bestaat in het algemeen geen procedure die, *als* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} A$, dit in een eindig aantal stappen aantoont (indien $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} A$, dan is het mogelijk dat de procedure nooit stopt). Zolang de procedure niet is gestopt, kunnen we dus niet weten of ze binnen een eindig aantal stappen zal stoppen (en dan zouden we een **CL**-bewijs voor A uit Γ hebben), dan wel nog oneindig lang zal doorgaan. Aangezien mensen (en computers) vanzelfsprekend geen oneindige tijd ter beschikking hebben, hebben we een probleem. Zelfs al is er een positieve test voor $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$, dan nog kunnen we gemakkelijk in de problemen komen: vaak zal het ons aan tijd en vooral ook middelen

14. De ideeën die in deze afdeling uiteengezet worden zijn ontleend aan [Bat03a], en zijn gedeeltelijk terug te vinden in bijna elk artikel rond adaptieve logica's.

ontbreken om te wachten tot de procedure gestopt is. Ook in dit geval zitten we met een probleem, al weten we dat de procedure ooit zal stoppen (we weten alleen niet wanneer; misschien wel voor het einde van de wereld, maar ook dat is niet zeker).

Zowel in het alledaags als in het wetenschappelijk redeneren worden vaak redeneervormen gebruikt waarvoor zelfs *geen* positieve test bestaat (voor de onderliggende gevolgrelatie). Dit impliceert dat we niet zeker kunnen zijn dat de verkregen conclusies werkelijk uit de premissen volgen. Kunnen we dan nog van zinnig redeneren spreken? In elk geval niet als we de klassieke opvatting zouden aanhangen. Toch gebruiken mensen voortdurend dit soort redeneringen (inclusief aanhangers van de klassieke opvatting), en ze beschouwen ze (terecht) als rationeel verantwoord.

Veel redeneervormen doen direct of indirect een beroep op een consistentievoorwaarde, vaak onder de vorm van een eis inzake logische verenigbaarheid of compatibiliteit: het redeneren met *default*-regels, het construeren van verklaringen, inductieve generalisatie, het zo consistent mogelijk interpreteren van een theorie, het stellen van een diagnose, het uitbreiden van kennis en herzien van opvattingen (belief revision), enzovoort. Maar voor de consistentie-eis is er geen positieve test.

Redeneervormen waarvoor er geen positieve test is, verlopen niet overeenkomstig traditionele bewijzen. Een van de centrale aspecten van dergelijke redeneervormen is dat er dynamiek optreedt: steeds een interne dynamiek, en vaak ook een externe dynamiek.

De *externe* dynamiek ontstaat wanneer een gevolgrelatie *niet-monotoon* is: als de verzameling premissen wordt uitgebreid, kunnen een aantal (eerder aangetoonde) gevolgen wegvallen.

De *interne* dynamiek vloeit voort uit het feit dat we, naarmate we de premissen verder analyseren, ook een beter inzicht krijgen in de premissen, en daardoor soms een eerder gemaakte (tentatieve) conclusie moeten verwerpen. Hier is niets 'exotisch' aan, en voor de meeste mensen is het een zeer vertrouwd fenomeen: als iemand bijvoorbeeld iets moet beoordelen, komt hij of zij vaak vrij snel tot een (tentatief) besluit, dat evenwel bij een verder doordenken van het probleem, opnieuw wordt verworpen, ook al is er geen extra informatie bijgekomen. [15]

15. Met 'extra informatie' wordt in deze context bedoeld: informatie die niet reeds

De dynamiek houdt in dat conclusies *herzienbaar* zijn omdat nieuwe informatie beschikbaar is (externe dynamiek) of omdat er door logische analyse een beter inzicht in de premissen ontstaat (interne dynamiek). Het spreekt voor zich dat deze dynamiek niet steeds dezelfde richting uitgaat: conclusies die op een bepaald moment terecht (gegeven de analyse van de premissen op dat moment) worden getrokken, kunnen later even terecht (omwille van verdere analyse of extra informatie) worden verworpen, en nog later opnieuw terecht als correct worden beschouwd.

We zullen verder zien dat dynamische redeneervormen toelaten om rationele beslissingen te nemen. Een beslissing is een pragmatische categorie. Het kan daarom zinnig zijn om te beslissen op basis van een dynamische redenering, ook al is er een positieve test voor, omdat bijv. het doorlopen van de procedure die een positieve test oplevert, te duur is met betrekking tot de te nemen beslissing.

De klassieke notie 'bewijs' sluit beide vormen van dynamiek uit. Om op dynamische redeneervormen vat te krijgen zijn drie dingen noodzakelijk:

(1) de gevolgrelaties moeten op een technisch precieze manier worden bepaald;

(2) er moeten dynamische bewijzen worden ontwikkeld (die een explicatie leveren voor de feitelijke redeneringen); en

(3) de meta-theorie van deze logica's moet worden uitgewerkt.

In hoofdstukken 2, 4 en 5, waarin we het afleiden van vragen behandelen, komen we hier op terug.

logisch volgt uit de gegeven premissen. Omdat mensen geen logisch alwetende wezens zijn, is het onderscheid tussen 'extra informatie' en informatie die logisch volgt uit de premissen, maar tot op dat moment niet aan het licht was gebracht, eerder gradueel. Dit komt onder meer tot uiting bij het gebruik van een blokkensemantiek (zie [Bat95]), waar elke analyserende stap leidt tot een verdere inperking van de modellen van de premissen (volledig analoog aan wat er gebeurt wanneer een extra premisse wordt toegevoegd).

1.8. Inconsistente opvattingen

Als we in een informatie-zoekende dialoog met verschillende andere mensen, laat ons zeggen met de experts Jan en Piet, betrokken zijn, kunnen een aantal complicaties optreden:

(1) de opvattingen van een van de experts spreekt onze opvattingen tegen;

(2) Jan spreekt Piet tegen;

(3) een van de experts spreekt zichzelf tegen;

(4) we ontdekken dat we zelf inconsistente opvattingen hebben, en (minstens) een van de experts kan ons helpen de inconsistentie weg te werken;

(5) we ontdekken dat we zelf inconsistente opvattingen hebben, doch geen van beide experts kan ons helpen om de inconsistentie weg te werken.

In al deze gevallen zal (op een bepaald moment) (minstens tijdelijk) een inconsistentie afleidbaar zijn. Ongetwijfeld vragen een aantal mensen zich af of het werkelijk mogelijk is om alle leden van een inconsistente verzameling premissen werkelijk als waar te beschouwen.

De meeste mensen die geconfronteerd worden met inconsistente informatie zullen geneigd zijn, tenminste als ze het onderwerp voldoende belangrijk achten, om die inconsistenties uit hun opvattingen te verwijderen. Vaak gebeurt dit door een aantal eenvoudige mechanismen: het inwinnen van extra informatie, het inschatten van de betrouwbaarheid van de verschillende informatiebronnen, het negeren van die stukken informatie die incompatibel zijn met eigen opvattingen die men zeer betrouwbaar acht (of waaraan men hoe dan ook wil vasthouden, 'no matter what'), enzovoort. Deze mechanismen worden zo vaak toegepast, dat ze vaak quasi-automatisch en enigszins onbewust verlopen. Als echter niet meteen duidelijk is welke informatie kan worden behouden, en welke moet worden verworpen, worden de zaken heel wat complexer. [16]

16. Het proces-Dutroux, met de tegenstrijdige getuigenissen, halve waarheden en hele verzinsels van de beschuldigden, en de commotie die dit teweegbracht tussen 'believers' en 'disbelievers', tussen de onderzoeksrechter en het openbaar ministerie, is hiervan een treffende illustratie.

De meeste wetenschappelijke theorieën zijn ongetwijfeld consistent bedoeld. Als een wetenschapper ontdekt dat zijn theorie inconsistent is, zal hij ongetwijfeld op zoek gaan naar een consistent alternatief. Toch tonen verscheidene casestudies [17] uit de geschiedenis van de wetenschappen aan dat, ook als wetenschappers op zoek gaan naar een consistent alternatief voor een inconsistente theorie, dit niet gebeurt door eenvoudigweg een aantal elementen van de theorie overboord te gooien. Integendeel, zolang er geen 'goede redenen' zijn om de inconsistenties op een specifieke manier weg te werken, redeneren de wetenschappers verder met de inconsistente theorie (alsof ze waar is).

In hoofdstuk 6 zullen we een voorstel uitwerken waarin operaties van 'belief revision' ook zinnige resultaten opleveren wanneer ze worden toegepast op een verzameling inconsistente opvattingen. Het idee is dat men niet (wanhopig) moet proberen consistentie te forceren, als men onvoldoende informatie heeft om een inconsistentie op een verantwoorde manier weg te werken. Door consistentie te 'forceren', 'verliest' men vaak waardevolle informatie, waardoor men vaak slechter af is dan voorheen (een aantal problemen kan dan helemaal niet meer worden opgelost).

17. Zie bijvoorbeeld [Meh93] en [Smi88].

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 2

Inferentiële erotetische logica

2.1. Inleiding

Gedurende enkele decennia concentreerden vraaglogici zich hoofdzakelijk op de structuur van vragen, en op de relatie tussen vragen en antwoorden. [1] Aan het afleiden van vragen uit een verzameling premissen, en aan het afleiden van vragen uit andere vragen (steunend op een verzameling premissen), of kortweg aan *erotetische inferenties*, werd weinig aandacht besteed. Het belang van erotetische inferenties, zowel voor wetenschappelijk onderzoek als voor redeneren en het oplossen van problemen in het algemeen, is nochtans groot. Het verklaren van nieuwe fenomenen, het 'ontdekken' van nieuwe wetten en theorieën, en het uitdenken van experimenten steunen vaak op het afleiden van vragen. Ook in een aantal computertoepassingen, bijvoorbeeld expertsystemen voor diagnose, is het belang van het afleiden van (nuttige) vragen duidelijk. Ook in het oplossen van alledaagse problemen (bijv. je weg vinden in een vreemde stad, of het proberen herstellen van je auto, of het proberen achterhalen of iemand liegt), en in leerprocessen (bijv. het begeleiden van een student die beweert

1. Een degelijk overzicht van de belangrijkste vraaglogica's kan men vinden in het tweede hoofdstuk van [Wiś95], en ook in het overzichtsartikel van David Harrah [Har02]. Een goed overzicht van de eerder linguïstisch georiënteerde benaderingen vindt men in [GS96].

'er geen bal van te snappen'), neemt het afleiden van vragen een centrale plaats in. Aan de hand van de geschetste toepassingen ziet men onmiddellijk dat een aantal mechanismen belangrijk zijn: het lokaliseren van een probleem, het opsplitsen en lokaliseren van (relevante) deelproblemen, het stap voor stap oplossen van de (relevant geachte) deelproblemen.

Ondanks hun overduidelijk belang werd pas vrij recent aandacht besteed aan erotetische inferenties. De centrale bijdrage hiertoe is de inferentiële erotetische logica van Wiśniewski. Wiśniewski heeft een aantal intuïties achter Hintikka's Interrogatief Model (cf. hoofdstuk 1) veralgemeend en gesystematiseerd. Wiśniewski's theorie levert een aantal erotetische concepten, waarvan *vraag-evocatie* en *erotetische implicatie* de belangrijkste zijn. Deze concepten leveren een explicatie, in semantische termen, van het *rijzen van een vraag*. Deze explicaties steunen op Wiśniewski's vaststelling dat, als een vraag rijst (opgeroepen wordt door bepaalde informatie, of door een andere vraag en bepaalde informatie), er dan in veel gevallen *logische* relaties bestaan tussen de informatie, de gerezen vraag en de vraag die de vraag doet rijzen. In veel gevallen is het dus niet de inhoud, maar wel de logische vorm van vragen en beweringen die toelaat om te stellen dat een vraag bijv. rijst uit een andere vraag. Wiśniewski besteedt dus enkel aandacht aan die erotetische inferenties die een bepaalde (logische) structuur hebben (die tot uiting komt in het bestaan van een aantal logische relaties tussen de premissen (declaratieve wffs en eventueel een vraag) en de conclusie (een vraag)).

In dit hoofdstuk focussen we uitsluitend op de Inferentiële Erotetische Logica van Wiśniewski. Het uitputtend [2] karakter van Wiśniewski's publicaties noopt ons tot een ongenuanceerde en enigszins eenzijdige weergave ervan. We zullen ons voornamelijk concentreren op twee centrale concepten van zijn theorie, evocatie en erotetische implicatie, en ons in de presentatie ervan beperken tot de klassieke logica. Bovendien zullen we slechts aandacht besteden aan twee (belangrijke) soorten vragen. Dat we geen aandacht zullen besteden aan de andere soorten vragen die door Wiśniewski (en andere vraaglogici) [3] behandeld worden, wil helemaal niet

2. Iedereen die enigszins vertrouwd is met zijn werk, kent de genadeloze opeenvolging van definities, alternatieve definities, alternatieve bepalingen voor andere formele talen, en de ellenlange lijst theorema's waarin de verbanden tussen dit alles worden bewezen.
3. Vraaglogici hebben steeds veel aandacht besteed aan het definiëren van een ganse waaier van vragen, teneinde zoveel mogelijk vragen uit de natuurlijke taal formeel te kunnen uitdrukken. De belangrijkste bijdragen hiertoe zijn die van Belnap ([BS76]) en

zeggen dat we dit aspect onbelangrijk vinden, wel integendeel. Maar de problemen die zullen opgeworpen worden voor 'eenvoudige' vragen, gelden evenzeer voor de meer 'gesofisticeerde' vragen.

In het tweede deel van dit hoofdstuk wijzen we op een aantal tekortkomingen van Wiśniewski's theorie.

2.2. Intuïties

Om te illustreren waarvoor de erotetische concepten van Wiśniewski een explicatie proberen te geven, vertrekken we van een aantal zeer eenvoudige voorbeelden.

Stel dat we over de volgende informatie beschikken: "Als K. twaalf uur per dag werkt, dan is hij een succesvol zakenman, of een jonge logicus, of een slechte planner of een dwangarbeider" en "K. werkt twaalf uur per dag". Dan 'volgt' hieruit de vraag: "Is K. een succesvol zakenman, of een jonge logicus, of een slechte planner, of een dwangarbeider?"

Uit de informatie "Iemand heeft voor het examen algebra 18 op 20 behaald." kan de vraag "Wie heeft voor het examen algebra 18 op 20 behaald?" 'afgeleid' worden.

In bovenstaande voorbeelden gebeurt eigenlijk het volgende: de premissen "doen de vraag rijzen", gegeven de premissen "dringt de vraag zich op", niet om pragmatische redenen, maar om 'logische redenen'. Daarbij vallen twee dingen op te merken. Ten eerste, als een (direct) antwoord op een vraag reeds volgt uit onze informatie, zal die vraag zich niet opdringen. Ten tweede, als de premissen waar zijn, dan zal ook een direct antwoord op de gerezen vraag waar zijn (niets sluit in het eerste voorbeeld uit dat meerdere directe antwoorden op de vraag waar zijn). Met zijn concept *evocatie* geeft Wiśniewski een explicatie van het niet-pragmatisch rijzen van een vraag uit een verzameling declaratieve zinnen (het is niet de inhoud, maar de logische vorm van de zinnen die ervoor zorgt dat een vraag zich opdringt).

We geven ook een voorbeeld van erotetische implicatie. Uit de initiële

Kubiński (voor een overzicht, zie [Wiś95]).

vraag "Wie heeft voor Nederland het tweede doelpunt gescoord?" rijst, op basis van de premisse "Het tweede doelpunt voor Nederland werd gemaakt door de maker van de own goal in de vorige match", de (afgeleide) vraag "Wie maakte in de vorige match een own goal?". We gebruiken de termen *initiële vraag* en *hulp-premissen* om te verwijzen naar de vraag en de declaratieve zinnen waaruit een afgeleide vraag rijst.

Het voorbeeld illustreert de volgende eigenschap:

> (*) *Als* de initiële vraag een waar direct antwoord heeft, en alle hulp-premissen waar zijn, dan *moet* ook de gerezen vraag een waar direct [4] antwoord hebben.

Als een speler van Nederland, bijv. S., het tweede doelpunt heeft gescoord, en als het waar is dat diegene die het tweede doelpunt gescoord heeft, de maker is van de own goal in de vorige match, dan moet het waar zijn dat S. de own goal scoorde in de vorige match.

Het voorbeeld illustreert ook de volgende eigenschap:

> (**) Elk waar direct antwoord op een gerezen vraag geeft ons, als alle hulp-premissen waar zijn, de garantie dat een waar direct antwoord van de initiële vraag behoort tot een welbepaalde *echte deelverzameling* van de verzameling van alle directe antwoorden van de initiële vraag.

Als het waar is dat een speler van Nederland, bijv. K., de own goal maakte in de vorige match, en als het waar is dat de speler die het tweede doelpunt scoorde de maker van de own goal in de vorige match is, dan is het waar dat K. de tweede goal scoorde.

Na deze eenvoudige voorbeelden concentreren we ons op de formele benadering.

4. Met een direct antwoord op een vraag wordt een mogelijk en juist-voldoende antwoord bedoeld (zie verder).

2.3. Afspraken

Hoewel Wiśniewski's definities van erotetische concepten dit helemaal niet vereisen (en juist zeer algemeen zijn), concentreert Wiśniewski zich haast uitsluitend op vraaglogica's die gebaseerd zijn op de klassieke logica **CL**, of op het ω-volledig fragment ervan, $\mathbf{CL}^*$. [5] We zullen de concepten van Wiśniewski dan ook niet in hun meest algemene vorm (geschikt voor een veelheid van formele talen) presenteren, maar in een vorm die geschikt is voor (de formele taal van) de onderliggende logica's **CL** en $\mathbf{CL}^*$. [6] In de meest algemene karakterisering van zijn erotetische concepten legt Wiśniewski aan de formele vorm van vragen slechts minimale eisen op. [7]

Om zijn concepten zo algemeen mogelijk te formuleren, doet Wisńiewski een beroep op twee concepten uit [SS78]: *partities* en *multiple-conclusion entailment*. Het gebruik van partities laat toe om een semantische afleidbaarheidsrelatie ('entailment') te bepalen onafhankelijk van een specifiek type van semantiek. [8] 'Multiple-conclusion entailment' is een gevolgrelatie die algemener is dan de klassieke gevolgrelatie. [9] Mits het opleggen van een aantal beperkingen, kan het gebruik van 'multiple-conclusion entailment' —voortaan spreken we van m.c.-afleidbaarheid— worden vermeden, en vervangen worden door de klassieke notie afleidbaarheid. In de rest van dit hoofdstuk staan $\vDash_{\mathbf{CL}}$ en $\Vdash_{\mathbf{CL}}$ respectievelijk voor semantische **CL**-afleidbaarheid en semantische m.c.-afleidbaarheid (de uitbreiding

5. Een **CL** model M is een $\mathbf{CL}^*$-model (een ω-volledig **CL**-model) alss alle elementen van het domein van M een naam hebben (aan elk element van het domein wordt (minstens) één constante toegekend). Een $\mathbf{CL}^*$-model verifieert $(\exists x)Ax$ alss het model een wff $A\alpha$ verifieert, voor een of andere $\alpha \in \mathcal{C}$ (waarbij $\mathcal{C}$ de verzameling constanten is).

6. Voor de algemene formulering verwijs ik naar [Wiś95].

7. Deze minimale eisen zijn de volgende. (1) Elke vraag heeft minstens twee directe antwoorden. (2) De directe antwoorden van een vraag zijn declaratieve wffs (d-wffs) van de taal $\mathcal{L}$ (dit is de taal van de onderliggende logica, die samenvalt met het declaratief (i.e. niet-erotetisch) gedeelte van de vraaglogica). (3) Elke eindige verzameling van minstens twee d-wffs is de verzameling van directe antwoorden van een vraag.

8. De enige vereiste is dat de semantiek voldoende rijk is om een waarheidsconcept te kunnen definiëren.

9. Het gebruik van 'multiple-conclusion entailment' vloeit voort uit Wiśniewski's opvatting dat de verzameling van directe antwoorden op een vraag neerkomt op een verzameling mogelijkheden of alternatieven, waaruit een selectie moet worden gemaakt. Het 'afleidbaar zijn van een verzameling mogelijkheden' kan worden uitgedrukt met 'multiple-conclusion entailment'. Multiple-conclusion entailment wordt uitgebreid geanalyseerd in [SS78].

van semantische **CL**-afleidbaarheid naar verzamelingen van gevolgen, en dus gebaseerd op **CL**-modellen); en $\vDash_{\mathbf{CL}^*}$ en $\Vdash_{\mathbf{CL}^*}$ respectievelijk voor semantische **CL***-afleidbaarheid en semantische m.c.*-afleidbaarheid (de uitbreiding van semantische **CL***-afleidbaarheid, en dus gebaseerd op (ω-volledige) **CL***-modellen). In een definitie zullen we soms $\vDash$ en $\Vdash$ gebruiken (dus zonder de specificatie **CL** of **CL***). Dan moet die definitie als een 'samenvatting' gezien worden van twee definities: namelijk een definitie voor **CL** en een definitie voor **CL***. $\mathcal{W}$ en $\mathcal{F}$ staan respectievelijk voor de verzameling wffs en de verzameling formules van **CL** (en dus ook van **CL***).

2.4. Soorten vragen

We beperken ons in dit kort overzicht tot twee soorten vragen. Zoals reeds vermeld, wordt door Wiśniewski een ganse waaier van (meer gesofisticeerde) vragen gedefinieerd. [10] Vraaglogici hebben steeds veel aandacht besteed aan het ontwerpen van gesofisticeerde vragen, maar omdat ze niet echt iets toevoegen aan wat ons hier interesseert, namelijk het afleiden van vragen uit andere vragen en/of premissen, besteden we er geen aandacht aan. Hoe-vragen en waarom-vragen, waarvan de verzameling directe antwoorden niet zomaar (of zelfs helemaal niet) kan worden bepaald, worden door Wiśniewski niet behandeld.

Een *vraag van de eerste soort* is een uitdrukking van de vorm $?\{A_1, \ldots, A_n\}$, waarbij $n > 1$ en $A_1, \ldots, A_n$ syntactisch verschillende wffs zijn van $\mathcal{W}$. $A_1, \ldots, A_n$ zijn de *directe* antwoorden op de vraag. Het hoofdkenmerk van vragen van de eerste soort is dat hun verzameling directe antwoorden steeds *eindig* is. We geven enkele voorbeelden van vragen van de eerste soort:

$?\{A, \neg A\}$	"Is A het geval?"
$?\{\neg A, A \wedge B, A \wedge \neg B\}$	"Is A het geval?; indien ja, is dan ook B het geval?"
$?\{Pa, (\exists x)(Px \wedge x \neq a)\}$	"Is het a die eigenschap P heeft?"

10. Zie bijv. [Wiś95, pp. 77–83], waar zogenaamde open vragen van de tweede soort, algemene vragen van de tweede soort, alsook vragen van de derde soort worden bepaald. Deze meer gesofisticeerde vragen laten bijvoorbeeld toe om het gewenste aantal antwoorden te specificeren (zoals "Wie was er allemaal op het feestje?", of "Welke getallen tussen 1 en 100 zijn priemgetallen? Geef er minstens 8.").

Deze vragen worden ook *alternatief*-vragen genoemd, omdat ze vragen een keuze te maken tussen de (door de vraag) gepresenteerde alternatieven. Alle ja-nee vragen (vragen van de vorm $?\{A, \neg A\}$) zijn vragen van de eerste soort.

Een *existentiële vraag van de tweede soort* is een uitdrukking van de vorm $?\mathbf{S}(A(x_1, \ldots, x_n))$, waarbij **S** een erotetische constante is, en $A(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$ een formule is met $x_1, \ldots, x_n$ als enige vrije variabelen. [11] Als we het hebben over een vraag van de tweede soort, zullen we steeds doelen op een existentiële vraag van de tweede soort. Vragen van de tweede soort zijn zogenaamde W-vragen: “Wie?”, “Wat?”, “Waar?”, “Wanneer?” (maar niet “Waarom?”).

De directe antwoorden op een vraag van de vorm $?\mathbf{S}(A(x_1, \ldots, x_n))$ vallen onder het volgende schema: [12] $A(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$, waar $c_1, \ldots, c_n$ constanten zijn (die niet noodzakelijk van elkaar verschillen). Op metaniveau wordt de verzameling van directe antwoorden op een vraag van de vorm $?\mathbf{S}(A(x_1, \ldots, x_n))$ aangeduid met $\mathbf{S}(A(x_1, \ldots, x_n))$. Het belangrijkste kenmerk van existentiële vragen van de tweede soort is dat ze een (aftelbaar) oneindig aantal directe antwoorden hebben. Elke vraag van de vorm $?\mathbf{S}(A(x_1, \ldots, x_n))$ kan gelezen worden als “Welk n-tupel $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ is zodanig dat $A(x_1, \ldots, x_n)$?”.

Waar Q een vraag is van de eerste of de tweede soort, staat dQ voor de verzameling directe antwoorden van Q.

2.5. De logische basis

Zij $\mathcal{L}$ de standaardtaal van **CL** (en van **CL***). We bekomen $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ door $\mathcal{L}$ uit te breiden met de erotetische constanten $?, \{, \}$ en **S**. De declaratieve wffs van $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ zijn de wffs van $\mathcal{L}$. De erotetische wffs van $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}$ zijn de vragen van de eerste en de tweede soort (zoals hierboven bepaald). Gemengde formules (die zowel declaratieve als erotetische sub-wffs bevatten) zijn niet

11. In hoofdstuk 4 zullen deze existentiële vragen van de tweede soort eenvoudigweg vragen van de tweede soort genoemd worden. Ze worden daar uitgedrukt als $(?\alpha_1) \ldots (?\alpha_n) A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
12. Elke wff die kan worden bekomen door de vrije variabelen op gepaste wijze te substitueren door constanten.

welgevormd. Semantische afleidbaarheid en m.c.-afleidbaarheid worden bepaald ten opzichte van (de declaratieve taal) $\mathcal{L}$:

Definitie 1. *A is een* semantisch **CL**-gevolg *van* Γ ($\Gamma \vDash_{\mathbf{CL}} A$) *alss A geverifieerd wordt door alle* **CL***-modellen van* Γ.

Definitie 2. *A is een* semantisch $\mathbf{CL}^*$-gevolg *van* Γ ($\Gamma \vDash_{\mathbf{CL}^*} A$) *alss A geverifieerd wordt door alle ω-volledige* **CL***-modellen van* Γ.

Definitie 3. *De verzameling Δ is een* m.c.-afleidbaar *uit* Γ ($\Gamma \Vdash_{\mathbf{CL}} \Delta$) *alss elk* **CL***-model van Γ minstens één element van Δ verifieert.*

Definitie 4. *De verzameling Δ is m.c.**-afleidbaar *uit* Γ ($\Gamma \Vdash_{\mathbf{CL}^*} \Delta$) *alss elk* $\mathbf{CL}^*$*-model van Γ minstens één element van Δ verifieert.*

2.6. Basisbegrippen

In deze afdeling voeren we een aantal definities in die we nodig zullen hebben voor het uiteenzetten van Wiśniewski's theorie. Alle definities zijn afkomstig uit [Wiś95]. Als we de termen "model", "afleidbaar", "m.c.-afleidbaar", "equivalent", enz. gebruiken zonder een specifieke logica te vermelden, kan zowel **CL** als $\mathbf{CL}^*$ (op coherente wijze) worden ingevuld. [13]

In Wiśniewski's theorie wordt aan vragen geen waarheidswaarde toegekend. In plaats daarvan is een vraag al dan niet *gegrond* ('sound') in een model:

Definitie 5. *Een vraag Q is* gegrond *in een model alss minstens één direct antwoord waar is in dat model.*

Definitie 6. *Een vraag Q is* veilig *alss Q gegrond is in elk model; anders is Q riskant.*

Hieruit volgt dat een vraag Q *veilig* is alss geldt dat $\varnothing \Vdash dQ$; anders is Q riskant. Ja-nee vragen [14] en vragen met een tautologie als direct antwoord

13. De eerstvolgende definitie bepaalt dus het gegrond zijn in een **CL**-model, en het gegrond zijn in een $\mathbf{CL}^*$-model.
14. Een vraag Q is een (eenvoudige) ja-nee vraag alss Q exact twee directe antwoorden A en $\neg A$ heeft (waarbij $A \in \mathcal{W}$).

zijn typische voorbeelden van veilige vragen. Vragen als $?\{p, q\}$ en $?\mathbf{S}(Px)$ zijn voorbeelden van riskante vragen.

Voor het definiëren van de notie *presuppositie* van een vraag neemt Wiśniewski het voorstel van Belnap over (zie [Bel69] en [BS76]):

Definitie 7. *Een d-wff A is een* presuppositie *van een vraag Q alss A afleidbaar is uit elk direct antwoord van Q.*

Een presuppositie van een vraag is dus een d-wff die moet waar zijn, wil de vraag een waar direct antwoord hebben (gegrond zijn). Met andere woorden, het waar zijn van elke presuppositie van een vraag Q is een noodzakelijke voorwaarde voor het gegrond zijn van Q. De verzameling presupposities van een vraag Q wordt *PresQ* genoemd. Merk op dat *PresQ*, voor om het even welke vraag Q, minstens alle tautologieën bevat, en dus nooit leeg is.

In een aantal gevallen is de waarheid van een presuppositie niet enkel een noodzakelijke, maar ook een voldoende voorwaarde voor het gegrond zijn van een vraag. Daartoe introduceert Wiśniewski het concept *prospectieve presuppositie* van een vraag:

Definitie 8. *Een presuppositie A van een vraag Q is een* prospectieve presuppositie *van Q alss $A \Vdash dQ$.*

Een ware prospectieve presuppositie van een vraag garandeert dus het bestaan van een waar direct antwoord op die vraag. Met *PPresQ* wordt de verzameling prospectieve presupposities van een vraag Q aangeduid. Niet elke vraag heeft prospectieve presupposities (cf. infra). Elke vraag Q met een *eindig* aantal directe antwoorden heeft een niet-lege verzameling prospectieve presupposities: de disjunctie van alle directe antwoorden van Q is steeds een prospectieve presuppositie van Q. Als een vraag prospectieve presupposities heeft, dan zijn al deze prospectieve presupposities equivalent.

Definitie 9. *Een presuppositie A van een vraag Q is een* maximale presuppositie *van Q alss elke presuppositie van Q afleidbaar is uit A.*

De verzameling van maximale presupposities van een vraag Q wordt *mPresQ* genoemd. Elke vraag Q met een *eindig* aantal directe antwoorden heeft steeds maximale presupposities: elke disjunctie van alle directe antwoorden van Q is een maximale presuppositie van Q.

Wiśniewski ([Wiś95, p. 116]) toont aan dat voor elke vraag Q geldt dat $PPresQ \subseteq mPresQ$. De verzamelingen vallen niet samen, omdat er vragen zijn die een maximale presuppositie hebben, maar geen prospectieve presuppositie. We geven een eenvoudig voorbeeld, waarbij **CL** de onderliggende logica is: de vraag $?\mathbf{S}(Px)$ heeft een maximale presuppositie $(\exists x)Px$, [15] maar dit is geen prospectieve presuppositie van de vraag. Er zijn immers **CL**-modellen waarin $(\exists x)Px$ waar is, maar waarin geen enkele formule $P\alpha$, waarbij $\alpha \in \mathcal{C}$, waar is (waarin dus geen enkel direct antwoord van $?\mathbf{S}(Px)$ waar is).

Op basis van het al dan niet hebben van bepaalde presupposities, worden door Wiśniewski een aantal eigenschappen van vragen bepaald.

Definitie 10.
Een vraag Q is normaal *alss de verzameling van directe antwoorden van Q m.c.-afleidbaar is uit de verzameling presupposities van Q.*

Of een vraag normaal of abnormaal is, hangt af van de onderliggende logica. Zo is de vraag $?\mathbf{S}(Px)$ abnormaal als **CL** de onderliggende logica is, maar het is een normale vraag als $\mathbf{CL}^*$ de onderliggende logica is. [16] Elke vraag van de eerste soort is normaal. Ook elke veilige vraag is normaal.

Daarnaast bepaalt Wiśniewski wanneer een vraag *regelmatig* ('regular') is.

Definitie 11. *Een vraag Q is* regelmatig *alss $PPresQ \neq \emptyset$; anders is de vraag* onregelmatig.

Of een vraag regelmatig is, hangt opnieuw af van de onderliggende logica. Een vraag van de eerste soort is echter steeds regelmatig. Elke regelmatige vraag is ook steeds een normale vraag. Als de afleidbaarheidsrelatie compact is, dan is ook elke normale vraag een regelmatige vraag. [17]

15. Dat $(\exists x)Px$ een maximale presuppositie is van $?\mathbf{S}(Px)$ wordt aangetoond in [Wiś95, p. 117].
16. In het ω-volledig fragment van **CL**, $\mathbf{CL}^*$, geldt voor elk model M dat $v_M((\exists x)Px) = 1$ alss $v_M(P\alpha) = 1$ voor een of andere $\alpha \in \mathcal{C}$. Daaruit volgt dat de verzameling van directe antwoorden van $?\mathbf{S}(Px)$ m.c.-afleidbaar is uit $(\exists x)Px$.
17. Voor de soorten vragen die wij zullen behandelen vallen de concepten van *normale*

We hebben nu voldoende instrumenten ter beschikking om Wiśniewski's erotetische concepten te presenteren en te analyseren. We besteden aandacht aan evocatie, generatie en erotetische implicatie.

2.7. Evocatie en generatie van vragen

2.7.1. Definities

Een vraag Q wordt geëvoceerd door een verzameling declaratieve zinnen Γ alss

(1) Q *gegrond* [18] ('sound') is t.o.v. Γ en

(2) Q *informatief* is t.o.v. Γ.

Intuïtief is aan de eerste vereiste voldaan alss Q een waar direct antwoord heeft als alle leden van Γ waar zijn. Aan de tweede vereiste is voldaan alss geen enkel direct antwoord op de vraag Q uit Γ afleidbaar is. Formeel leidt dit tot de volgende definitie:

Definitie 12. *Een vraag Q wordt* geëvoceerd *door een verzameling declaratieve wffs Γ alss*

(1) $\Gamma \Vdash dQ$, *en*

(2) *voor elke* $A \in dQ, \Gamma \nvDash A$.

Deze definitie van evocatie vat zowel evocatie van *regelmatige* vragen als die van *onregelmatige* vragen. Als we enkel regelmatige vragen (die dus steeds een prospectieve presuppositie hebben) in overweging nemen, kunnen een aantal vereenvoudigingen worden aangebracht. [19] Uit definitie 8

vragen en *regelmatige* vragen volledig samen (onafhankelijk van het al dan niet compact zijn van de onderliggende logica), maar dit is niet voor alle soorten vragen het geval (zie [Wiś95, pp. 124–125]).

18. Dit gegrond zijn van een vraag t.o.v. een verzameling premissen mag niet verward worden met het (eerder bepaalde) gegrond zijn van een vraag in een model.

19. Dit is een optie die gevolgd wordt in [Meh01]. Het werken met regelmatige vragen heeft het voordeel dat, als een vraag Q gegrond is t.o.v. een verzameling premissen Γ, dit steeds kan aangetoond worden met een eindig bewijs uit Γ.

volgt dat definitie 12 voor regelmatige vragen kan vereenvoudigd worden tot:

Definitie 13. *Een regelmatige vraag Q wordt* geëvoceerd *door een verzameling declaratieve wffs Γ alss*

(1) *er is een $A \in PPresQ$ zodat $\Gamma \vDash A$, en*

(2) *voor elke $B \in dQ$, $\Gamma \nvDash A$.*

We wijzen er op dat evocatie voor **CL** ook kan bepaald worden als: [20]

Theorema 1. *Een vraag Q wordt geëvoceerd door een verzameling premissen Γ alss*

(1) *er zijn $A_1, \ldots, A_k \in dQ$, $k \geqslant 2$, zodanig dat $\Gamma \vDash_{\mathbf{CL}} A_1 \vee \ldots \vee A_k$, en*

(2) *voor elke $A \in dQ$ geldt dat $\Gamma \nvDash_{\mathbf{CL}} A$.*

Als **CL** de onderliggende logica is, wordt de vraag $?\mathbf{S}(Px)$ niet geëvoceerd door $\Gamma = \{(\exists x)Px\}$. [21] Vragen van de tweede soort die toch geëvoceerd worden door Γ, zijn in zekere zin overbodig, omdat steeds ook een vraag van de eerste soort door Γ geëvoceerd wordt, die ingesloten [22] is in de eerste vraag. We geven een eenvoudig voorbeeld: als $\Gamma = \{Pa \vee Pb\}$, dan wordt $?\mathbf{S}(Px)$, een vraag van de tweede soort, door Γ geëvoceerd. Maar ook de vraag $?\{Pa, Pb\}$ wordt gevöceerd door Γ, en bovendien is haar verzameling directe antwoorden een eindige deelverzameling van de (oneindige) verzameling directe antwoorden van $?\mathbf{S}(Px)$.

Als de onderliggende logica compact is, dan zijn oneindige vragen (vragen met een oneindige verzameling directe antwoorden) eigenlijk overbodig (wat evocatie betreft). Voor elke oneindige vraag Q_1 die geëvoceerd wordt op basis van een verzameling premissen X en een onderliggende compacte logica, wordt immers ook een eindige vraag Q_2 door X geëvoceerd waarvoor geldt dat $dQ_2 \subset dQ_1$.

20. Het theorema wordt bewezen in [Wiś95, p. 138], voor elke compacte logica. Daarom geldt deze bepaling enkel voor **CL**, en niet voor $\mathbf{CL}^*$.
21. Omdat de eerste voorwaarde niet voldaan is: $(\exists x)Px$ kan niet garanderen dat de vraag $?\mathbf{S}(Px)$ gegrond is t.o.v. Γ.
22. Een vraag Q_1 is ingesloten in een vraag Q_2 alss $dQ_1 \subset dQ_2$.

Elke willekeurige veilige vraag Q waarvan geen enkel direct antwoord afleidbaar is uit Γ, wordt door Γ geëvoceerd. Het overgrote deel van die vragen is echter irrelevant voor Γ. Zij bijv. $\Gamma = \{p \vee q\}$. Dan worden onder meer de volgende veilige vragen door Γ geëvoceerd: $?\{p, \neg p\}$, $?\{q, \neg q\}$, $?\{t, \neg t\}$, $?\{r, s, \neg r, \neg s\}, \ldots$ Het is duidelijk dat enkel de eerste twee vragen relevant zijn voor Γ.

Om te vermijden dat willekeurige veilige vragen uit Γ kunnen worden afgeleid, voert Wiśniewski het concept *generatie* van een vraag door een declaratieve verzameling in. De bepaling van generatie is strenger dan die van evocatie, en komt neer op evocatie van riskante vragen:

Definitie 14. *Een vraag Q wordt* gegenereerd *door een verzameling declaratieve zinnen Γ alss:*

(*1*) *Q is* gegrond *t.o.v. Γ,*

(*2*) *Q is* informatief *t.o.v. Γ, en*

(*3*) *Q is niet gegrond t.o.v. $\varnothing$.*

Als we enkel rekening houden met regelmatige vragen, krijgen we: [23]

Definitie 15. *Een regelmatige vraag Q wordt* gegenereerd *door een verzameling declaratieve zinnen Γ alss:*

(*1*) *er is een prospectieve presuppositie A van Q waarvoor geldt dat $\nvDash A$ en $\Gamma \vDash A$,*

(*2*) *voor elke voor elke $B \in dQ$, $\Gamma \nvDash B$.*

2.7.2. Opmerkingen

In deze afdeling wijs ik op een aantal bijzondere eigenschappen van evocatie en generatie, en geef ik een aantal punten van kritiek (die specifiek op de concepten evocatie en generatie slaan). Algemene kritiek op Wiśniewski's theorie geef ik na de afdeling over erotetische implicatie.

23. Dit wordt aangetoond in [Wiś95, pp. 163–164]. Voorwaarde (3) van de vorige definitie wordt opgenomen in voorwaarde (1) van de nieuwe definitie.

Zowel evocatie als generatie zijn *niet-monotone* noties. Het is de tweede voorwaarde (de vraag Q moet informatief zijn t.o.v. Γ) die daarvoor verantwoordelijk is. Zo wordt de vraag $?\{p, q\}$ door $\Gamma = \{p \vee q\}$ geëvoceerd, maar deze vraag wordt niet geëvoceerd door $\Gamma \cup \{p\}$ (de vraag is immers niet langer informatief). De vraag $?\{q, \neg q\}$ wordt zowel door Γ als door $\Gamma \cup \{p\}$ geëvoceerd (maar wordt door geen van beide gegenereerd).

Met een eenvoudig voorbeeld kan aangetoond worden dat de notie *generatie* zijn doel voorbijschiet. Door de strengere bepaling wordt geen enkele veilige vraag door Γ gegenereerd (dus ook niet als die intuïtief relevant is voor Γ). Veronderstel opnieuw dat $\Gamma = \{p \vee q\}$. Dan worden de vragen $?\{p, q\}$, $?\{p, \neg p\}$, $?\{q, \neg q\}$ alle door Γ geëvoceerd. Enkel de vraag $?\{p, q\}$ wordt door Γ gegenereerd. Nochtans is er niks mis met bijv. de vraag $?\{p, \neg p\}$, en is ze zelfs uiterst relevant voor Γ: elk van de directe antwoorden vult een gat in de kennis van Γ. Het komt er eigenlijk op neer dat de definitie van evocatie toelaat dat irrelevante vragen worden afgeleid, en dat de definitie van generatie niet toelaat dat bepaalde nuttige vragen worden afgeleid. [24]

In het predicatief geval is er over het algemeen *geen positieve test* voor evocatie. Zelfs als een vraag Q m.b.t. een verzameling Γ voldoet aan de voorwaarden van de definitie, is het mogelijk dat er geen eindige constructie bestaat die dit aantoont. De reden hiervoor is dat de tweede voorwaarde in de definitie van evocatie een 'negatieve' voorwaarde is: geen enkel direct antwoord van Q mag afleidbaar zijn uit Γ. Aangezien er voor het predicatief niveau geen positieve test bestaat voor het niet-afleidbaar zijn uit Γ, kan dit niet-afleidbaar zijn uit Γ in sommige gevallen niet worden aangetoond, en kan bijgevolg ook niet met een eindige constructie worden aangetoond dat Q geëvoceerd wordt door Γ. Wat generatie van vragen betreft, is de situatie nog erger: voor beide voorwaarden bestaat er — in het algemeen, op predicatief niveau — geen positieve test.

Zoals beschreven in [Meh01], kan men op verschillende manieren omgaan met het ontbreken van een positieve test. Zo kan men enkel beslisbare theorieën en verzamelingen premissen in overweging nemen. Een andere mogelijkheid is dat men een pragmatisch criterium gebruikt om een beslissing te forceren: bijv. A is niet afleidbaar uit Γ als het tegendeel niet

24. Dit probleem wordt opgelost in [DV], door in de definitie van evocatie te steunen op de logica **QP**, waardoor vragen door een relevantie-filter moeten. Ik ga hier niet verder op in.

in een bepaalde eindige tijd m of in een eindig aantal stappen n is aangetoond. Nog een andere mogelijkheid is dat men toelaat dat afleidingen kunnen gemaakt worden op basis van de op dat ogenblik "beste" inzichten in de premissen, en dat dus niet geëist wordt dat dit gebeurt op basis van absoluut zekere inzichten. Bij deze laatste optie treedt niet alleen een externe dynamiek op (als nieuwe premissen aan Γ worden toegevoegd, is het mogelijk dat uit Γ afleidbare formules niet langer afleidbaar zijn uit de uitgebreide verzameling premissen), maar ook een interne dynamiek (eerder gemaakte afleidingen kunnen worden herroepen, louter omwille van een diepere analyse van de premissen). Verderop [25] geven we een aantal goede argumenten voor het kiezen van deze laatste optie.

2.8. Erotetische implicatie

2.8.1. Definities

We geven eerst Wiśniewski's algemene definitie van erotetische implicatie:

Definitie 16. *Een vraag* Q_1 impliceert *een vraag* Q_2 op basis van *een verzameling d-wffs* Γ, $(\mathbf{Im}(Q_1, \Gamma, Q_2))$, *alss*

(1) *voor elke* $A \in dQ_1$ *geldt:* $\Gamma \cup \{A\} \Vdash dQ_2$, *en*

(2) *voor elke* $B \in dQ_2$ *bestaat er een niet-lege verzameling* $\Theta \subset dQ_1$ *zodanig dat* $\Gamma \cup \{B\} \Vdash \Theta$.

De eerste clausule garandeert dat de geïmpliceerde vraag steeds een waar direct antwoord heeft als ook de implicerende vraag een waar direct antwoord heeft (en alle elementen van Γ waar zijn). De tweede clausule garandeert dat elk direct antwoord van een geïmpliceerde vraag samen met Γ het aantal mogelijkheden dat door de implicerende vraag wordt geboden, reduceert. Wiśniewski noemt een geïmpliceerde vraag daarom *cognitief nuttig* voor de implicerende vraag. We geven twee voorbeelden:

25. Het ontbreken van een positieve test en hoe ermee om te gaan, en het probleem van logische alwetendheid zijn nauw met elkaar verbonden. Verderop worden ze dan ook samen besproken.

$\mathbf{Im}(?\{p, \neg p\}, \{p \equiv q\}, ?\{q, \neg q\})$

$\mathbf{Im}(?\{p, q, r\}, \{p \vee q \vee r\}, ?\{p, \neg p\})$

Als we ons beperken tot regelmatige vragen kan erotetische implicatie ook als volgt worden bepaald: [26]

Definitie 17.
Als Q_1 en Q_2 regelmatige vragen zijn, dan $\mathbf{Im}(Q_1, \Gamma, Q_2)$ alss

(1) *er is een prospectieve presuppositie A van Q_1 en een prospectieve presuppositie C van Q_2 zodanig dat $\Gamma \cup \{A\} \models C$, en*

(2) *voor elke $B \in dQ_2$ bestaat er een niet-lege verzameling $\Theta \subset dQ_1$ zodanig dat $\Gamma \cup \{B\} \Vdash \Theta$.*

Voor **CL** kan, wegens compactheid, erotetische implicatie bepaald worden zonder een beroep te moeten doen op multiple-conclusion entailment:

Definitie 18. $\mathbf{Im}(Q_1, \Gamma, Q_2)$ *alss*

(1) *voor elke $A \in dQ_1$: $\Gamma \cup \{A\} \vDash_{\mathbf{CL}} B_1 \vee \ldots \vee B_k$, voor een aantal $B_1, \ldots, B_k \in dQ_2 (k \geqslant 1)$, en*

(2) *voor elke $B \in dQ_2$ bestaat er een eindige echte deelverzameling $\{A_1, \ldots, A_m\} (m \geqslant 1)$ van dQ_1 zodanig dat $\Gamma \cup \{B\} \vDash_{\mathbf{CL}} A_1 \vee \ldots \vee A_m$.*

2.8.2. Kritiek

Ik zal in deze afdeling kort wijzen op een aantal eigenschappen van Wiśniewski's erotetische implicatie die eerder problematisch zijn. We gaan uit van de gegeven situatie dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Gamma, Q_2)$, met als onderliggende logica **CL**. [27] We noemen Q_1 de implicerende vraag, en Q_2 de geïmpliceerde vraag.

26. Zie theorema 7.22 in [Wiś95, p. 178].
27. De kritiek is echter evenzeer van toepassing als de (niet-compacte) ω-volledige logica $\mathbf{CL}^*$ de onderliggende logica is.

1. Als een direct antwoord van Q_1 afleidbaar is uit Γ, impliceert Q_1 om het even welke gegronde vraag Q_2. Dus geldt bijvoorbeeld dat

$$\mathbf{Im}(?\{p, \neg p\}, \{p\}, ?\{q, \neg q\}).$$

Ook als een partieel [28] antwoord van Q_1 afleidbaar is uit Γ, impliceert Q_1 om het even welke gegronde vraag Q_2. Voor $\Gamma = \{p \vee q\}$ geldt bijv. dat $\mathbf{Im}(?\{p, q, r\}, \Gamma, ?\{t, \neg t\})$. Immers:

(1) de vraag $?\{t, \neg t\}$ is steeds gegrond, en

(2) $\Gamma \cup \{t\} \vdash_{\mathbf{CL}} p \vee q$ en $\Gamma \cup \{\neg t\} \vdash_{\mathbf{CL}} p \vee q$.

Hoewel de vraag $?\{t, \neg t\}$ volkomen irrelevant is voor het beantwoorden van $?\{p, q, r\}$, wordt ze toch, op basis van Γ, door $?\{p, q, r\}$ geïmpliceerd. De reden hiervoor is eenvoudig: $p \vee q$ is reeds afleidbaar uit Γ (alleen).

Wiśniewski is zich terdege van het probleem bewust, en bepaalt daarom de notie *sterke erotetische implicatie*. Sterke erotetische implicatie verhoudt zich min of meer tot erotetische implicatie, zoals generatie zich verhoudt tot evocatie:

Definitie 19. *Een vraag Q_2 wordt* sterk geïmpliceerd *door een vraag Q_1 op basis van Γ ($\boldsymbol{Ims}(Q_1, \Gamma, Q_2)$) alss*

(1) *voor elke $A \in dQ_1 : \Gamma, A \Vdash dQ_2$, en*

(2) *voor elke $B \in dQ_2$ bestaat er een niet-lege echte deelverzameling Θ van dQ_1 zodanig dat $\Gamma \cup \{B\} \Vdash \Theta$ en niet geldt dat $\Gamma \Vdash \Theta$.*

Sterke erotetische implicatie is, in tegenstelling tot erotetische implicatie, een niet-monotone notie. We zullen in hoofdstuk 5 een aantal erotetische implicaties bepalen, op basis van een adaptieve logica, die een aantal eigenschappen met sterke erotetische implicatie gemeen hebben. [29]

28. Een partieel antwoord van een vraag Q is een disjunctie van minstens twee, maar niet alle, directe antwoorden van Q (cf. infra).
29. Om een voor mij onduidelijke reden, vindt Wiśniewski ([Wiś95, pp. 187–188]) sterke erotetische implicatie geen goede explicatie voor het rijzen van een vraag uit een andere vraag. Hij besteedt er dan ook nauwelijks aandacht aan.

2. Ook als de negatie van een presuppositie van Q_1 kan worden afgeleid uit Γ (waaruit onmiddellijk volgt [30] dat de vraag Q_1 geen waar direct antwoord kan hebben) worden een (beperkt) aantal vragen door Q_1, op basis van Γ, geïmpliceerd. We geven een eenvoudig voorbeeld: $\mathbf{Im}(?\{p, q\}, \{\neg t, \neg p, \neg q, r\}, ?\{t, \neg r\})$, hoewel de geïmpliceerde vraag $?\{t, \neg r\}$ vanzelfsprekend van geen enkel nut is voor het beantwoorden van $?\{p, q\}$ (uit de premissen is namelijk afleidbaar dat de vraag geen waar direct antwoord kan hebben).

3. Als Γ inconsistent is, dan wordt om het even welke vraag Q_2 op basis van Γ door om het even welke vraag Q_1 geïmpliceerd. Als we dit willen vermijden, moet gewerkt worden met een onderliggende paraconsistente logica.

4. Erotetische implicatie is niet transitief: bijv. de vraag $?\{p, \neg p\}$ impliceert, op basis van de lege verzameling premissen, de vraag $?\{p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$, en deze impliceert op haar beurt de vraag $?\{q, \neg q\}$, maar de laatste vraag wordt wel niet door de eerste vraag geïmpliceerd. Dit is natuurlijk ook terecht: de vraag $?\{q, \neg q\}$ is, gegeven het feit dat er geen premissen zijn (die een logische link tussen beide zouden kunnen leggen), in geen enkel opzicht nuttig voor het oplossen van de vraag $?\{p, \neg p\}$. In zijn erotetische zoekscenario's ([Wiś03]) kiest Wiśniewski er via een kunstgreep voor erotetische implicatie toch transitief te maken (omdat anders — wegens de strenge bepaling van erotetische implicatie — intuïtief relevante vragen niet kunnen worden afgeleid). [31] Dit leidt echter tot nieuwe problemen, namelijk dat volkomen irrelevante vragen kunnen worden afgeleid. We komen hierop terug in hoofdstuk 5.

30. Op voorwaarde dat de premissen waar zijn, waar we voor het gemak even van uitgaan.

31. We geven een voorbeeld: de vraag $Q_1 = ?\{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ impliceert op basis van de lege verzameling premissen *niet* de vraag $Q_2 = ?\{p, \neg p\}$, hoewel deze (intuïtief) relevant is voor het komen tot een antwoord op de eerste vraag. Om dergelijke vragen toch toe te laten, laat Wiśniewski toe om eerst een hulp-vraag af te leiden, namelijk $Q_3 = ?\{p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$, waarvoor geldt dat Q_1 de vraag Q_3 impliceert, en Q_3 op haar beurt de vraag Q_2 impliceert.

2.9. Algemene bemerkingen

In deze afdeling besteden we aandacht aan algemene tekortkomingen van Wiśniewski's theorie. We wijzen op het weinig realistisch karakter ervan, omdat de erotetische concepten slechts algemeen bruikbaar zijn voor logisch alwetende wezens. Vervolgens tonen we aan dat zijn concepten niet bruikbaar zijn voor inconsistente premissen. Tot slot wijzen we kort op het probleem van relevantie. In hoofdstukken 4 en 5 stellen we vragen bij het overmatig belang dat Wiśniewski hecht aan het gegrond zijn van een vraag (t.o.v. een verzameling premissen), en werken we een alternatief uit.

2.9.1. Logische alwetendheid

Een belangrijk nadeel van Wiśniewski's aanpak is dat ze van beperkt praktisch nut is. [32] Een van de belangrijkste redenen daarvoor is dat logische alwetendheid wordt verondersteld: in veel gevallen moet men alle logische gevolgen van Γ kennen om uit te kunnen maken of een vraag Q al dan niet door Γ geëvoceerd wordt. Ook voor erotetische implicatie is dit het geval (voor vragen van de tweede soort moet in principe een oneindig aantal voorwaarden worden gecheckt). Een vraag waarvan een of meerdere van de directe antwoorden tautologieën zijn, of waarvan een van de directe antwoorden afleidbaar is uit Γ, wordt nooit door Γ geëvoceerd. [33]

Wat mensen doorgaans in de praktijk doen is iets helemaal anders. Door een onvolledigheid in hun kennissysteem wordt een vraag opgeroepen (vaak worden meerdere vragen ongeveer tegelijkertijd opgeroepen; welke vragen worden opgeroepen wordt mede bepaald door eerder opgeroepen vragen). Soms ontdekt men vlak daarna dat men het antwoord op een opgeroepen vraag eigenlijk kent (men heeft het intussen afgeleid uit (een fragment) van zijn kennissysteem, of men ziet een mogelijkheid om het af te leiden). In dat geval verdwijnt de vraag opnieuw (ze is immers beantwoord). Als men niet relatief eenvoudig een antwoord vindt op de opgeroepen vraag, is het vaak rationeler de vraag effectief te stellen (liefst aan iets of iemand

32. Dit werd reeds vastgesteld in [Meh01]. De belangrijkste argumenten die hieronder vermeld worden, zijn dan ook gebaseerd op de redenen die aangehaald worden in [Meh01].

33. Je zou je toch gaan afvragen waarom sommige logici zich het hoofd breken over de vraag of een logica **L** bijv. de interpolatie-eigenschap heeft.

waarvan men verwacht dat die relatief snel met een betrouwbaar direct antwoord op de proppen komt) dan zelf verder proberen een antwoord op de vraag te vinden (dit laatste kost immers tijd en middelen — zonder garantie op succes — die vaak beter op een andere manier worden besteed). Dit soort redeneerproces kan onmogelijk gevat worden door de (statische) semantische definities van Wiśniewski. In de volgende hoofdstukken zullen we erotetische concepten bepalen op basis van een adaptieve logica. Met een dynamisch bewijs zal bovenstaand redeneerproces wel kunnen worden benaderd.

Het eisen van absolute waarborgen (zoals in de definities [34] van Wiśniewski) is, zelfs voor beslisbare logische fragmenten, vaak onrealistisch. Niets of niemand is logisch alwetend, en het blootleggen van de (interessante) gevolgen van een theorie of een verzameling premissen kost tijd en vooral ook moeite. Zelfs al is een beslissingsmethode beschikbaar, vaak ontbreekt het mensen en computers aan de nodige middelen om een exhaustieve procedure te doorlopen. Bijgevolg worden ze gedwongen om te handelen volgens hun beste inzichten op dat ogenblik (men zou in die omstandigheden natuurlijk ook om het even wat kunnen doen, en in irrationalisme vervallen). In een aantal contexten is het bovendien veel interessanter (sneller, gemakkelijker, doelgerichter, enzovoort) om vragen te stellen dan te proberen verdere afleidingen te maken. In vele contexten (vooral in die contexten waar ook aan het stellen van vragen een bepaalde kost verbonden is) is het belangrijk dat de vragen die gesteld worden, ook nuttige vragen zijn (gegeven het inzicht in de premissen op dat ogenblik): ze moeten dus informatief zijn (gegeven het inzicht op dat ogenblik), ook al kan later blijken dat men het antwoord eigenlijk zelf uit de premissen kon afleiden.

2.9.2. Orakelen met klassieke logica

Hoewel Wiśniewski's definities van erotetische concepten dit helemaal niet vereisen (en juist heel algemeen zijn), concentreert het overgrote deel van

34. Men kan bijv. pas besluiten dat een vraag Q door Γ wordt geëvoceerd als men heeft aangetoond dat beide voorwaarden van de definitie voldaan zijn. Eens men de absolute garantie heeft dat Q gegrond en informatief is t.o.v. Γ, kan men zeggen dat Q geëvoceerd wordt door Γ. Deze absolute garantie kan echter bij om het even welke uitbreiding van Γ in het water vallen (evocatie is een niet-monotone notie).

zijn onderzoek zich op vraaglogica's die (erotetische) uitbreidingen zijn van **CL** en **CL***. Dit heeft, onder meer, als onmiddellijk gevolg dat zijn erotetische logica geen zinnige resultaten oplevert voor een inconsistente verzameling premissen. Door een inconsistente verzameling premissen Γ wordt geen enkele vraag geëvoceerd (noch gegenereerd). En een (willekeurige) vraag Q_1 impliceert, op basis van een inconsistente verzameling Γ, om het even welke vraag Q_2. [35] Hieronder gaan we enkel in op evocatie door een inconsistente verzameling premissen, en schetsen we kort een alternatief op basis van een inconsistentie-adaptieve logica.

Uit Wiśniewski's concept van evocatie volgt dat

(1) door elke onvolledige [36] verzameling d-wffs minstens één vraag wordt geëvoceerd, en

(2) dat een volledige verzameling d-wffs geen enkele vraag evoceert.

Dit lijkt weliswaar plausibel, maar het wordt problematisch als we ook inconsistente verzamelingen premissen in rekening brengen: wegens Ex Falso Quodlibet ($A, \neg A \vDash_{\mathbf{CL}} B$, voor om het even welke B) is elke inconsistente verzameling d-wffs volledig. Bijgevolg is elke vraag Q gegrond t.o.v. een inconsistente verzameling d-wffs Γ, maar is geen enkele vraag Q informatief t.o.v. Γ (omdat alle directe antwoorden van elke mogelijke vraag **CL**-afleidbaar zijn uit de inconsistente verzameling Γ). Dit is duidelijk niet in overeenstemming met hoe mensen doorgaans met inconsistente premissen (gegevens, opvattingen, theorieën, enz.) omgaan: het ontdekken van een anomalie of inconsistentie doet in de meeste omstandigheden een aantal (urgente) vragen rijzen, die vaak als doel hebben de pas ontdekte inconsistentie weg te werken. [37]

---

35. Aangezien Γ inconsistent is, zijn de voorwaarden steeds voldaan, om triviale redenen. Dit mag letterlijk genomen worden, want om het even welke wff is **CL**-afleidbaar uit een inconsistente Γ.

36. Een verzameling Γ is (**CL**-)onvolledig alss er minstens één wff bestaat zodanig dat $\Gamma \nvDash_{\mathbf{CL}} A$ en $\Gamma \nvDash_{\mathbf{CL}} \neg A$.

37. Wiśniewski is zich overigens goed bewust van het probleem (zie [Wiś95, pp. 215–216]) en suggereert een mogelijke uitweg. Wiśniewski's voorstel vertoont een aantal gelijkenissen met de Rescher-Manor aanpak (zie [Res64]) waarin gevolgrelaties bepaald worden op basis van maximaal consistente deelverzamelingen van een inconsistente verzameling. Vandaar dat ook Wiśniewski's voorstel uiterst gevoelig is voor de formulering van de premissen. Dit wordt met een aantal voorbeelden geïllustreerd in [DC], waarin ook een voorstel op basis van een inconsistentie-adaptieve logica wordt uitgewerkt. Het voorstel van Wiśniewski wordt ook bekritiseerd in [Meh99]. Daarin wordt ook een al-

Als we willen dat een vraaglogica ook zinvolle resultaten oplevert voor een inconsistente verzameling premissen, dan moet de onderliggende logica een paraconsistente logica **P** zijn. [38] Vragen kunnen door een inconsistente Γ om twee verschillende redenen geëvoceerd worden:

(1) Een vraag $?\{A, \sim A\}$ wordt door Γ geëvoceerd omdat de inconsistentie $A \wedge \sim A$ **P**-afleidbaar is uit Γ. Het doel van de vraag is te weten komen welke helft van de inconsistentie $A \wedge \sim A$, namelijk A of $\sim A$ kan worden behouden (of: welke helft moet worden verworpen). [39]

(2) Vragen die gegrond en informatief zijn (volgens de definitie van evocatie, voor de logica **P**) worden door Γ geëvoceerd. Deze vragen vullen, net als in het consistente geval, gaten in de kennis op. [40] Merk op dat een onvolledigheid zich ook op het niveau van de inconsistenties kan voordoen. We geven een eenvoudig voorbeeld op basis van de paraconsistente logica **CLuN** (die pas in het volgende hoofdstuk wordt gepresenteerd). Veronderstel dat $\Gamma \vDash_{\mathbf{CLuN}} (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$, en dat $\Gamma \nvDash_{\mathbf{CLuN}} p \wedge \sim p$ en $\Gamma \nvDash_{\mathbf{CLuN}} q \wedge \sim q$. Uit de premissen is dus afleidbaar

ternatieve aanpak uitgewerkt, waarbij gesteund wordt op de notie *consistente kern* van een verzameling. Alle voorstellen hebben echter het nadeel dat een verkregen direct antwoord op een door een inconsistente verzameling geëvoceerde vraag, niet veilig aan die verzameling kan worden toegevoegd, d.w.z. er kan niet worden gegarandeerd dat, bij het toevoegen van de verkregen antwoorden (op afgeleide en gestelde vragen) aan de oorspronkelijke verzameling, trivialiteit steeds kan worden vermeden. Wat ontbreekt, is een of ander mechanisme van 'belief revision'.

38. Een logica is paraconsistent alss het Ex Falso Quodlibet niet geldt. In deze tekst staat "$\sim$" steeds voor een paraconsistente negatie. De lezer die niet vertrouwd is met paraconsistente en inconsistentie-adaptieve logica's, kan dit stukje best overslaan, en pas lezen na het doornemen van het volgende hoofdstuk.

39. Merk op dat hier wel wat complicaties optreden. Uit Γ volgt immers reeds dat A én $\sim A$ het geval zijn. Het stellen van de vraag, en het antwoord dat bekomen wordt, bijv. A, levert dus niks nieuws op. We zouden in plaats daarvan ook de vraag $?\{\neg\sim A, \neg A\}$ kunnen stellen (waarbij '$\sim$' de paraconsistente negatie is, en '$\neg$' de klassieke negatie van **CL** is). Een direct antwoord, bijv. $\neg A$, kan echter niet zomaar bij Γ gevoegd worden, want dat levert trivialiteit op, tenzij we 'belief revision' toepassen (door, ruwweg, eerst de maximale deelverzameling van Γ te bepalen waaruit A niet afleidbaar is, en dan pas $\neg A$ aan die maximale deelverzameling toe te voegen). We komen hier nog op terug.

40. Een (inconsistente) verzameling Γ is, t.o.v. een paraconsistente logica **P**, volledig alss $\Gamma \vDash_{\mathbf{P}} \perp$. Vanuit paraconsistent gezichtspunt is de verzameling $\{p, p \supset q, r \vee t, \sim q\}$ 'minder volledig' dan de verzameling $\{p, p \supset q, r, \sim q\}$. De eerste verzameling zal bijv. de vraag $?\{r, t\}$ evoceren, de tweede niet. Mochten we **CL** als onderliggende logica nemen, dan zijn beide inconsistente verzamelingen volledig (elke inconsistente verzameling is **CL**-volledig), en verdwijnt elk onderscheid tussen beide. We zullen verderop in deze tekst tonen dat de AGM-aanpak van 'belief revision' met dit soort problemen kampt.

dat p inconsistent is, of q inconsistent is, maar de premissen leveren onvoldoende informatie om uit te kunnen maken welk van beide het geval is. De vraag $?\{p \wedge \sim p, q \wedge \sim q\}$ wordt door Γ geëvoceerd. Als we het bekomen antwoord op de vraag, bijv. $p \wedge \sim p$, toevoegen aan Γ, is een inconsistentie van Γ volledig gelokaliseerd: $(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)$ is een minimaal *Dab*-gevolg van Γ, maar niet van $\Gamma \cup \{p \wedge \sim p\}$ ($p \wedge \sim p$ is een minimaal *Dab*-gevolg van $\Gamma \cup \{p \wedge \sim p\}$).

Inzake evocatie (en generatie) van vragen door een inconsistente verzameling premissen kunnen we twee verschillende opties onderscheiden.

In de eerste optie wordt de waarheid van geen enkele premisse in twijfel getrokken. Alle premissen worden als waar beschouwd (ondanks de inconsistenties). Deze optie werd genomen in [DC], waar **ACLuN1** (zie het volgende hoofdstuk) als onderliggende logica fungeert. Om de twee types van vragen (zie hoger) te kunnen laten evoceren door een (mogelijk) inconsistente verzameling Γ moet de definitie van evocatie licht worden aangepast.

Zij $neg(A) = \sim A$, maar als $A = \sim B$, dan $neg(A) = B$. $U(\Gamma)$ is de verzameling van alle Γ-onbetrouwbare formules: $U(\Gamma) = \{A \wedge \sim A \mid A \wedge \sim A \in \Delta;\ Dab(\Delta)$ is een minimaal *Dab*-gevolg van $\Gamma\}$. We bepalen evocatie hier enkel voor vragen van de eerste soort (deze zijn steeds regelmatig):

Definitie 20.
Zij $Q = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ een vraag van de eerste soort. $\boldsymbol{E}(\Gamma, Q)$ alss

(1) $\Gamma \vDash_{\mathbf{ACLuN1}} A_1 \vee \ldots \vee A_n$, en

(2) voor elke $A_i \in dQ$: als $A_i \wedge neg(A_i) \notin U(\Gamma)$, dan $\Gamma \nvDash_{\mathbf{ACLuN1}} A_i$.

Omdat gewerkt wordt met een inconsistentie-adaptieve logica kan bovendien gemakkelijk worden aangetoond dat, als Γ consistent is, exact dezelfde vragen door Γ worden geëvoceerd als met de oorspronkelijke definitie van Wiśniewski.

Als een vraag Q door een inconsistente Γ wordt geëvoceerd, kunnen beide voorwaarden van de definitie van evocatie er elk op zich de oorzaak van zijn dat Q niet geëvoceerd wordt door een uitbreiding van Γ. Ook het gegrond zijn van een vraag Q t.o.v. Γ is dan immers niet-monotoon. Stel bijv. dat $\Gamma = \{p \vee q \vee (r \wedge {\sim}r)\}$. Dan wordt de vraag $?\{p, q\}$ door Γ geëvoceerd (want Q is gegrond en informatief t.o.v. Γ). Als Γ uitgebreid wordt naar $\Gamma' = \{p \vee q \vee (r \wedge {\sim}r), r \wedge {\sim}r\}$, dan is $?\{p, q\}$ niet gegrond t.o.v. Γ' (omdat $\Gamma' \nvDash_{\mathbf{ACLuN1}} p \vee q$).

In de tweede optie worden een aantal premissen (of gevolgen van premissen) geprefereerd boven andere premissen (of gevolgen ervan). Deze optie wordt uitgewerkt in [Meh99]. Beide voorwaarden van de definitie (het gegrond en informatief zijn) moeten worden aangepast. Daarbij wordt gesteund op de notie *consistente kern* van een (inconsistente) verzameling Γ: dit zijn die gevolgen van Γ waarvan men aanneemt dat ze in elk consistent alternatief voor Γ kunnen worden behouden. [41] Welke gevolgen van Γ dit precies zijn, moet bepaald worden op basis van extra-logische preferenties en is afhankelijk van de toepassingscontext. [42] In deze tweede optie worden (i.t.t. de eerste optie) door een inconsistente Γ geen vragen geëvoceerd die enkel contradicties als directe antwoorden hebben. Daarentegen hebben bepaalde geëvoceerde vragen een bijzonder eigenschap: elk van hun directe antwoorden geeft informatie over hoe bepaalde inconsistenties uit Γ moeten worden weggewerkt.

Voor beide opties zou een mechanisme van 'belief revision' moeten worden uitgewerkt. [43]

2.9.3. Relevantie

Voor alle door Wiśniewski bepaalde erotetische concepten is er een relevantie-probleem. Wiśniewski is zich hiervan bewust, maar omdat een volledig bevredigende oplossing van dit probleem hem niet mogelijk lijkt, besteedt hij er in zijn theorie zeer weinig aandacht aan: "But looking for a

41. De consistente kern van Γ is niet noodzakelijk een deelverzameling van Γ, maar wel steeds een deelverzameling van de gevolgverzameling (met een passende (paraconsistente) logica) van Γ.
42. Als bijv. informatie afkomstig is uit verschillende bronnen, kan men — naargelang de toepassingscontext — verschillende strategieën hanteren: als twee bronnen elkaar op een bepaald item tegenspreken, kan men bijv. alle informatie-items van een van de bronnen in twijfel trekken (of eventueel van beide bronnen), maar men kan er ook voor kiezen om alle informatie die niet wordt tegengesproken door een andere bron (voorlopig) als waar te beschouwen.
43. Het ingenieus mechanisme van [Meh99] vat wel een aantal aspecten van enkelvoudige revisie, maar is — voorlopig — onvoldoende uitgewerkt.

satisfactory logical definition of relevance is, as it is well known, a difficult and possibly hopeless enterprise.” ([Wiś95, p. 11]). In hoofdstuk 5 komen we op dit probleem terug.

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 3

Adaptieve logica's

3.1. Inleiding

Adaptieve logica's werden rond 1980 ontworpen door Diderik Batens. Deze eerste adaptieve logica's werden later herdoopt tot inconsistentie-adaptieve logica's. Ze waren ontworpen om een inconsistente theorie (die bedoeld was om consistent te zijn, maar uiteindelijk inconsistent bleek te zijn) zo consistent mogelijk te kunnen interpreteren. Een inconsistentie-adaptieve logica lokaliseert de inconsistenties die uit een (als consistent bedoelde) verzameling of theorie afleidbaar zijn, en past (de toepassing van) haar afleidingsregels daaraan aan. Later werd het idee van een inconsistentie-adaptieve logica uitgebreid naar andere logische abnormaliteiten (bijv. negatie-onvolledigheid, of een abnormale disjunctie, enz.; in [Bat99b] wordt zelfs een adaptieve logica voorgesteld waarin alle logische constanten zich mogelijk abnormaal gedragen), en zelfs naar abnormale niet-logische constanten (ambiguïteiten-adaptieve logica's, zie [Van97]). Al deze logica's worden *corrigerende* adaptieve logica's genoemd. Een andere belangrijke uitbreiding is die naar allerhande vormen van *ampliatief* redeneren (zoals inductie, abductie, enz.). [1]

1. Vanuit technisch oogpunt is het onderscheid tussen corrigerende en ampliatieve logica's onbelangrijk, aangezien de formele karakterisering volkomen analoog verloopt. Het onderscheid wijst enkel op de keuze van de deductie-standaard van de gebruiker

Een adaptieve logica past zich aan aan de specifieke verzameling premissen waarop ze wordt losgelaten. De adaptieve logica zal de verzameling premissen "zo normaal mogelijk" interpreteren. Wat als "normaal" beschouwd wordt, en hoe "zo normaal mogelijk" geïnterpreteerd moet worden, kan voor elke adaptieve logica verschillend zijn. Maar gegeven een bepaalde standaard van normaliteit (bijv. consistentie), is het effect altijd hetzelfde. Semantisch komt het erop neer dat een aantal modellen van de premissen geselecteerd worden; of een model geselecteerd wordt, hangt af van de abnormaliteiten die het model verifieert. Bewijstheoretisch bestaat het effect erin dat de premissen bepalen of de toepassing van een afleidingsregel al dan niet geoorloofd (of correct) is.

Het centrale idee achter elke adaptieve logica is verbazingwekkend eenvoudig: een specifieke verzameling vooronderstellingen (bijv. consistentie, of negatie-volledigheid, enz.) wordt 'zoveel als mogelijk' gevolgd (er wordt steeds verondersteld dat de vooronderstelling waar is), dit wil zeggen, *tenzij en totdat* het tegendeel expliciet wordt aangetoond. Als blijkt dat een vooronderstelling door de verzameling premissen expliciet geschonden wordt, wordt de toepassing van een of meer afleidingsregels *lokaal* [2] geblokkeerd, om te vermijden dat de gevolgverzameling van de premissen de triviale verzameling zou zijn. Overal waar dit niet het geval is (i.e. uit de buurt van de abnormaliteiten die volgen uit de premissen), kunnen alle afleidingsregels onbeperkt (i.e. in hun volle sterkte) worden toegepast. [3]

Adaptieve logica's zijn in het bijzonder geschikt om dynamische en/of niet-monotone redeneerprocessen op formeel exacte wijze te vatten. [4] In dergelijke redeneerprocessen zijn immers typisch inferenties betrokken die steunen op een voorwaarde, namelijk dat aan een of meerdere vooronder-

---

in een specifieke situatie. Dit laatste is natuurlijk wel belangrijk, omdat het de keuze voor deze of gene adaptieve logica rechtvaardigt.

2. Dit is een belangrijk verschil met de gebruikelijke niet-standaard logica's, waarin bepaalde afleidingsregels *globaal* niet gelden.

3. Dit komt erop neer dat een aantal afleidingsregels slechts kunnen worden toegepast op die gevolgen van de premissen die aan bepaalde voorwaarden ("normaal" zijn) voldoen. Afleidingsregels die lokaal geblokkeerd worden, zijn afleidingsregels van de bovenlimiet-logica. Afleidingsregels die steeds globaal kunnen worden toegepast, zijn afleidingsregels van de onderlimiet-logica (zie verder).

4. Een redeneerproces wordt dynamisch genoemd als het (louter) logisch analyseren van de premissen kan leiden tot het herzien van eerder gemaakte afleidingen. Een dynamisch redeneerproces is daarom niet noodzakelijk niet-monotoon. Zo wordt in [Bat01a] aangetoond dat de zuivere logica van de relevante implicatie gekarakteriseerd kan worden door een dynamische bewijstheorie.

stellingen is voldaan. Als tenslotte blijkt dat een van de vooronderstellingen niet (langer) voldaan is, wordt vastgesteld dat de toepassing van een of meerdere afleidingsregels niet langer gerechtvaardigd is, en dat een of meer eerder afgeleide gevolgen dus moeten worden herzien.

In dit hoofdstuk zullen we enkel aandacht besteden aan zogenaamd *vlakke* adaptieve logica's, die alle premissen op gelijke voet behandelen. [5] In de volgende afdeling bespreken we het standaardformaat voor (vlakke) adaptieve logica's. Daarna gaan we in op het belang van de dynamische bewijzen, en presenteren we kort de semantiek. In het volgende hoofdstuk bestuderen we de ampliatieve adaptieve logica **VA**. In hoofdstuk 6 presenteren we de paraconsistente logica **CLuN** en de inconsistentie-adaptieve logica **ACLuN1**.

3.2. Het standaardformaat voor vlakke adaptieve logica's

Heel algemeen kan men adaptieve logica's karakteriseren als logica's die zich aanpassen aan de premissen. Dit wil zeggen dat de premissen mede vastleggen of een specifieke toepassing van een bepaalde afleidingsregel al dan niet correct is (voor die verzameling premissen).

Een exacte karakterisering (die opgaat voor alle tot nog toe grondig bestudeerde adaptieve logica's) van een adaptieve logica wordt gegeven in [Bat]: [6]

> Een adaptieve logica **AL** wordt gekarakteriseerd door:
>
> (1) Een *onderlimiet-logica* **OL**: deze logica is monotoon en compact.
>
> (2) Een *verzameling abnormaliteiten* Ω: deze verzameling bevat alle formules van een bepaalde logische vorm (deze is **OL**-contingent).
>
> (3) Een *adaptieve strategie*: deze bepaalt hoe de premissen 'zo normaal mogelijk' moeten worden geïnterpreteerd. De best bestu-

5. Als aan bepaalde premissen een hogere preferentie of prioriteit gehecht wordt dan aan andere, spreekt men van *geprioriteerde* adaptieve logica's. Een typische toepassing voor geprioriteerde adaptieve logica's is diagnose (zie bijv. [BMPV03]).
6. De uiteenzetting hieronder is hoofdzakelijk gebaseerd op [Bat] en [Bat01b].

deerde, en vaak ook de meest interessante, strategieën zijn *betrouwbaarheid* en *minimale abnormaliteit*. Voor een aantal logica's vallen beide strategieën samen, en volstaat de *eenvoudige strategie* (deze wordt in het volgende hoofdstuk gebruikt voor het bepalen van de adaptieve vraaglogica **VA**). [7]

De onderlimiet-logica **OL** is het stabiele deel van de adaptieve logica: een formule die **OL**-afleidbaar is uit de premissen, zal nooit worden herroepen (ze is *finaal afleidbaar*). Vanuit bewijstheoretisch oogpunt bepaalt de onderlimiet-logica de afleidingsregels die onvoorwaardelijk geldig zijn. Vanuit semantisch oogpunt bepaalt de onderlimiet-logica de modellen waaruit de adaptieve modellen geselecteerd worden. Daaruit volgt dat $Cn_{\mathbf{OLL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$.

De verzameling van abnormaliteiten Ω bevat die formules, waarvan steeds wordt verondersteld dat ze vals zijn, tenzij en totdat het tegendeel is aangetoond. Alle abnormaliteiten worden gekenmerkt door een logische vorm. Voor inconsistentie-adaptieve logica's is Ω de verzameling van alle formules van de vorm $\exists(A \wedge {\sim}A)$. [8] Er kunnen nog verdere beperkingen aan de abnormaliteiten worden opgelegd: er kan bijv. geëist worden dat A een primitieve formule is (A mag, behalve "=", geen logische symbolen bevatten).

Syntactisch wordt de bovenlimiet-logica **BL** bekomen door aan de onderlimiet-logica **OL** een axioma toe te voegen dat alle abnormaliteiten uitsluit (het axioma zorgt ervoor dat geen enkele abnormaliteit logisch mogelijk is). De aldus bekomen logica **BL** is monotoon en compact. Semantisch worden de modellen van de bovenlimiet-logica bekomen door die modellen van de onderlimiet-logica te selecteren die geen enkele abnormaliteit verifiëren. Daaruit volgt dat, als de premissen abnormaal zijn en dus alle **OL**-modellen van de premissen minstens een abnormaliteit verifiëren, er dan geen modellen van de bovenlimiet-logica zijn die deze premissen verifiëren. Dus is de **BL**-gevolgverzameling van een abnormale verzameling premissen steeds de triviale verzameling (explosie). Veronderstel dat

7. Er werden nog andere strategieën ontwikkeld, maar deze hebben doorgaans een beperkt toepassingsdomein, bijv. bepaalde vormen van default-redeneren (zie bijv. mijn [DC00]).

8. Hierbij is $\exists A$ een afkorting voor de existentiële sluiting van A (alle vrije variabelen in A zijn gebonden door een existentiële kwantor), en is $\sim$ een paraconsistente negatie.

CLuN [9] de onderlimiet-logica is, en Ω alle formules van de vorm $\exists(A\wedge{\sim}A)$ bevat. Dan bekomen we **CL** als bovenlimiet-logica. [10]

Het belang van de verzameling abnormaliteiten kan als volgt geduid worden. Als een verzameling premissen niet "eist" dat er abnormaliteiten optreden (i.e. er zijn geen abnormaliteiten die **OL**-afleidbaar zijn uit de premissen), dan zal de adaptieve logica dezelfde gevolgverzameling opleveren als de bovenlimiet-logica. Als een of meerdere abnormaliteiten wel **OL**-afleidbaar zijn uit de verzameling premissen, zal de adaptieve logica nog altijd meer gevolgen opleveren dan de onderlimiet-logica: namelijk al die **BL**-gevolgen van de premissen waarvan de afleiding niet door de abnormaliteiten geblokkeerd wordt, zullen ook **AL**-gevolgen zijn van de premissen. Een adaptieve logica interpreteert een verzameling premissen "zoveel als mogelijk" in overeenstemming met de standaard van de bovenlimiet-logica; ze vermijdt zoveel als mogelijk de afleiding van abnormaliteiten, tenminste in zoverre de premissen dit toelaten.

De keuze van de logische vorm van de abnormaliteiten is erg centraal. Ook al hebben twee adaptieve logica's dezelfde onderlimiet-logica, dezelfde bovenlimiet-logica en dezelfde adaptieve strategie, dan nog wil dit niet zeggen dat ze identiek zijn. Het is de vastgelegde logische vorm van de abnormaliteiten die bepaalt of de adaptieve logica's identiek zijn.

Voor de meeste adaptieve logica's geldt dat uit een verzameling premissen een disjunctie van abnormaliteiten kan volgen, zonder dat een van de disjuncten uit die verzameling premissen volgt. [11] Disjuncties van abnormaliteiten worden *Dab-formules* genoemd. Een uitdrukking van de vorm $Dab(\Delta)$ verwijst naar een disjunctie van alle leden van Δ, waarbij Δ een eindige deelverzameling is van de verzameling van abnormaliteiten Ω. De *Dab*-formules die **OL**-afleidbaar zijn uit de verzameling premissen

9. De paraconsistente logica **CLuN** kan bekomen worden door het volledig positief fragment van **CL** uit te breiden met het axiomaschema $A \vee {\sim}A$. De paraconsistente negatie '$\sim$' heeft geen verdere eigenschappen. Voor een volledige lijst van axioma's en regels voor **CLuN**, cf. infra.

10. De **CL**-modellen van Γ zijn die **CLuN**-modellen van Γ die geen enkele abnormaliteit verifiëren. Als Γ abnormaal (i.e. inconsistent) is, dan heeft Γ geen **CL**-modellen, en is de **CL**-gevolgverzameling van Γ de triviale verzameling.

11. Dit hangt uiteraard af van de onderlimiet-logica **OL**. Als een disjunctie van abnormaliteiten **OL**-afleidbaar is uit Γ alss een van de disjuncten **OL**-afleidbaar is uit Γ, dan zal de eenvoudige strategie volstaan. Als dit niet het geval is, kan gekozen worden voor betrouwbaarheid of minimale abnormaliteit als strategie (cf. hoofdstuk 4).

Γ, worden *Dab-gevolgen* van Γ genoemd. [12]

De *minimale Dab-gevolgen* van een verzameling premissen Γ spelen een centrale rol in de werking van de meeste adaptieve logica's. $Dab(\Delta)$ is een *minimaal Dab-gevolg* van Γ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{OL}} Dab(\Delta)$ en er geen $\Delta' \subset \Delta$ bestaat zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{OL}} Dab(\Delta')$. Als $Dab(\Delta)$ een minimaal Dab-gevolg is van Γ, moet dit als volgt geïnterpreteerd worden: de verzameling premissen Γ bepaalt dat minstens één element van Δ zich abnormaal gedraagt, maar op basis van Γ kan niet bepaald worden welk element van Δ zich abnormaal gedraagt. [13]

We zullen onmiddellijk zien dat het "zo normaal mogelijk" interpreteren van de premissen enigszins ambigu is, en deze ambiguïteit heeft precies te maken met de interpretatie van de minimale Dab-gevolgen van de premissen. Het wegwerken van de ambiguïteit resulteert in twee strategieën: de eerder voorzichtige strategie *betrouwbaarheid* en de minder behoedzame strategie *minimale abnormaliteit*.

3.3. Dynamische bewijzen

Voor adaptieve logica's wordt gebruik gemaakt van *dynamische* bewijzen, die de interne dynamiek van een redeneerproces weergeven. In de bewijzen wordt verondersteld dat een formule zich normaal gedraagt, *tenzij en totdat* het tegendeel is aangetoond. Een geannoteerd dynamisch bewijs verschilt van een geannoteerd klassiek bewijs door het toevoegen van een extra element, en het markeren van bepaalde lijnen in een bewijs.

De lijnen van een geannoteerd dynamisch bewijs bevatten vier elementen (in plaats van drie) [14]: een lijnnummer, de afgeleide formule, de verantwoording (een afleidingsregel en eventueel de nummers van lijnen waarop gesteund wordt), en een *voorwaarde*.

12. $Dab(\Delta)$ is **OL**-afleidbaar uit Γ alss $Dab(\Delta)$ **AL**-afleidbaar is uit Γ (cf. infra).

13. Als $Dab(\Theta)$ een Dab-gevolg is van Γ, dan is ook $Dab(\Theta')$ een Dab-gevolg van Γ, voor elke eindige Θ' zodanig dat $\Theta \subseteq \Theta'$. Daarom is het van belang enkel aandacht te besteden aan de *minimale Dab*-gevolgen van Γ, die een maximale lokalisatie van de abnormaliteiten garanderen (gegeven Γ).

14. Als verschillende adaptieve logica's met elkaar gecombineerd worden, wordt doorgaans een extra element voorzien (voor het tweede type van abnormaliteiten). Soms worden de afleidingsregel en de nummers van lijnen waarop gesteund wordt om de afleiding te maken, als twee aparte elementen gezien. Een dynamisch bewijs heeft dan vijf elementen.

De voorwaarde Δ is een verzameling van abnormaliteiten ($\Delta \subset \Omega$). De betekenis van de voorwaarde kan als volgt begrepen worden: de formule A (het tweede element van de lijn) is afgeleid, op voorwaarde dat alle elementen van Δ als vals kunnen beschouwd worden, gegeven de verzameling premissen in kwestie.

Een tweede verschil met statische bewijzen is dat er naast een verzameling *regels* die toelaten om lijnen aan een bewijs toe te voegen, ook een *markeringsdefinitie* nodig is. Deze definitie zal bepalen welke lijnen op een bepaald stadium van een bewijs gemarkeerd moeten worden.

Waar Γ een verzameling premissen is en

$$A \quad \Delta$$

afkort dat A op een lijn in het bewijs voorkomt met als voorwaarde Δ, kunnen de (generieke) regels als volgt worden weergegeven: [15]

PREM Als $A \in \Gamma$:

$$\begin{array}{cc} \ldots & \ldots \\ \hline A & \emptyset \end{array}$$

RU Als $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{OL}} B$:

$$\begin{array}{cl} A_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array}$$

RC Als $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{OL}} B \vee Dab(\Theta)$:

$$\begin{array}{cl} A_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Theta \end{array}$$

Er is een opvallende gelijkenis tussen dynamische bewijzen en **OL**-bewijzen.

15. In de vroege publicaties over (inconsistentie-) adaptieve logica's worden de generieke regels enigszins anders gepresenteerd. De hier gegeven, meer overzichtelijke presentatie van de generieke regels is overgenomen uit [Bat01b].

Stel dat we elke lijn

$$A \quad \Delta$$

van een dynamisch bewijs omzetten naar

$$A \vee Dab(\Delta)\,,$$

waarbij we bepalen dat "$\vee Dab(\varnothing)$" de lege string is. Dan kan gemakkelijk worden aangetoond, via een inductie over de lengte van het bewijs, dat de reeks formules die de omzetting heeft opgeleverd, een **OL**-bewijs is uit Γ, waarbij enkel toepassingen van PREM en RU gebruikt zijn. Deze eenvoudige eigenschap is bijzonder krachtig, en wordt dan ook veelvuldig gebruikt voor het bewijzen van meta-theoretische eigenschappen. De eigenschap verduidelijkt ook wat er eigenlijk gebeurt in een dynamisch bewijs. Het eigenlijke nut van het bijzondere bewijsformaat ligt enkel en alleen in de markeringsdefinitie en de interpretatie ervan: een lijn i waarop A is afgeleid op de voorwaarde Δ, vormt de verantwoording voor het besluit om A te beschouwen als een gevolg van de premissen, tenzij en totdat lijn i gemarkeerd wordt.

We kunnen onze aandacht nu richten op de *markeringsdefinities*. Op elk stadium van een bewijs uit Γ zijn een aantal (geen enkele, een, of meerdere) Dab-formules afgeleid op de lege voorwaarde. Gegeven een dynamisch bewijs uit Γ, wordt $Dab(\Delta)$ een *minimaal Dab-gevolg* van Γ genoemd op stadium s van het bewijs alss, op dat stadium, $Dab(\Delta)$ voorkomt op een lijn van het bewijs met de lege voorwaarde en, voor om het even welke $\Delta' \subset \Delta$, $Dab(\Delta')$ (op datzelfde stadium s) niet voorkomt op een lijn met de lege voorwaarde. Waar $Dab(\Delta_1), \ldots, Dab(\Delta_n)$ de minimale Dab-gevolgen zijn op stadium s van het bewijs uit Γ, representeert $U_s(\Gamma) = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ de verzameling van onbetrouwbare formules op stadium s.

Definitie 21 (Markering voor de betrouwbaarheidsstrategie). *Lijn i is* gemarkeerd *op stadium s alss, waar Δ de voorwaarde is van lijn i, $\Delta \cap U_s(\Gamma) \neq \varnothing$.*

Veronderstel dat $Dab(\Delta)$ een minimaal Dab-gevolg is van Γ op stadium s van een bewijs uit Γ. Dan is, volgens de inzichten die het bewijs op stadium s verschaft, (minstens) één lid van Δ waar, maar kan, gegeven het inzicht in de verzameling premissen op stadium s, niet uitgemaakt worden welk lid van Δ zich abnormaal gedraagt. De betrouwbaarheidsstrategie gaat er dan voorzichtigheidshalve van uit dat alle leden van Δ zich mogelijk abnormaal gedragen, en beschouwt daarom alle leden van $U_s(\Gamma)$ als onbetrouwbaar (op stadium s). Veronderstel dat in het bewijs op stadium s een lijn i voorkomt met A als tweede element en als voorwaarde Θ. Als Θ minstens een element van $U_s(\Gamma)$ bevat, dan is lijn i op stadium s gemarkeerd: er kan immers niet coherent verondersteld worden dat alle elementen van Θ vals zijn. Het is goed mogelijk dat A terug afleidbaar wordt op stadium $s + j$ (bijv. omdat een *Dab*-gevolg van Γ dat minimaal was op stadium s niet langer minimaal is op stadium $s + j$). Het is natuurlijk evengoed mogelijk dat A ook op stadium s afleidbaar is (omdat A ook voorkomt op een lijn j, met als voorwaarde Δ_j, en $\Delta_j \cap U_s(\Gamma) = \varnothing$).

De markeringsdefinitie voor de Minimale-Abnormaliteit-strategie is heel wat complexer. [16] Laat $\Phi_s^\circ(\Gamma)$ de verzameling van alle verzamelingen zijn die een disjunct uit elke minimale *Dab*-formule op stadium s bevatten. Laat $\Phi_s^\star(\Gamma)$, voor elke $\varphi \in \Phi_s^\circ(\Gamma)$, de verzameling $Cn_{\mathbf{OL}}(\varphi) \cap \Omega$ bevatten. Tenslotte, laat $\Phi_s(\Gamma)$ die leden van $\Phi_s^\star(\Gamma)$ bevatten die geen echte superverzamelingen zijn van andere leden van $\Phi_s^\star(\Gamma)$.

Definitie 22 (Markering voor Minimale Abnormaliteit). *Lijn i, waarop A is afgeleid op de voorwaarde Δ, is gemarkeerd op stadium s alss*

(1) *er geen enkele $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ bestaat zodat $\varphi \cap \Delta = \varnothing$, of*

(2) *als er voor een $\varphi \in \Phi_s(\Gamma)$ geen enkele lijn is waarop A is afgeleid op voorwaarde Θ, zodat $\varphi \cap \Theta = \varnothing$.*

De formules die *afgeleid* zijn uit Γ *op een stadium* van het bewijs zijn die formules die afgeleid zijn op een lijn die niet gemarkeerd is op dat stadium. Naarmate het bewijs uitgebreid wordt, kunnen ongemarkeerde lijnen gemarkeerd worden, en omgekeerd. Daarom is het belangrijk ook een stabiele notie van afleidbaarheid te hebben:

Definitie 23. *A is* finaal afgeleid *op lijn i van een bewijs op stadium s alss*

(1) *A het tweede element is van lijn i,*

(2) *lijn i niet gemarkeerd is op stadium s, en*

16. Het intuïtief vatten van de strategie Minimale Abnormaliteit verloopt een stuk vlotter via de semantiek (zie verder).

(3) *elke uitbreiding van het bewijs waarin lijn i gemarkeerd zou worden, kan steeds op een bepaalde manier verder worden uitgebreid zodanig dat lijn i (terug) ongemarkeerd is.*

Definitie 24. $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ *(A is* finaal **AL**-afleidbaar *uit* Γ*) alss A finaal is afgeleid op een lijn van een bewijs uit* Γ*.*

Deze notie van finale afleidbaarheid is niet meer dan een definitie, en vanuit 'computationeel' oogpunt van weinig waarde (maar daarvoor is de definitie ook niet bedoeld). Aangezien elk stadium van een concreet dynamisch bewijs steeds eindig is, kan men zich afvragen of men, op basis van een eindig dynamisch bewijs, ooit tot het besluit kan komen dat een formule finaal is afgeleid uit Γ. En als dit (in een aantal gevallen) niet het geval is, wat betekent het dan dat een formule is afgeleid op een stadium s van een bewijs uit Γ?

Vooreerst zijn er *criteria* voor finale afleidbaarheid en methodes om die criteria te bereiken (zie bijv. [BM01], [BM00b]). Deze criteria zijn vrij complex, en een veelbelovend alternatief vormen de zogenaamd doelgerichte bewijzen die ook voor adaptieve logica's kunnen worden ontwikkeld (zie bijv. [BP01]).

Ten tweede kan worden aangetoond (zie [Bat95]) dat, ook wanneer geen enkel criterium voor finale afleidbaarheid van toepassing is, een bewijs op een stadium een goede *benadering* (of *schatting*) van finale afleidbaarheid oplevert. Als de benadering op een stadium niet samenvalt met finale afleidbaarheid, dan zal het voortzetten van een bewijs doorgaans een betere benadering opleveren (in elk geval geen slechtere). De geschatte verzameling gevolgen *convergeert* naar de werkelijke verzameling finale gevolgen. [17] De benadering op een stadium is bovendien optimaal in functie van de door het bewijs verschafte inzichten in de premissen (op dat stadium). In die zin vormt afleidbaarheid op een stadium de basis voor het nemen van rationele beslissingen. Het is op basis van pragmatische overwegingen dat men zal uitmaken of men beter een beslissing neemt op basis van de huidige inzichten, dan wel poogt om de benadering te verbeteren. Hier ligt

17. Je kan natuurlijk zeer inefficiënte dynamische bewijzen maken (vergelijkbaar met bijv. het maken van een **CL**-bewijs waar je continu Additie toepast, terwijl je eigenlijk Modus Ponens zou moeten toepassen om een bepaald gevolg af te leiden). De vermelde doelgerichte bewijzen lijken alvast een middel om meer efficiënte bewijzen te produceren.

dus het werkelijke belang van dynamische bewijzen: in situaties waar een finale verantwoording buiten ons bereik ligt, leveren ze ons een weliswaar provisoire, maar gerechtvaardigde verantwoording (gegeven ons inzicht in de premissen op dat ogenblik).

3.4. Semantiek

We hebben reeds even aangeraakt hoe de semantiek van **AL** wordt verkregen. Uit de verzameling **OL**-modellen van Γ worden, op basis van de adaptieve strategie, een aantal modellen geselecteerd. De geselecteerde modellen zijn de **AL**-modellen van Γ.

Vooraf bepalen we de verzameling van abnormaliteiten die geverifieerd worden door een **OL**-model M: [18]

Definitie 25. $Ab(M) = \{A \mid A \in \Omega; M \models A\}$.

De verzameling van Γ-onbetrouwbare formules, $U(\Gamma)$, wordt als volgt bepaald: $U(\Gamma) = \{A \mid A \in \Delta$, waarbij $Dab(\Delta)$ een minimaal Dab-gevolg is van $\Gamma\}$. Een model van Γ is *betrouwbaar* alss dat model geen 'overbodige' abnormaliteiten verifieert:

Definitie 26. *Een* **OL**-*model* M *van* Γ *is* betrouwbaar *alss* $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.

Een model van Γ is *minimaal abnormaal* alss er geen enkel ander model van Γ (verzamelingtheoretisch) minder abnormaliteiten verifieert:

Definitie 27. *Een* **OL**-*model* M *van* Γ *is* minimaal abnormaal *alss er geen* **OL**-*model* M' *van* Γ *is waarvoor* $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Uit de **OL**-modellen van Γ selecteert de strategie Betrouwbaarheid de betrouwbare modellen van Γ als de **AL**-modellen van Γ, terwijl de strategie Minimale Abnormaliteit de minimaal abnormale modellen selecteert als de **AL**-modellen van Γ. De formules die alle geselecteerde modellen van Γ verifiëren, zijn de **AL**-gevolgen van de premissen:

Definitie 28.
$\Gamma \models_{\mathbf{AL}} A$ *alss* A *geverifieerd wordt door alle* **AL**-*modellen van* Γ.

18. $M \models A$ drukt uit dat A geverifieerd wordt door M.

Deze abstracte semantische definities laten niet toe om vat te krijgen op feitelijke redeneringen. Daarvoor dienen de dynamische bewijzen. Voor alle verdere meta-theorie verwijzen we naar [Bat] en [Bat01b].

3.5. Opmerking

We hebben adaptieve logica's vrij kort behandeld, en daarmee zeker geen recht gedaan aan de technische en filosofische rijkdom ervan. Een aantal van de in dit hoofdstuk aangeraakte thema's zullen echter in de volgende hoofdstukken — 'spelenderwijs' — terug worden opgenomen.

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 4

De vraaglogica VA

4.1. Inleiding

De vraaglogica die in dit hoofdstuk zal worden geschetst, bouwt voort op de methode die Joke Meheus in [Meh01] gebruikt om een adaptieve logica voor vraagevocatie te ontwerpen. Het in dit en volgend hoofdstuk uitgewerkte voorstel is echter algemener, omdat naast evocatie ook andere erotetische concepten kunnen worden gevat. De logica wordt niet ingeperkt tot het ω-volledig fragment. Vragen krijgen een andere logische vorm dan in het voorstel van Meheus, en worden min of meer als 'gewone' formules behandeld: ze krijgen een waarheidswaarde toegekend, kunnen (onder een speciale logische vorm) als premisse worden geïntroduceerd, en er kunnen logische operaties op worden toegepast. Het belang van de hier voorgestelde aanpak zit hem voor een groot stuk in het feit dat er een bewijstheorie ontwikkeld wordt (die overigens dicht aanleunt bij die in [Meh01], maar er toch op een aantal punten wezenlijk van verschilt). De bewijstheorie is een van de aspecten die in de meeste erotetische logica's quasi volledig verwaarloosd werden. [1] Ook in Wiśniewski's inferentiële

1. Kenschetsend is de volgende verzuchting in [NF00], wanneer de auteurs het hebben over een aantal toonaangevende vraaglogica's (die louter semantisch geöriënteerd zijn): "In contemplating a logic of questions, one would certainly hope for a syntactic proof-theoretic formulation bundled with an effective proof-search procedure to complement the semantic model-theoretic formulation."

vraaglogica worden de erotetische concepten uitsluitend semantisch gedefinieerd. Omdat de bepaling van die erotetische concepten steunt op voorwaarden waarvoor (in het algemeen) geen positieve test is, zijn ze van beperkt praktisch nut. Daarom is het zinvol om de abstracte erotetische concepten bewijstheoretisch te 'benaderen' met behulp van de dynamische bewijzen van een adaptieve logica (cf. infra).

Hoewel het toekennen van waarheidswaarden aan vragen zeker betwistbaar is, zijn er in de literatuur heel wat voorstellen te vinden waarin dit gebeurt. [2] Het toekennen van waarheidswaarden aan vragen, betekent niet dat we zullen spreken van een "ware vraag" en een "valse/onware vraag". In de literatuur vinden we verschillende mogelijke interpretaties terug [3], maar wij zullen doorgaans spreken van een "onopgeloste vraag" (soms ook van een "open vraag" of een "terechte vraag") en een "opgeloste vraag" (of een "onterechte vraag").

Zoals voor (nagenoeg) elke adaptieve logica zal de adaptieve logica **VA** bepaald worden door het vastleggen van een onderlimiet-logica, van de logische vorm van de abnormaliteiten, en van een strategie. De onderlimiet-logica **V** van **VA** is een erotetische uitbreiding van de eerste orde modale logica **T**. [4]

In de volgende sectie bepalen we eerst de welgevormde formules van **V** (en dus ook van **VA**), en worden een aantal afspraken vastgelegd. Daarna wordt de syntaxis en semantiek van de onderlimiet-logica **V** voorgesteld. Door het bepalen van de abnormaliteiten (het vastleggen van hun logische

2. Zo kennen bijvoorbeeld Åqvist (zie bijv. [Åqv65] en [Åqv83]), Harrah (bijv. [Har61]), Hoepelman (in [Hoe83]), en in zekere zin ook Meheus (in [Meh01]) aan vragen een waarheidswaarde toe (tussen de verschillende aanpakken zijn wel zeer grote verschillen). Wiśniewski (zie bijv. [Wiś95]) wijst het toekennen van waarheidswaarden aan vragen zeer duidelijk af.

3. Zo kan er bijv. gesproken worden van een "correcte vraag" en een "incorrecte vraag" ([Åqv65, p. 26]). Hoepelman ([Hoe83]) opteert er voor de operator "?" zelf te interpreteren als "Het is de vraag of"("It is the question whether"). Dat de vraag $?\{p, \neg p\}$ vals is, namelijk "$\neg ?\{p, \neg p\}$", kan dan gelezen worden als "Het is niet de vraag of p (al dan niet) het geval is" (de notatie van de vraag is niet die van Hoepelman). Ginzburg (in [Gin95]) spreekt (weliswaar in een linguïstische context) over "resolved questions" en "unresolved questions". We zullen voor deze laatste interpretatie kiezen.

4. De logica **T** is identiek aan de logica **M** van von Wright. Verschillende predikatieve versies van **T** zijn mogelijk. We zullen kiezen voor een versie waarin alle werelden van een model hetzelfde domein hebben. Wat in elk geval essentieel is, is dat $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$ niet geldig is in de onderlimiet-logica **V**.

vorm) en de keuze van een strategie (om de premissen zo normaal mogelijk te interpreteren) wordt dan de adaptieve logica **VA** bepaald. We geven de semantiek en de bewijstheorie van **VA**, en illustreren deze met een aantal voorbeelden. In het volgende hoofdstuk zullen we aan de hand van de logica's **V** en **VA** een aantal erotetische concepten (zoals evocatie en erotetische implicatie) bepalen, en deze vergelijken met voorstellen uit de literatuur.

4.2. Voorbereiding

4.2.1. Bepaling van de welgevormde formules

Eerst wordt de taal $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$ van de logica **V** (en dus ook van **VA**) gedefinieerd, en daarna worden de welgevormde formules van **V** (en ook van **VA**) bepaald.

Laat $\mathcal{L}$ de standaardtaal van **CL** zijn, inclusief $=$ en $\perp$. [5] $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$ staan respectievelijk voor de verzameling (open en gesloten) formules van $\mathcal{L}$, en de verzameling wffs (gesloten formules) van $\mathcal{L}$. Laat $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ de modale standaardtaal zijn die bekomen wordt door $\mathcal{L}$ op de gebruikelijke wijze uit te breiden met de modale operatoren "$\Box$" en "$\Diamond$". $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{W}^{\mathcal{M}}$ staan respectievelijk voor de verzameling (open en gesloten) formules van $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$, en de verzameling wffs (gesloten formules) van $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$. De taal $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$ wordt bekomen door $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ uit te breiden met de erotetische tekens "?", "{", "}" en ",".

Nu kan de verzameling wffs van $\mathcal{L}^{\mathcal{V}}$, $\mathcal{W}^{\mathcal{V}}$, bepaald worden. Deze wordt bekomen door de verzameling wffs van $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$, $\mathcal{W}^{\mathcal{M}}$, uit te breiden met de verzameling van alle formules die kunnen worden bekomen door de volgende definities toe te passen op wffs van $\mathcal{W}^{\mathcal{M}}$: [6]

5. Syntactisch kan "$\perp$" gekarakteriseerd worden door "$\perp \supset A$".
6. Wat bedoeld wordt, is het volgende: als $A \in \mathcal{W}^{\mathcal{M}}$, en een sub-wff B van A kan op basis van D1 of D2 gelijkgesteld worden aan $Q_1 = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ of $Q_2 = (?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, dan is de formule die bekomen wordt door B in A te vervangen door Q_1 (of Q_2), een wff van $\mathcal{W}^{\mathcal{V}}$.

D1 $?\{A_1, \ldots, A_n\} =_{df} \Diamond(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (\Diamond\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg A_n)$, waarbij $n \geqslant 2$ en $A_1, \ldots, A_n$ syntactisch verschillende wffs zijn van $\mathcal{W}$.

D2 $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =_{df} \Diamond(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge (\forall\alpha_1)\ldots(\forall\alpha_n)\Diamond\neg A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, waarbij $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{F}$, en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de enige variabelen zijn die vrij voorkomen in A.

De verantwoording voor de specifieke logische vorm van de twee soorten vragen wordt gegeven in de volgende afdeling. Merk op dat een vraag in $\mathcal{W}^{\mathcal{V}}$ als een 'gewone' modale formule behandeld wordt: ook de negatie van een vraag, en gemengde formules (die zowel vragen als (gewone) modale formules bevatten) zijn welgevormd. [7] De logica **V** zal dan ook toelaten om bepaalde logische operaties op vragen uit te voeren.

Om de zaken niet al te complex te maken, zullen we de toegelaten complexiteit van de wffs van $\mathcal{W}^{\mathcal{V}}$ drastisch inperken, namelijk tot wffs van de nulde, eerste en tweede graad. [8] Een wff van de *nulde graad* bevat geen modaliteiten, en dus ook geen vragen. Een wff van de *eerste graad* bevat een of meerdere modaliteiten, maar geen enkele modaliteit komt voor binnen het bereik van een andere modaliteit. [9] Een wff van de tweede graad bevat een of meerdere modaliteiten die voorkomen binnen het bereik van een andere modaliteit, die op zich niet voorkomt binnen het bereik van een andere modaliteit, en geen enkele modaliteit komt voor binnen het bereik van een modaliteit die zelf voorkomt binnen het bereik van een modaliteit. Een formule als $\Box?\{p, q\}$, die equivalent is met $\Box(\Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q)$, is dus een wff van de tweede graad. [10]

7. In [Meh01], waarop onze aanpak is geïnspireerd, zijn dit soort formules niet welgevormd: op vragen mag geen enkele logische operatie worden toegepast. Omdat onze aanpak wel gemengde wffs toelaat, zal dit een meer 'natuurlijke' bewijstheorie opleveren (omdat abnormaliteiten ook in het bewijs zelf aan vragen kunnen worden gehecht (cf. infra)).
8. Later worden ook aan de premissen beperkingen opgelegd: er zal geëist worden dat elke premisse voldoet aan een bepaalde logische vorm (cf. infra).
9. Vragen van de eerste en tweede soort zijn dus wffs van de eerste graad.
10. Een wff als $\Diamond(\Box p \vee \Box\neg p) \wedge \Diamond\neg\Box p \wedge \Diamond\neg\Box\neg p$ is ook een wff van de tweede graad. Intuïtief representeert ze een (niet-gedefinieerde) vraag van de derde soort, namelijk $?\{\Box p, \Box\neg p\}$. Dit soort vragen is echter niet gedefinieerd (en niet welgevormd). De formule zal, met de beperkingen die aan de premissen zullen worden opgelegd, ook niet afleidbaar zijn (tenzij de premissen inconsistent zijn).

4.2.2. Presupposities, vragen en antwoorden

Er kunnen twee soorten vragen uitgedrukt worden in **V**. Deze twee soorten vragen vinden we bij zowat alle auteurs terug. [11]

Vragen van de *eerste soort* zijn vragen van de vorm $?\{A_1, \ldots, A_n\}$, waarbij $n \geqslant 2$ en $A_1, \ldots, A_n$ syntactisch verschillende wffs van $\mathcal{L}$ zijn (geen enkele A_i bevat dus modaliteiten). Een vraag van de vorm $?\{A_1, \ldots, A_n\}$ kan gelezen worden als "De vraag 'Is A_1 het geval, of ..., of is A_n het geval?' is (voorlopig) onopgelost". [12] De directe antwoorden op de vraag $Q = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ zijn $\Box A_1, \ldots, \Box A_n$. De verzameling *proactieve presupposities* van de vraag Q, $PPres(Q)$, bepalen we als $\{\Box B \mid \vdash_{\mathbf{V}} \Box B \equiv \Box(A_1 \vee \ldots \vee A_n)\}$. We selecteren een specifiek lid van $PPres(Q)$ als representant voor die verzameling. Dit representatief lid noemen we $\pi(Q)$, en $\pi(Q) = \Box(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$, de proactieve presuppositie van de vraag Q. [13] We kunnen ook de 'antipode' van $\pi(Q)$, $\rho(Q)$, bepalen. Daartoe definiëren we eerst de verzameling *onderdrukkers* van de vraag Q als

11. De meeste vraaglogica's laten toe om een ganse lijst van (veel meer) gesofisticeerde vragen te formuleren, zoals "Welke zijn alle priemgetallen die liggen tussen 35 en 427?", of "Welke boeken heb je al gelezen? Noem er minstens vijf.", "Welke studenten slaagden voor welke vakken?" De meeste van die vragen zouden ook in ons systeem kunnen worden gedefinieerd. Zoals reeds vermeld, is dit niet onze voornaamste bekommernis. Daarnaast is Hoepelman zowat de enige auteur die een (propositionele) logica voorstelt waarin ook vragen over vragen kunnen worden uitgedrukt (zie [Hoe83]). Ook deze zouden in de logica **V** kunnen worden uitgedrukt, maar dan moet de op **V** gebaseerde adaptieve logica **VA** wel aanzienlijk worden gewijzigd: zowel de verzameling abnormaliteiten als de strategie moeten anders worden bepaald.

12. Of: "Het is een open vraag of A_1, of ..., of A_n het geval is."; of, aansluitend bij Hoepelman: "Het is de vraag of A_1, of ..., of A_n het geval is".

13. Merk op dat de *proactieve presuppositie* van een vraag Q, gelijk is aan een *prospectieve presuppositie*, voorafgegaan door een $\Box$, van de overeenkomstige vraag Q in de theorie van Wiśniewski. Een prospectieve presuppositie is veel sterker dan een proactieve presuppositie. In Wiśniewski's theorie (zie bijv. [Wiś95, pp. 115–120]) is een presuppositie A van een vraag Q een prospectieve presuppositie alss de verzameling van directe antwoorden 'multiple conclusion'-afleidbaar is uit A. Voor de notie presuppositie van een vraag neemt Wiśniewski de definitie van Belnap over: een d-wff A is een *presuppositie* van een vraag Q alss uit elk direct antwoord op Q kan worden afgeleid dat A. Een presuppositie van een vraag is dus een d-wff, waarvan de waarheid noodzakelijk is opdat de vraag een waar direct antwoord zou hebben. Een prospectieve presuppositie is een presuppositie die, als ze waar is, het bestaan van een waar direct antwoord op de vraag garandeert. In onze aanpak garandeert het waar zijn van de proactieve presuppositie *niet* dat een direct antwoord op de vraag waar is (voor een vraag van de eerste soort zou $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ dat wel doen, en dus een prospectieve presuppositie zijn).

$\{\Box B \mid \vdash_{\mathbf{V}} \Box B \equiv \Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)\}$. Ook van deze verzameling kiezen we een representatief lid, namelijk $\rho(Q) = \Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$. De *onderdrukker* $\rho(Q)$ van een vraag Q drukt uit dat geen enkel direct antwoord van Q het geval kan zijn, en kan gelezen worden als “Het is uitgesloten dat A_1 het geval is, en dat ..., en dat A_n het geval is”. Merk op dat $\rho(Q)$ impliceert dat $\neg\pi(Q)$. Als we uit een verzameling premissen kunnen afleiden dat $\pi(Q)$, weten we dus dat de vraag Q niet onderdrukt wordt. Dan kan afgeleid worden dat Q een onopgeloste vraag is (blijft), tenzij en totdat een direct antwoord van Q wordt afgeleid.

De tweede soort vragen is van de vorm $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, waarbij $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathcal{F}$, en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de enige variabelen zijn die vrij voorkomen in A. De vraag $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ kan gelezen worden als: “De vraag ‘Welk n-tupel $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ voldoet aan $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$?’ is onopgelost”. Elke wff van de vorm $\Box A(\alpha_1/c_{i_1},\ldots,\alpha_n/c_{i_n})$ [14] is een direct antwoord op de vraag $Q = (?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. De verzameling van proactieve presupposities van een vraag Q van de tweede soort, $PPres(Q)$, is gelijk aan $\{\Box B \mid \vdash_{\mathbf{V}} \Box B \equiv \Box(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\}$. Er wordt een specifiek lid van $PPres(Q)$ geselecteerd als representant voor die verzameling. Dit representatief lid wordt voorgesteld door $\pi(Q)$, en $\pi(Q) = \Box(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Het afleiden van de proactieve presuppositie $\Box(\exists x)(\exists y)Pxy$ van de vraag $(?x)(?y)Pxy$ garandeert dat de vraag Q niet onderdrukt wordt (en dus niet dat de vraag zeker een waar direct antwoord heeft). Zoals hierboven representeert $\rho(Q)$ de *onderdrukker* van Q: $\rho(Q) = \Box\neg(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. $\rho(Q)$ drukt uit dat geen enkel direct antwoord van Q het geval kan zijn, en kan dus gelezen worden als “Het is uitgesloten dat er een n-tupel $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ voldoet aan A”. Merk op dat $\rho(Q)$ impliceert dat $\neg\pi(Q)$.

Wanneer we voortaan de meta-variabele Q gebruiken, wordt hiermee steeds een vraag van de eerste of tweede soort bedoeld. De verzameling dQ is de verzameling van alle directe antwoorden van een vraag Q.

De aanpak die we hier voorstellen lijkt een reductionistische aanpak van vragen te zijn. [15] Dit hoeft echter niet zo te zijn. Het onderscheid tus-

14. Zoals gebruikelijk wordt $A(\alpha_1/c_{i_1},\ldots,\alpha_n/c_{i_n})$ bekomen door de variabelen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ systematisch te vervangen door individuele constanten $c_{i_1},\ldots,c_{i_n}$.
15. De onderverdeling van logische theorieën over vragen en antwoorden in (radicaal en gematigd) reductionistische en niet-reductionistische theorieën is afkomstig van Wiśniewski (zie [Wiś95, pp. 37–43]).

sen reductionistische en niet-reductionistische aanpakken hangt af van het feit of men een vraag al dat niet als een aparte linguïstische entiteit opvat, die al dan niet herleidbaar is tot uitdrukkingen die behoren tot andere syntactische categorieën. [16] De hier voorgestelde aanpak sluit niet uit dat een vraag als een aparte linguïstische entiteit wordt beschouwd. [17] Sowieso staat het onderscheid tussen reductionistische en niet-reductionistische benaderingen voor ons niet erg centraal.

4.2.3. De verzameling premissen

Voor de toepassing die we op het oog hebben, kan "$\Box A$" best gelezen worden als "Er is bevestigd dat A het geval is" (bijv. door een betrouwbare bron). Dan kan "$\Diamond A$" gelezen worden als "Er is niet bevestigd dat $\neg A$ het geval is". Een andere mogelijkheid is "$\Diamond A$" te interpreteren als "Het is niet uitgesloten dat A het geval is". Eventueel kan ook de gebruikelijke interpretatie van "$\Diamond A$" als "Mogelijk is A het geval" aangehouden worden (weliswaar in een licht gewijzigde betekenis). [18] Zoals reeds opgemerkt kan "$\Box\neg A$" best gelezen worden als "Er wordt uitgesloten dat A het geval is". [19]

In een bepaalde context (bijvoorbeeld die van een detectiveroman, waarbij we er gemakshalve van uitgaan dat alle getuigen de waarheid spreken, en er voldoende getuigen van de misdaad te vinden zijn) zou $\Box A$ kunnen geïnterpreteerd worden als "Alle getuigen beweren dat A het geval is", en

16. De theorieën van Belnap, Kubiński en Wiśniewski zijn niet-reductionistisch. De vroege Harrah ([Har61]) herleidt vragen tot (bepaalde soorten van) declaratieve formules (radicaal reductionisme). Åqvist (bijv. [Åqv65]) en vooral Hintikka (bijv. [Hin83]) herleiden vragen tot (een bepaald soort) imperatieven (gematigd reductionisme).

17. Zo zouden de definities van vragen als inferentieregels kunnen worden beschouwd (i.p.v. als afkortingen voor bepaalde wffs).

18. In de natuurlijke taal worden die interpretaties in een aantal contexten vaak door elkaar gebruikt.

19. De *assertion logic* **A2** van Rescher [Res68, p. 252, pp. 268–272] valt samen met de logica **T**. Deze logica **A2** is bedoeld om een logische relatie te vatten tussen "assertors" (actoren die beweringen doen) en de proposities die worden beweerd. Op die manier krijgen de gebruikelijke modaliteiten en modale axioma's een verrassende lezing. Zo kan "$\Box A$" gelezen worden als "Iedereen beweert dat A het geval is". Het axioma "$\Box p \supset p$" (door Rescher om voor de hand liggende redenen tot 'Lincoln axioma' gedoopt), leest men dan als "Als p vals is, dan is er altijd minstens een iemand te vinden die niet beweert dat p het geval is." In bepaalde contexten leunt onze interpretatie daar dicht bij aan.

$\Diamond A$ als "Er is (minstens) één getuige die niet beweert dat A niet het geval is", of "Er is (minstens) één getuige die niet uitsluit dat A het geval is". Dan zou $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$ bijvoorbeeld kunnen betekenen dat er (minstens) één getuige is die niet uitsluit dat p het geval is, en (minstens) één (andere) getuige die niet uitsluit dat p niet het geval is. Als voor de detective het mysterie $?\{p, \neg p\}$ pas opgelost is wanneer alle getuigen eensluidend bevestigen dat p het geval is ($\Box p$), of dat $\neg p$ het geval is ($\Box\neg p$), dan wijst $\Diamond p \wedge \Diamond\neg p$ er op dat het mysterie vooralsnog onopgelost is.

De intuïtieve interpretatie van "$\Diamond A$" suggereert de volgende lezing van "$?\{p, q\}$": "Het is niet uitgesloten dat $p \vee q$ het geval is, en het is evenmin uitgesloten dat $\neg p$ het geval is, noch dat $\neg q$ het geval is". Dit impliceert dat alle opties (inzake p en q) (voorlopig) open blijven, en dat de vraag of p dan wel q het geval is (voorlopig) open (of: onopgelost) blijft (tenzij en totdat het tegendeel is aangetoond). Een vraag zal, gegeven een verzameling premissen, als *opgelost* beschouwd worden alss

(1) de onderdrukker van die vraag afgeleid is uit de premissen [20], of

(2) er een direct antwoord op de vraag afgeleid is uit de premissen (zie verder, afdeling 5.2, p. 118).

We gaan **V** (en later **VA**) enkel bepalen voor verzamelingen premissen waarvan elke premisse een bepaalde logische vorm heeft. We laten twee soorten van premissen toe: declaratieve en erotetische premissen.

Een verzameling declaratieve premissen, $\Gamma^\Box$, moet voldoen aan de volgende voorwaarde: $\Gamma^\Box \subseteq \{\Box A \mid A \in \mathcal{W}\}$. Elke declaratieve premisse is dus van de vorm $\Box A$, waarbij $A \in \mathcal{W}$, en kan gelezen worden als "Er is bevestigd dat A het geval is". Dat de beperking $A \in \mathcal{W}$ absoluut noodzakelijk is, wordt verder in de tekst aangetoond.

Om te vermijden dat het toelaten van erotetische premissen te pas en te onpas zou leiden tot trivialiteit, kunnen ook erotetische premissen slechts onder een bepaalde logische vorm worden ingevoerd. Stel dat we geen beperkingen opleggen aan erotetische premissen. Dan zou bijvoorbeeld $?\{p, \neg p\}$ als premisse kunnen worden ingevoerd. Maar dit houdt in dat, van zodra we $\Box p$ (i.e. "Er is bevestigd dat p het geval is", en dus een direct

20. Als de onderdrukker van een vraag afleidbaar is uit de premissen, dan is het, voor elk direct antwoord op die vraag, (logisch) uitgesloten dat het waar is (gegeven die premissen).

antwoord op de vraag) hebben afgeleid, we dan ook kunnen afleiden dat $\Diamond\neg p \wedge \Box p$, waardoor we trivialiteit bekomen. Daarom zullen vragen enkel kunnen worden geïntroduceerd onder een bepaalde logische vorm. [21]

Met het opleggen van een specifieke logische vorm aan de erotetische premissen, willen we de volgende benadering mogelijk maken. Elke als premisse geïntroduceerde vraag is een onopgeloste vraag, tenzij en totdat ze is opgelost (i.e. als de onderdrukker van de vraag of een direct antwoord ervan uit de verzameling premissen $\Gamma^{\Box}$ is afgeleid). Eens de vraag opgelost is, is de vraag zelf nooit meer afleidbaar (ze lost als het ware letterlijk op). Het oplossen van een vraag leidt op zich nooit tot trivialiteit. Daarna kan een volgende onopgeloste vraag aangepakt worden.

Vragen van de eerste soort kunnen enkel geïntroduceerd worden onder de volgende logische vorm:

$$\Box?\{A_1, \ldots, A_n\} \vee \Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \vee (\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n)$$

De verzameling van alle wffs van deze vorm noemen we IV_1:

$$\begin{aligned} IV_1 \quad = \quad & \{\Box?\{A_1, \ldots, A_n\} \vee \Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \\ & \quad \vee (\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n) \mid\ ?\{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{W}^{\mathcal{V}}\}. \end{aligned}$$

Een wff van IV_1, bijvoorbeeld $\Box?\{p, q\} \vee \Box\neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$, kan dan (ietwat omslachtig) als volgt geïnterpreteerd worden: "Er is bevestigd dat de vraag of p dan wel q het geval is, (voorlopig) onopgelost is, tenzij en totdat bevestigd wordt dat $\neg p$ en $\neg q$ het geval is, of dat p het geval is, of dat q het geval is."

Vragen van de tweede soort kunnen enkel geïntroduceerd worden onder de volgende logische vorm:

$$\begin{aligned} & \Box(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ & \vee \Box\neg(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ & \vee (\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)\Box A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{aligned}$$

De verzameling van alle wffs van deze vorm noemen we IV_2. Ze wordt op analoge wijze bepaald als IV_1. Een wff van IV_2, bijvoorbeeld $\Box(?x)Vxa \vee$

21. We zullen nog steeds een triviale gevolgverzameling bekomen als $\Gamma^{\Box}$ inconsistent is.

$\Box\neg(\exists x)Vxa \vee (\exists x)\Box Vxa$, kan als volgt geïnterpreteerd worden: [22] "Er wordt bevestigd dat de vraag wie Anita heeft vermoord, (voorlopig) onopgelost is, tenzij en totdat (alsnog) bevestigd wordt dat niemand haar heeft vermoord, of dat er iemand gevonden wordt (van wie bevestigd wordt dat) die haar heeft vermoord." [23]

Een verzameling erotetische premissen, $\Gamma^{\Box ?}$, moet voldoen aan de volgende voorwaarde: $\Gamma^{\Box ?} \subset IV_1 \cup IV_2$. De reden waarom de eigenlijke vraag moet voorafgegaan worden door een $\Box$, is dat we anders geen onderscheid kunnen maken tussen erotetische premissen en stellingen van **V**. Zo is $?\{p, q\} \vee \Box\neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$ equivalent met $(\Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box\neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$, en dus een stelling van **V**. Alle wffs van de vorm $Q \vee \neg Q$, waarbij Q een vraag is van de eerste of tweede soort, zijn immers stellingen van **V**. De aanwezigheid van "$\Box$" voor een vraag Q, wijst er op dat de vraag Q aan ons wordt voorgelegd (ze is afkomstig van een externe bron, die ons 'uitnodigt' de vraag te beantwoorden). [24]

Het is duidelijk dat de introductie van een *veilige* vraag Q (een vraag Q is veilig alss $\pi(Q)$ een stelling is van **V**) [25] ook via een kortere disjunctie zou kunnen gebeuren, bijvoorbeeld door $\Box?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p$. Aangezien, als Q een veilige vraag is, $\pi(Q)$ steeds afleidbaar is (want een stelling is van **V**; in dit geval dus $\vdash_{\mathbf{V}} \Box(p \vee \neg p)$), en $\rho(Q)$ dus nooit afleidbaar is uit een consistente Γ, riskeren we op dit punt geen trivialiteit. Omwille van de uniformiteit kiezen we ook voor de introductie van veilige vragen toch voor de langere disjunctie (die voor veilige vragen sowieso equivalent is met de kortere disjunctie). [26]

De logica **V**, en later ook de adaptieve logica **VA** die erop gebaseerd is,

22. In deze interpretatie staat "V", een predikatieve constante van rang 2, voor "iemand vermoord hebben"; de constante "a" staat voor "Anita".
23. We zien hier het bekende onderscheid tussen *de dicto* (hier de presuppositie van de vraag, namelijk $\Box(\exists x)Vxa$) en *de re* ($(\exists x)\Box Vxa$, afleidbaar uit elk direct antwoord op de vraag).
24. Dit neemt niet weg dat wij zelf die externe bron kunnen zijn: het idee is dan dat de vraag Q werd afgeleid in een bepaalde context, en nu in een andere context (namelijk een context waarin we de vraag zullen trachten te beantwoorden of op te lossen) als probleem ("$\Box Q$") gepresenteerd wordt.
25. Ook hier wijken we lichtjes af van Wiśniewski's concept van een veilige vraag ("safe question").
26. In de voorbeelden die volgen zal een veilige vraag toch via de kortere disjunctie geïntroduceerd worden, enkel om praktische redenen, namelijk de formule op een lijn te krijgen.

wordt enkel gedefinieerd voor verzamelingen premissen die voldoen aan de bovenstaande voorwaarden. [27]

Het is belangrijk om even terug te komen op de specifieke logische vorm van vragen van de eerste en tweede soort. In [Meh01], waarin ook met een modale logica wordt gewerkt, wordt een vraag als $?\{A_1, \ldots, A_n\}$ immers gedefinieerd als $(\Box(A_1 \vee \ldots \vee A_n)) \wedge (\Diamond\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg A_n)$ (de onderliggende logica is het ω-volledig fragment van **S5**). De reden waarom ik kies voor een zwakkere representatie, $(\Diamond(A_1 \vee \ldots \vee A_n)) \wedge (\Diamond\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg A_n)$, volgt uit mijn opvatting dat ook vragen waarvan je niet zeker weet of ze een waar direct antwoord hebben, toch zeer nuttig kunnen zijn voor het (helpen) oplossen van een andere vraag. In gesprekken worden dergelijke vragen voortdurend gesteld. Omdat onze gesprekspartners zich doorgaans coöperatief opstellen, zijn deze vragen vaak efficiënter inzake het uitwisselen van informatie dan voorzichtige vragen (waarvan we eerst voor onszelf aantonen dat ze een waar direct antwoord hebben).

Het laat bovendien toe om erotetische premissen werkelijk als open vragen te beschouwen: geconfronteerd met een opgeworpen vraag (een erotetische premisse) kunnen we weliswaar vermoeden dat de vraagsteller een goede reden had om die vraag te stellen (namelijk hij of zij dacht dat de vraag een waar direct antwoord heeft; hij of zij weet alleen niet welk direct antwoord waar is), maar het is niettemin mogelijk dat uit *mijn* kennis volgt dat alle directe antwoorden op de vraag vals zijn (de onderdrukker van de vraag is afleidbaar). Mogelijk heeft de vraagsteller zich vergist, of redeneert hij/zij op basis van valse premissen. Het krijgen van een (betrouwbaar) corrigerend antwoord (de onderdrukker van de vraag) is voor de vraagsteller hoogst informatief. De voorgelegde vraag is opgelost (en is niet meer afleidbaar), en er kan begonnen worden met het (proberen) oplossen van de volgende vraag. Mochten we de representatie van [Meh01] gebruiken, en dus bijv. $((\Box(p \vee q)) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box p \vee \Box q$ als erotetische premisse invoeren (waarbij het eerste disjunct eventueel kan voorafgegaan worden door een $\Box$), zou het afleiden van $\Box(\neg p \wedge \neg q)$ uit de (declaratieve) premissen, leiden tot trivialiteit (en dus zou alle informatie verloren gaan).

27. Gemengde wffs zoals bijvoorbeeld $\Box p \supset (\Box?\{q, \neg q\} \vee \Box\neg q \vee \Box q)$ of samengestelde erotetische wffs als $\Box(?\{p, \neg p\} \vee ?\{q, r\})$ of $(\Box?\{q, r\} \vee \Box(\neg(q \vee r)) \vee \Box q \vee \Box r) \vee (\Box?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p)$ worden dus niet toegelaten als premisse. Het lijkt erg interessant om een aantal van deze inperkingen te laten vallen en te onderzoeken welke uitdrukkingsmogelijkheden dit oplevert, maar dit valt buiten het opzet van deze tekst.

4.3. De logica V

De logica **V** wordt bekomen door een predikatieve versie van de modale logica **T** uit te breiden met de reeds gegeven definities van de twee soorten vragen. Ik wil nogmaals benadrukken dat de logica **V** hier enkel bepaald wordt voor verzamelingen premissen $\Gamma^{\Box} \cup \Gamma^{\Box?}$. Hieronder volgt een korte presentatie van de syntaxis en semantiek.

4.3.1. Syntaxis van V

Een axiomatische formulering van **T** wordt bekomen door het propositioneel axioma-systeem voor **T** uit te breiden met

(1) de gebruikelijke axioma's en regels voor de kwantoren en de identiteit [28];

(2) de Barcan Formule $(\forall\alpha)\Box A \supset \Box(\forall\alpha)A$; en

(3) de definities van de verschillende soorten vragen.

Hieronder volgt een axiomatisch systeem voor de logica **V**:

MP	Uit A en $A \supset B$ besluiten tot B
A⊃1	$A \supset (B \supset A)$
A⊃2	$((A \supset B) \supset A) \supset A$
A⊃3	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
A⊥	$\bot \supset A$
A∧1	$(A \wedge B) \supset A$
A∧2	$(A \wedge B) \supset B$
A∧3	$A \supset (B \supset (A \wedge B))$
A∨1	$A \supset (A \vee B)$

28. De regel *eliminatie van de identiteit*, $\alpha = \beta \supset (A \supset A(\beta/\alpha))$, wordt beperkt tot substitutie *buiten* het bereik van een modaliteit. Toch kan bijvoorbeeld gemakkelijk worden afgeleid dat $\Box a = b, \Diamond A(a) \vdash_{\mathbf{V}} \Diamond A(b)$.

A∨2 $B \supset (A \vee B)$

A∨3 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$

A≡1 $(A \equiv B) \supset (A \supset B)$

A≡2 $(A \equiv B) \supset (B \supset A)$

A≡3 $(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B))$

A¬1 $\neg\neg A \supset A$

A¬2 $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

A∀ $(\forall\alpha)A(\alpha) \supset A(\beta)$

R∀ Besluiten tot $\vdash A \supset (\forall\alpha)B(\alpha)$ uit $\vdash A(\beta) \supset B$, op voorwaarde dat β niet voorkomt in A, noch in $B(\alpha)$.

A∃ $A(\beta) \supset (\exists\alpha)A(\alpha)$

R∃ Besluiten tot $\vdash (\exists\alpha)A(\alpha) \supset B$ uit $\vdash A(\beta) \supset B$, op voorwaarde dat β niet voorkomt in $A(\alpha)$, noch in B.

A=1 $\alpha = \alpha$

A=2 $\alpha = \beta \supset (A \supset B)$
waar B bekomen wordt door in A een α die voorkomt buiten het bereik van een modaliteit, te vervangen door β.

A□1 $\Box A \supset A$

A□2 $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$

NEC Uit $\vdash A$ besluiten tot $\vdash \Box A$

BF $(\forall\alpha)\Box A \supset \Box(\forall\alpha)A$

D◊ $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$

DQ1 $?\{A_1, \ldots, A_n\} =_{df} \Diamond(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (\Diamond\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg A_n)$, waarbij $n \geqslant 2$ en $A_1, \ldots, A_n$ syntactisch verschillende wffs zijn van $\mathcal{W}$.

DQ2 $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$
$=_{df}\ \Diamond(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$
$\wedge\ (\forall\alpha_1)\ldots(\forall\alpha_n)\Diamond\neg A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$,
waarbij $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathcal{F}$, en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de enige variabelen zijn die vrij voorkomen in A.

Merk op dat de volgende axiomaschema's *niet* gelden in **V**:

RT1 $\alpha=\beta\supset\Box(\alpha=\beta)$

RT2 $\neg(\alpha=\beta)\supset\Box(\neg(\alpha=\beta))$.

De logica **V** laat op zich niet toe om vragen af te leiden, tenzij de verzameling premissen inconsistent is. Dan bekomen we natuurlijk trivialiteit, en vanzelfsprekend kunnen dan ook (alle) vragen worden afgeleid. [29]

Hieronder geven we een aantal interessante afleidingen en stellingen van **V**, die zeer gemakkelijk kunnen worden aangetoond:

(1) $\vdash_{\mathbf{V}} Q\vee\neg Q$, waar Q een vraag is van de eerste of de tweede soort.

(2) $\vdash_{\mathbf{V}} (?\{p,\neg p\}\wedge\Box p)\supset\bot$

(3) $\vdash_{\mathbf{V}} \neg?\{p,\neg p\}\equiv(\Box p\vee\Box\neg p)$

(4) $\vdash_{\mathbf{V}} \neg?\{p,q\}\equiv(\Box\neg(p\vee q)\vee\Box p\vee\Box q)$

(5) $\vdash_{\mathbf{V}} ?\{p,q\}\supset(?\{p,\neg p\}\vee?\{q,\neg q\})$

(6) $\vdash_{\mathbf{V}} ?\{p\wedge q,p\wedge\neg q,\neg p\wedge q,\neg p\wedge\neg q\}\equiv(?\{p,\neg p\}\vee?\{q,\neg q\})$

Merk vooreerst op dat vragen zich als gewone formules gedragen, en er dus logische operaties kunnen worden op toegepast. Stelling (1) zal ons toelaten om, in de adaptieve logica **VA**, op om het even welke plaats in een bewijs de vraag Q toe te voegen, weliswaar onder een bepaalde voor-

29. Uit een inconsistente verzameling premissen kan bij Wiśniewski geen enkele vraag worden afgeleid (geëvoceerd), omdat geen enkele vraag informatief is: elk direct antwoord op elke mogelijke vraag is immers **CL**-afleidbaar uit een inconsistente verzameling. Het spreekt voor zich dat dit niet strookt met onze intuïties: het zijn juist inconsistenties die (interessante en vaak acute) vragen zullen genereren. Een vraaglogica die gebaseerd is op **V** is, net zoals een vraaglogica die gebaseerd is op **CL**, dan ook totaal ongeschikt om zinnige vragen af te leiden uit een inconsistente verzameling premissen. Daarvoor lijkt steeds een paraconsistente logica nodig (zie verder).

waarde Δ.[30] Stelling (2) illustreert dat een vraag samen met een direct antwoord op die vraag tot trivialiteit leidt. Dit is de reden waarom een vraag enkel onder een bepaalde vorm (namelijk in disjunctie met haar 'oplossingsvoorwaarden', cf. supra) als premisse kan worden geïntroduceerd. Stellingen (3) tot (6) illustreren een aantal eigenschappen die belangrijk zijn voor het analyseren van vragen, en voor het afleiden van een aantal door een hoofdvraag geïmpliceerde vragen op basis van de premissen (cf. infra). Stelling (5) kan (door toepassing van contrapositie) het best geïnterpreteerd worden als: "Als zowel de vraag of p al dan niet het geval is, als de vraag of q al dan niet het geval is, zijn opgelost, dan is ook de vraag of p dan wel q het geval is, opgelost".

In het vervolg zullen we ja-nee vragen als $?\{A, \neg A\}$ soms afkorten als $?[A]$. Vragen als $?\{A \wedge B, A \wedge \neg B, \neg A \wedge B, \neg A \wedge \neg B\}$ zullen soms afgekort worden als $?[A; B]$.

Tot slot bepalen we wanneer een verzameling **V**-consistent is:

Definitie 29. *Een verzameling* Θ *is* **V**-consistent *alss* $\Theta \nvdash_{\mathbf{V}} \perp$.

4.3.2. Semantiek van V

Om de clausules voor de kwantoren in de semantiek van **V** eenvoudig te houden, zullen we gebruik maken van een verzameling *pseudo-constanten*. Deze techniek wordt in veel papers over adaptieve logica's gebruikt (zie onder meer [BM01] en [BMPV03], waar deze techniek ook toegepast wordt voor modale logica's).

Zij $\mathcal{L}^V$ de erotetische uitbreiding (zoals voorheen bepaald) van de modale standaardtaal $\mathcal{L}^M$, met $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}^r$, $\mathcal{C}$, and $\mathcal{W}^V$ respectievelijk de verzamelingen van letters voor zinnen, predikaten van rang r, constanten en wffs (gesloten formules). We breiden $\mathcal{L}^V$ uit naar $\mathcal{L}^{V+}$ door er een verzameling pseudo-constanten $\mathcal{O}$ aan toe te voegen. De verzameling pseudo-constanten $\mathcal{O}$ heeft minstens de kardinaliteit van het grootste model dat men in rekening wil brengen (mogelijk is $\mathcal{O}$ dus overaftelbaar). We zullen eisen dat elk element van het domein D (van elke wereld) door minstens één element

30. De voorwaarde Δ kan als volgt worden bekomen: waar $\neg Q$ steeds een wff is van de vorm $\exists\Box A_1 \vee \ldots \vee \exists\Box A_k$, waarbij $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$, wordt de voorwaarde Δ bepaald als $\Delta = \{\exists\Box A_1, \ldots, \exists\Box A_k\}$ —zie verder.

van $\mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ genoemd wordt. $\mathcal{W}^{V+}$ verwijst naar de verzameling wffs van $\mathcal{L}^{V+}$ (gedefinieerd door $\mathcal{C} \cup \mathcal{O}$ de rol te laten spelen die door $\mathcal{C}$ gespeeld wordt in $\mathcal{L}^{V}$). We maken gebruik van $\mathcal{O}$ om de clausules voor de kwantoren te vereenvoudigen.

Een **V**-model M is een quintupel $\langle W, w_0, R, D, v\rangle$ waarin W een verzameling werelden is, $w_0 \in W$ de reële wereld, R een binaire relatie over W, D een niet-lege verzameling en v een toekenningsfunctie. De bereikbaarheidsrelatie R is *reflexief.* De toekenningsfunctie v is bepaald door:

C1.1 $v : \mathcal{S} \times W \mapsto \{0, 1\}$

C1.2 $v : (\mathcal{C} \cup \mathcal{O}) \times W \mapsto D$ is zodanig dat voor alle $w, w' \in W$:

$$\begin{aligned} d(w) &= \{v(\alpha, w) \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\} \\ &= d(w') = \{v(\alpha, w') \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}\} = D \end{aligned}$$

C1.3 $v : \mathcal{P}^r \times W \mapsto \wp(D^r)$ (de machtsverzameling van het r-de Cartesisch product van D)

Clausule C1.2 houdt in dat alle werelden van het model hetzelfde domein hebben ('fixed domain'). [31]

Een valuatiefunctie bepaald door een model M, $v_M : \mathcal{W}^{V+} \times W \mapsto \{0, 1\}$, is een functie die voldoet aan de volgende voorwaarden:

C2.1 waar $A \in \mathcal{S}$, $v_M(A, w) = v(A, w)$; $v_M(\perp, w) = 0$

C2.2 $v_M(\pi^r\alpha_1 \ldots \alpha_r, w) = 1$ alss $\langle v(\alpha_1, w), \ldots, v(\alpha_r, w)\rangle \in v(\pi^r, w)$

C2.3 $v_M(\alpha = \beta, w) = 1$ alss $v(\alpha, w) = v(\beta, w)$

C2.4 $v_M(\neg A, w) = 1$ alss $v_M(A, w) = 0$

C2.5 $v_M(A \supset B, w) = 1$ alss $v_M(A, w) = 0$ of $v_M(B, w) = 1$

C2.6 $v_M(A \vee B, w) = 1$ alss $v_M(A, w) = 1$ of $v_M(B, w) = 1$

C2.7 $v_M(A \wedge B, w) = 1$ alss $v_M(A, w) = 1$ en $v_M(B, w) = 1$

31. De aanwezigheid van de Barcan Formule vereist hoe dan ook dat gewerkt wordt met expanderende domeinen: als Rww', dan $D_w \subseteq D_{w'}$.

C2.8 $v_M(A \equiv B, w) = 1$ alss $v_M(A, w) = v_M(B, w)$

C2.9 $v_M((\forall\alpha)A(\alpha), w) = 1$ alss $v_M(A(\beta), w) = 1$ voor alle $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$

C2.10 $v_M((\exists\alpha)A(\alpha), w) = 1$ alss $v_M(A(\beta), w) = 1$ voor minstens een $\beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{O}$

C2.11 $v_M(\Diamond A, w) = 1$ alss $v_M(A, w') = 1$ voor minstens één w' zodanig dat Rww'

C2.12 $v_M(\Box A, w) = 1$ alss $v_M(A, w') = 1$ voor alle w' zodat Rww'

C2.13 $v_M(?\{A_1, \ldots, A_n\}, w) = 1$ alss $v_M(A_1 \vee \ldots \vee A_n, w') = 1$ voor minstens één w' zodanig dat Rww', en voor elke A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ geldt dat $v_M(\neg A_i, w_i) = 1$ voor minstens één wereld w_i zodanig dat Rww_i

C2.14 $v_M((?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), w) = 1$ alss
$v_M(\Diamond(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), w) = 1$ en
$v_M((\forall\alpha_1)\ldots(\forall\alpha_n)\Diamond\neg A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), w) = 1$

De clausules voor de vragen van de eerste en de tweede soort volgen rechtstreeks uit de definities. [32]

Een model M *verifieert* $A \in \mathcal{W}^V$ ($M \models A$) alss $v_M(A, w_0) = 1$. A is *geldig* alss A geverifieerd wordt door alle modellen.

Voor een schets van het bewijs dat de semantiek *karakteristiek* is voor het inferentiesysteem, verwijs ik naar [BMPV03]. [33]

32. Dat de clausules niet erg elegant ogen, is moeilijk te verhelpen. Beide clausules kunnen wel wat verder worden uitgewerkt, maar dat lijkt de helderheid niet echt ten goede te komen.

33. *Adequaatheid* is (zoals steeds) gemakkelijk te bewijzen. Voor een schets van het bewijs voor *sterke volledigheid*: als $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} A$, dan wordt een tegen-model met aftelbaar domein bekomen door existentieel gekwantificeerde formules te instantiëren met behulp van een aftelbare verzameling pseudo-constanten (zie [BMPV03]). Hoewel de in [BMPV03] gegeven predikatieve versie van **T** (los van de erotetische definities) niet volledig overeenkomt met **V**, kan de geschetste methode toch op **V** worden toegepast.

4.3.3. Enkele nuttige meta-theorema's voor V

In deze afdeling presenteren we een aantal nuttige theorema's voor **V**. Hun belang voor het redeneren met en over vragen zal in de volgende afdelingen en ook in het volgend hoofdstuk duidelijk worden.

Een belangrijke eigenschap die geldt in **V** is de zogenaamde *disjunctie-regel* [34]:

> Als $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$, dan $\vdash_{\mathbf{V}} A_i$ voor een of andere A_i, waarbij $1 \leqslant i \leqslant n$.

Deze eigenschap geldt in deze algemene vorm (waar A_i een of meerdere modaliteiten mag bevatten) voor **K**, **T** (en dus ook **V**) en een aantal uitbreidingen ervan, maar bijvoorbeeld niet voor **S5**. [35]

In [Pli98] worden twee nuttige eigenschappen bewezen voor **T**: de zogenaamde *uitgebreide disjunctie-eigenschap* en de zogenaamde *uitgebreide existentie-eigenschap*. [36] We geven de eigenschappen hier enkel voor formules van de vorm $\exists\Box A$, waarbij $A \in \mathcal{F}$.

---

34. Deze eigenschap wordt voor het eerst vermeld in [LS77], en wordt o.a. besproken in [HC84, pp. 96–100] en [Che80, pp. 181–182].

35. De disjunctie-regel geldt wel voor **S5** wanneer ze enkel geformuleerd wordt voor formules $\Box A$, waarbij $A \in \mathcal{W}$. Ook dit is een reden waarom **V** geschikter lijkt dan **S5** om, wanneer een aantal ingevoerde beperkingen inzake de logische vorm van de premissen zouden worden opgegeven, met vragen te redeneren. Zoals reeds vermeld is deze uitbreiding een punt voor verder onderzoek.

36. Ook voor de eerste orde modale logica's **K** en **S4** worden deze eigenschappen bewezen. Aangezien de eigenschappen bewezen zijn voor **T**, gelden ze ook voor **V**. Het bovenstaande is niet helemaal correct: in [Pli98] worden beide eigenschappen bewezen voor een predikatieve versie van **T** (met de Barcan Formule), maar zonder identiteit. De auteur vermeldt geen specifieke redenen voor het weglaten van de identiteit. Het is wel duidelijk dat de eigenschappen niet gelden als we semantisch zouden werken met 'rigid designators', en dus de axiomaschema's $\alpha = \beta \supset \Box(\alpha = \beta)$ en $\neg(\alpha = \beta) \supset \Box(\neg(\alpha = \beta))$ zouden hebben. Laten we deze uitbreiding $\mathbf{T}^*$ noemen. Er kan gemakkelijk worden aangetoond dat de uitgebreide disjunctie-eigenschap (in het algemeen) niet geldt voor $\mathbf{T}^*$: er geldt immers dat $\vdash_{\mathbf{T}^*} \Box(a = b) \vee \Box\neg(a = b)$, maar natuurlijk is noch $\vdash_{\mathbf{T}^*} \Box(a = b)$ noch $\vdash_{\mathbf{T}^*} \Box\neg(a = b)$ het geval. Vermoedelijk zijn er nog (andere soorten) tegenvoorbeelden te vinden, ook voor de uitgebreide existentie-eigenschap. In **V** is geen van beide axiomaschema's echter geldig, en het lijkt erop dat er geen tegenvoorbeelden zullen geconstrueerd kunnen worden. We gaan er dus – tot bewijs van het tegendeel – vanuit dat beide eigenschappen toch gelden voor **T** met identiteit, en dus ook voor **V**. Mocht dit toch niet het geval zijn, moet het werken met de Eenvoudige Strategie worden opgegeven, en bijv. met de strategie Betrouwbaarheid gewerkt worden.

Theorema 2. $\vdash_{\mathbf{V}} \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{n_i} \Box A_i^j$ *alss er een* $l \in \{1, \ldots, k\}$ *is zodanig dat* $\vdash_{\mathbf{V}} \bigwedge_{j=1}^{n_l} \Box A_l^j$.

Theorema 3. $\vdash_{\mathbf{V}} (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) \Box A x_1 \ldots x_n$ *alss er een n-tupel constanten* $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ *bestaat zodanig dat* $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$.

Uit de (uitgebreide) disjunctie-regel is het volgende theorema afleidbaar (waarbij we ons beperken tot wat we kunnen gebruiken, dus voor alle $\Box A_i$ geldt dat $A_i \in \mathcal{W}$):

Theorema 4. *Waar* $A_i \in \mathcal{W}$, $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ *alss* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$, *voor een of andere* i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Bewijs. — Als $\Gamma^{\Box}$ inconsistent is, dan geldt het theorema onmiddellijk. We veronderstellen nu dat $\Gamma^{\Box}$ consistent is.

Links-rechts. Uit $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ volgt — **V** is compact — dat er een eindige lijst bestaat die een **V**-bewijs van $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ uit $\Gamma^{\Box}$ vormt. Als $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ een stelling is van **V**, dan volgt met de uitgebreide disjunctie-regel onmiddellijk dat voor een of andere $\Box A_i$ waarbij $1 \leqslant i \leqslant n$, $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$. Als $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ geen stelling is van **V**, dan toont een inspectie van de afleidingsregels van **V** ons dat $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$ enkel kan worden neergeschreven door toepassing van $A \vee 1$ of $A \vee 2$ (Additie). Bijgevolg is er ook een **V**-bewijs uit $\Gamma^{\Box}$ voor een of andere $\Box A_i$, waarbij $1 \leqslant i \leqslant n$.

De rechts-links richting bekomen we onmiddellijk door het toepassen van de inferentieregels van **V**. $\Box$

Theorema 5. *Waar* $A \in \mathcal{F}$, $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) \Box A x_1 \ldots x_n$ *alss* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)$, *voor een of ander n-tupel van constanten* $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$.

Bewijs. — Het bewijs verloopt volledig analoog aan het voorgaande (in het niet-triviale geval kan $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n) \Box A x_1 \ldots x_n$ enkel worden bekomen door toepassing van $A\exists$). $\Box$

Daarnaast is ook het volgende theorema afleidbaar, waarbij $\Gamma^{\Box} = \{\Box A \mid A \in \Gamma \text{ en } \Gamma \subseteq \mathcal{W}\}$:

Theorema 6. *Waar* $B \in \mathcal{W}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} B$ *alss* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box B$.

BEWIJS. — Voor de links-rechts richting, veronderstel dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} B$. Dan is er een eindige $\Gamma' \subseteq \Gamma$ zodanig dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CL}} B$ (compactheid).

Laat $\Gamma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Dan volgt, via het deductietheorema, dat $\vdash_{\mathbf{CL}} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B$. Daaruit volgt dat $\vdash_{\mathbf{V}} \Box((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B)$. Dan krijgen we $\vdash_{\mathbf{V}} \Box(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset \Box B$, en dus ook, via het deductietheorema voor **V** en eigenschappen van **V**, dat $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \vdash_{\mathbf{V}} \Box B$, en dus dat $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box B$.

Voor de rechts-links richting kan een analoge redenering gemaakt worden: er zijn $\Box A_1, \ldots, \Box A_n \subseteq \Gamma^{\Box}$ zodanig dat $\Box A_1, \ldots, \Box A_n \vdash_{\mathbf{V}} \Box B$. Daaruit volgt dat $\vdash_{\mathbf{V}} \Box(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset \Box B$. Via inductie over de lengte van het bewijs kan gemakkelijk worden aangetoond (zie [Che80, pp. 124–125; 147]) dat hieruit volgt dat $\vdash_{\mathbf{V}} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B$. Aangezien $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{W}$ volgt hieruit dat $\vdash_{\mathbf{CL}} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B$, en dus ook dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} B$. $\Box$

4.4. De adaptieve logica VA

De adaptieve logica **VA** wordt nu opgebouwd volgens de blauwdruk die beschreven wordt in [Bat]. Eerst wordt de verzameling van abnormaliteiten bepaald, door formules van een specifieke logische vorm te selecteren. Op die manier kan ook de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ worden bepaald. Daarna kiezen we een strategie om de verzameling premissen "zo normaal mogelijk" te interpreteren.

De plot van de logica **VA** is te veronderstellen dat elke mogelijke vraag onopgelost is, tenzij uit (een analyse van) de premissen expliciet blijkt dat dit niet het geval is:

(1) hetzij omdat de *onderdrukker* van de vraag afleidbaar is uit de premissen;

(2) of omdat een direct antwoord op de vraag afleidbaar is uit de premissen;

(3) of omdat door logische analyse blijkt dat een of meerdere directe antwoorden op de vraag tautologieën zijn, of dat alle directe antwoorden op de vraag contradicties zijn (en dus ook de proactieve presuppositie een contradictie is).

Geval (3) is steeds herleidbaar tot geval (1) of geval (2): als een direct antwoord A een tautologie is van **V**, dan $\vdash_{\mathbf{V}} A$, en zitten we in geval (2); als alle directe antwoorden van Q contradicties zijn, dan is de onderdrukker van Q een stelling van **V**, en zitten we in geval (1). Met andere woorden: een vraag Q is een **VA**-gevolg van $\Gamma^{\Box} \cup \Gamma^{\Box?}$ (de vraag Q is onopgelost), tenzij en totdat blijkt dat $\neg Q$ een **V**-gevolg is van $\Gamma^{\Box} \cup \Gamma^{\Box?}$.

Laat $\exists\Box A$, waar $A \in \mathcal{F}$, een afkorting zijn voor $\Box A$, voorafgegaan door een (mogelijk lege) reeks existentiële kwantoren (in een geprefereerde volgorde) over de variabelen die vrij voorkomen in $\Box A$. Aangezien uit elke dergelijke wff $\exists\Box A$ de negatie van een vraag Q afleidbaar is, kunnen we elke dergelijke wff als een abnormaliteit beschouwen. Uit de literatuur rond adaptieve logica's (zie bijvoorbeeld [BM00a] en [Meh]) weten we echter dat, om de gebruikelijke relaties tussen de onderlimiet-logica, de abnormaliteiten en de bovenlimiet-logica te bekomen, logisch geldige formules (zoals bijvoorbeeld $\Box(p \vee \neg p)$) niet als abnormaliteit mogen worden beschouwd. Mochten we dit wel doen, zou het uitbreiden van de onderlimiet-logica met de regel dat alle abnormaliteiten vals zijn, leiden tot een bovenlimiet-logica die triviaal is, en meer in het bijzonder Post-inconsistent is. [37]

De verzameling van abnormaliteiten Ω kan dan (voorlopig) bepaald worden als:

$$\Omega = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F}; \nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A\}.$$

We zullen dadelijk tonen dat de verzameling abnormaliteiten, met het oog op het bekomen van een eenvoudige semantiek en een goed bepaalde bewijstheorie, beter anders bepaald wordt. [38]

De abnormaliteiten zijn die formules waarvan in de adaptieve logica **VA** verondersteld wordt dat ze vals zijn. Merk op dat de eis dat A een formule is die geen modaliteiten bevat ($A \in \mathcal{F}$), absoluut noodzakelijk is. Zonder deze restrictie zou ook $\Box\neg\Box\neg p$ een abnormaliteit zijn. Aangezien $\vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg\Box\neg p \equiv \Box\Diamond p$, zouden alle niet-stellingen van de vorm $\Box A$ of $\Box\Diamond A$ als abnormaliteiten beschouwd worden. Dit zou onder meer als gevolg

37. Een logica is *Post-inconsistent* alss elke wff er een stelling van is.
38. Deze weg wordt ook gevolgd in [Meh01] en in het reeds vermelde [BM00a] en [Meh]. Het probleem met de bovenstaande bepaling van de abnormaliteiten is dat de eigenschap "abnormaal" niet beslisbaar is, omwille van de eis dat $\nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$ (er is dus zelfs geen positieve test voor). Daardoor zou ook de toepasbaarheid van de generieke voorwaardelijke regel RC (mocht deze de voorwaarde $\nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$ bevatten) onbeslisbaar worden (zie afdeling 4.7, p. 100).

hebben dat ook $\Box Q \vee \neg Q$ (bij het invoeren van een vraag Q als premisse) als een disjunctie van abnormaliteiten beschouwd wordt. Er zou nog steeds een deftige adaptieve logica kunnen bepaald worden, maar door de abnormaliteiten op bovenstaande wijze te beperken, worden (overbodige) complicaties vermeden. [39] Merk ook op dat de abnormaliteit van de vorm $\exists\Box A$ is, en dus niet $\Box\exists A$. Uit de eerste formule is de tweede afleidbaar, maar vanzelfsprekend niet omgekeerd (de eerste formule is een zogenaamde *de re* formule en de tweede een *de dicto* formule).

De bovenlimiet-logica kan nu volgens de geijkte methode worden bekomen. Semantisch is het de logica die bekomen wordt door, uit de verzameling van de modellen van de onderlimiet-logica, al die modellen te elimineren die een element van Ω verifiëren. De overblijvende modellen zijn de modellen van de bovenlimiet-logica, die we $\mathbf{V^B}$ dopen. Syntactisch wordt de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ bekomen door bij $\mathbf{V}$ de volgende regel te voegen: [40] "Waar $A \in \mathcal{F}$, als $\nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$, dan $\vdash_{\mathbf{V^B}} \forall\Diamond\neg A$". [41] Merk op dat ook hier de restrictie "$A \in \mathcal{F}$" geldt. Stel dat $\Gamma^{\Box} = \varnothing$ en dat $\Gamma^{\Box ?} = \{\Box Q_1 \vee \neg Q_1, \ldots, \Box Q_n \vee \neg Q_n\}$, waarbij de vragen $Q_1, \ldots, Q_n$ geen $\mathbf{V}$-stelling als direct antwoord hebben, noch enkel contradicties als directe antwoorden hebben. Dan zal de $\mathbf{V^B}$-gevolgverzameling niet triviaal zijn, en zullen $\Box Q_1, \ldots, \Box Q_n$ $\mathbf{V^B}$-afleidbaar zijn uit $\Gamma^{\Box ?}$. Zonder de restrictie dat $A \in \mathcal{F}$ zou uit $\nvdash_{\mathbf{V}} \Box\Diamond A$ (waarbij A correspondeert met een direct antwoord $B = \Box A$, en B noch een stelling is van $\mathbf{V}$, noch een contradictie) volgen dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} \Diamond\neg\Diamond A$ en dus ook dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} \neg\Box\Diamond A$. Dit zou impliceren

39. Als de restrictie toch wordt weggelaten, moeten abnormaliteiten van verschillende graden gedefinieerd worden: grofweg, volgens het aantal modaliteiten die de formule A bevat, waarbij $\Box\Box A$ vanzelfsprekend niet van dezelfde graad zal zijn als $\Box\Diamond A$. De adaptieve logica moet deze abnormaliteiten dan in een bepaalde volgorde minimaliseren (eerst die van graad 1, dan die van graad 2, enzovoort). Bovendien zullen de abnormaliteiten met elkaar kunnen verbonden zijn, waardoor we de complexere strategieën (zoals *betrouwbaarheid* of *minimale abnormaliteit*) zullen nodig hebben. Dieper ingaan op dit alles, zou ons te ver leiden, en deze complicaties treden sowieso niet op door de beperkingen die we aan de premissen en de abnormaliteiten opleggen.

40. De uitdrukking $\forall\Diamond B$ staat voor $\Diamond B$, voorafgegaan door een (mogelijk lege) reeks van universele kwantoren over de variabelen die vrij voorkomen in B.

41. De $\mathbf{V^B}$-modellen zijn die $\mathbf{V}$-modellen waarvoor geldt: voor alle $A \in \mathcal{F}$, $v_M(\forall\Diamond A, w_0) = 1$, tenzij $\vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg A$. De logica $\mathbf{V^B}$ heeft een aantal merkwaardige eigenschappen (die enigszins vergelijkbaar zijn met de eigenschappen van de logica $\mathbf{S5^P}$ uit [BM00a]): zo is de verzameling stellingen niet gesloten onder Uniforme Substitutie: $\vdash_{\mathbf{V^B}} \Diamond p$ maar $\nvdash_{\mathbf{V^B}} \Diamond(q \wedge \neg q)$. De logica $\mathbf{V^B}$ moet dus gekarakteriseerd worden zonder te steunen op Uniforme Substitutie. Voor elke wff A, waarbij A gelijk is aan $\Box B$ of $\Diamond B$ ($B \in \mathcal{W}$), geldt dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} A$, of dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} \neg A$.

dat de $\mathbf{V^B}$-gevolgverzameling van $\Gamma^{\Box ?}$ de triviale verzameling is. [42]

De adaptieve logica **VA** zal de premissen "zo normaal mogelijk" interpreteren. Deze zinsnede is gebruikelijk in de literatuur rond adaptieve logica's, maar heeft hier toch een wat ongebruikelijke reikwijdte. Door de bepaling van de abnormaliteiten is elke verzameling declaratieve premissen $\Gamma^{\Box}$ die minstens één contingente wff bevat immers abnormaal. [43] Bijgevolg zal de **VA**-gevolgverzameling van een verzameling premissen Γ enkel voor randgevallen samenvallen met de $\mathbf{V^B}$-gevolgverzameling van Γ: namelijk als de verzameling declaratieve premissen $\Gamma^{\Box}$ geen enkele contingente wff bevat, of als $\Gamma^{\Box}$ inconsistent is.

Voor de meeste adaptieve logica's is de uitdrukking "zo normaal mogelijk interpreteren van de premissen" ambigu. Dit heeft doorgaans te maken met het feit dat de abnormaliteiten met elkaar kunnen verbonden zijn (via disjunctie), en de premissen onvoldoende informatie leveren om ondubbelzinnig te kunnen uitmaken welk van de disjuncten zich abnormaal gedraagt. Het ondubbelzinnig maken van de uitdrukking "zo normaal mogelijk interpreteren van de premissen" mondt doorgaans uit in de formulering van twee verschillende strategieën om met disjuncties van abnormaliteiten om te gaan. Voor de logica **VA** is die ambiguïteit er niet, en dit is te danken aan de beperkingen die opgelegd worden aan de premissen. [44] Voor **VA** zal de *eenvoudige strategie* volstaan.

We bespreken eerst de semantiek van **VA** en geven daarna een vereenvou-

42. Een vraag Q, bijv. $?\{p, q\}$, is immers **V**-equivalent met $\Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q$; $\Box?\{p, q\}$ is dan **V**-equivalent met $\Box\Diamond(p \vee q) \wedge \Box\Diamond\neg p \wedge \Box\Diamond\neg q$. Uit $\nvdash_{\mathbf{V}} \Box\Diamond\neg p$ zou dan volgen dat $\vdash_{\mathbf{VB}} \neg\Box\Diamond\neg p$, en dus zou $\Box?\{p, q\} \vee \neg?\{p, q\} \vdash_{\mathbf{VB}} \bot$.

43. Merk wel op dat een verzameling erotetische premissen $\Gamma^{\Box ?}$ op zich steeds normaal is. Als Q geen **V**-stelling als direct antwoord heeft, noch enkel contradicties als directe antwoorden heeft, dan is $\Box Q$ $\mathbf{V^B}$-afleidbaar uit $\Box Q \vee \neg Q$; in de andere gevallen is $\Box Q \vee \neg Q$ een stelling van **V**, en in die gevallen wordt $\Box Q \vee \neg Q$ dus door (alle) $\mathbf{V^B}$-modellen geverifieerd.

44. Die beperkingen zorgen ervoor dat een formule als $\Box p \vee \Box q$ nooit afleidbaar is, behalve natuurlijk als de premissen inconsistent zijn (maar dan zijn alle wffs abnormaal), of als $\Box p$ of $\Box q$ op zich uit de premissen kunnen worden afgeleid (dan bekomen we $\Box p \vee \Box q$ via Additie, maar dit is niet dubbelzinnig want we weten al welk van de twee disjuncten abnormaal is). Mochten we de aan de premissen opgelegde beperkingen laten vallen, zouden we ook *echte* (i.e. niet via additie bekomen) disjuncties van abnormaliteiten bekomen, en zouden we de twee gekende strategieën (betrouwbaarheid en minimale abnormaliteit) nodig hebben om de ambiguïteit die door een disjunctie van abnormaliteiten veroorzaakt wordt, op te heffen.

digde semantiek voor **VA**, die nauwer zal aansluiten bij de bewijstheorie die we daarna behandelen.

4.5. Semantiek van VA

Zoals voor alle adaptieve logica's worden de modellen van **VA** bekomen door die modellen van de onderlimiet-logica te selecteren die "niet meer abnormaal zijn dan door de premissen vereist wordt". Om de laatste zinsnede te interpreteren, gaan we — zoals gebruikelijk voor adaptieve logica's — eerst het abnormale deel van een **V**-model bepalen:

Definitie 30. $Ab(M) = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F}; v_M(\exists\Box A, w_0) = 1;$ *en* $\nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A\}$.

De verzameling van abnormaliteiten die *onvermijdbaar* zijn, omdat ze logisch volgen uit de premissen, wordt bepaald als:

Definitie 31. $Ab(\Gamma) = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F}; \Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A;$ *en* $\nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A\}$.

Het is duidelijk dat voor alle **V**-modellen M van Γ geldt dat $Ab(\Gamma) \subseteq Ab(M)$. We gebruiken de *Eenvoudige Strategie* om de zinsnede "niet meer abnormaal dan nodig" te interpreteren:

Definitie 32. *Een* **V**-*model* M *is* goed genoeg *met betrekking tot* Γ *alss* $Ab(M) = Ab(\Gamma)$.

Dit selectiecriterium selecteert die **V**-modellen van de premissen die niet meer abnormaliteiten verifiëren dan vereist wordt door de premissen (die dus **V**-afleidbaar zijn uit Γ). De geselecteerde modellen zijn de **VA**-modellen van Γ:

Definitie 33. *Een* **V**-*model* M *van* Γ *is een* **VA**-model *van* Γ *alss* M *goed genoeg is met betrekking tot* Γ.

Definitie 34.
$\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} A$ *alss* A *geverifieerd wordt door alle* **VA**-*modellen van* Γ.

Omdat alle geldige wffs van de vorm $\exists\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$) zowel uit $Ab(M)$ als uit $Ab(\Gamma)$ geweerd worden, maakt het voor de definitie van een **VA**-model eigenlijk niet uit of dergelijke stellingen van **V** al dan niet in rekening worden gebracht. We maken hiervan gebruik om, analoog aan wat gedaan wordt in [Meh01] en [BM00a], een vereenvoudigde semantiek voor te stellen.

4.6. Vereenvoudigde semantiek voor VA

Er kan vrij gemakkelijk een vereenvoudigde semantiek worden bekomen, die ook dichter zal aansluiten bij de bewijstheorie (zie de volgende afdeling). [45] Daartoe gaan we de verzameling van abnormaliteiten — we duiden ze nu aan met $\Omega^{\Box}$ – anders bepalen:

$$\Omega^{\Box} = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

De definities 30 en 31 worden vervangen door:

Definitie 35. $Ab(M) = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F} \text{ en } v_M(\exists\Box A, w_0) = 1\}$.

Definitie 36. $Ab(\Gamma) = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F} \text{ en } \Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A\}$.

en we herhalen definitie 32 in de huidige context:

Definitie 37. *Een* $\mathbf{V}$*-model* M *is* goed genoeg *met betrekking tot* Γ *alss* $Ab(M) = Ab(\Gamma)$.

Aangezien $\mathbf{V}$-geldige wffs hoe dan ook door alle $\mathbf{V}$-modellen van Γ geverifieerd worden, selecteert definitie 37 precies dezelfde $\mathbf{V}$-modellen van Γ als definitie 32. Vanaf nu gebruiken we deze eenvoudige karakterisering, die ook nuttig zal blijken voor het ontwerpen van de dynamische bewijstheorie in de volgende sectie.

We herhalen ook definities 33 en 34:

Definitie 38. *Een* $\mathbf{V}$*-model* M *van* Γ *is een* $\mathbf{VA}$-model *van* Γ *alss* M *goed genoeg is met betrekking tot* Γ.

Definitie 39. $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} A$ *alss* A *geverifieerd wordt door alle modellen* $\mathbf{VA}$*-modellen van* Γ.

45. Dat de semantiek van **VA** op verschillende, equivalente manieren gekarakteriseerd kan worden, is analoog aan wat geldt voor de logica $\mathbf{Q}^{\mathbf{ms}}$, zoals beschreven in [Meh01].

Deze eenvoudige semantische karakterisering zal nuttig blijken voor de bewijstheorie van **VA**: de voorwaardelijke regels van **VA** zullen immers ook mogen worden toegepast als $\exists\Box A$ een stelling is van **V**. Omdat er (in het algemeen) geen positieve test is voor het niet-stelling zijn van **V** (en we dus principieel niet altijd kunnen uitmaken of een formule logisch contingent is), zou ook de toepasbaarheid van de voorwaardelijke generieke regel (gebaseerd op de niet-vereenvoudigde semantiek) onbeslisbaar zijn (zie de volgende afdeling).

Semantisch bepalen we dat een verzameling premissen Γ consistent is, als aan de volgende definitie voldaan is:

Definitie 40. *Een verzameling premissen* Γ *is* consistent *alss er een* **V**-*model is dat alle leden van* Γ *verifieert.*

Als Γ inconsistent is, dan heeft Γ geen **V**-modellen. Daaruit volgt dat de verzameling semantische **V**-gevolgen van Γ triviaal is. Dus kan maar beter nagegaan worden of elke Γ die **V**-modellen heeft, ook **VA**-modellen heeft. Deze eigenschap staat bekend onder de naam *reassurance* (zie [Pri91]). Een gelijkaardige vraag is of elk niet-geselecteerd **V**-model van Γ, niet geselecteerd wordt omdat het (in verzameling-theoretische zin) 'abnormaler' is dan een geselecteerd **V**-model van de premissen. Deze eigenschap wordt *strong reassurance* genoemd (zie bijv. [Bat00a]). Dat het antwoord op beide vragen positief is (en dat beide eigenschappen dus gelden voor **VA**), kan gemakkelijk worden aangetoond: [46]

Theorema 7 (Strong Reassurance). *Als* M *een* **V**-*model is van* Γ *maar geen* **VA**-*model van* Γ, *dan is er een* **VA**-*model* M' *van* Γ *zodanig dat* $Ab(M') \subset Ab(M)$.

BEWIJS. — Zij M een **V**-model van Γ, maar geen **VA**-model van Γ. Aangezien Γ **V**-modellen heeft, is Γ **V**-consistent.

Zij M' een **V**-model van Γ dat alle elementen van $\Psi = \Omega^{\Box} \setminus \{\exists\Box A \mid \ \Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A; A \in \mathcal{F}\}$ falsifieert. Aangezien voor elke $\exists\Box B \in \Psi$ geldt dat $\exists\Box B$ geen stelling is van **V**, en bovendien niet **V**-afleidbaar is uit Γ, is er steeds

46. In tegenstelling tot de andere (meer ingewikkelde) strategieën voor adaptieve logica's, garandeert de Eenvoudige Strategie dat, als M en M' (onderlimiet-logica) modellen zijn van de premissen en M geselecteerd wordt en M' niet, dan $Ab(M) \subset Ab(M')$ (cf. [BM00a]).

zo een **V**-model van Γ dat alle elementen van Ψ falsifieert. Er volgt dat $Ab(M') = Ab(\Gamma)$, en dus is M' een **VA**-model van Γ.

Uit het feit dat M een **V**-model is van Γ, maar geen **VA**-model van Γ, volgt met definitie 35 (p. 97) dat

$$Ab(M) = \{\exists\Box A \mid A \in \mathcal{F}; v_M(\exists\Box A, w_0) = 1\}.$$

Aangezien M een **V**-model is van Γ, verifieert M alle elementen van $\{\exists\Box A \mid \Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box A\}$. Daaruit volgt dat $Ab(M') = Ab(\Gamma) \subseteq Ab(M)$. Aangezien M geen **VA**-model is van Γ, volgt dat $Ab(\Gamma) \neq Ab(M)$, en dus $Ab(M') \subset Ab(M)$. $\Box$

Corollarium 8 (Reassurance).
*Als Γ **V**-modellen heeft, dan heeft Γ ook **VA**-modellen.*

Hieronder vermelden we nog een belangrijke eigenschap. Naar analogie met $\exists\Box A$ staat $\forall\Diamond A$ voor $\Diamond A$, voorafgegaan door een (mogelijk lege) reeks van universele kwantoren over de variabelen die vrij voorkomen in A.

Theorema 9. *Waar $A \in \mathcal{F}$, $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} \forall\Diamond A$ alss ($\Gamma \nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg A$ of $\Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \Box\bot$).*

BEWIJS. — Voor de links-rechts richting, veronderstel dat $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} \forall\Diamond A$ ($A \in \mathcal{F}$). Alle **VA**-modellen van Γ verifiëren $\forall\Diamond A$, en dus falsifiëren ze $\neg\forall\Diamond A$, en dus ook $\exists\Box\neg A$. Alle **VA**-modellen van Γ zijn **V**-modellen van Γ, en dus verifiëren niet alle **V**-modellen van Γ $\neg\forall\Diamond A$. Er zijn 2 gevallen:

(1) Γ heeft geen **VA**-modellen, maar dan zijn er ook geen **V**-modellen van Γ (wegens Reassurance). Dus $\Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \bot$, en dus $\Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \Box\bot$.

(2) Er is minstens één **VA**-model van Γ. Dan is er minstens één **V**-model van Γ dat $\neg\forall\Diamond A$ falsifieert. Dus $\Gamma \nvDash_{\mathbf{V}} \neg\forall\Diamond A$, en dus $\Gamma \nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg A$.

De rechts-links richting. Uit $\Gamma \nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg A$ of $\Gamma \vDash_{\mathbf{V}} \Box\bot$ kunnen we afleiden dat er een **V**-model van Γ is dat $\exists\Box\neg A$ falsifieert, of dat Γ geen **V**-modellen heeft. Dit laatste impliceert dat er ook geen **VA**-modellen van Γ bestaan, en dus dat $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} \forall\Diamond A$. Uit $\Gamma \nvDash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg A$ en $A \in \mathcal{F}$ volgt dat $\exists\Box\neg A \notin Ab(\Gamma)$. Voor alle **VA**-modellen M van Γ geldt dus, via definitie 37 (p. 97), dat $\exists\Box\neg A \notin Ab(M)$. Daaruit volgt dat geen enkel **VA** model $\exists\Box\neg A$ verifieert. Dus verifiëren alle **VA**-modellen van Γ $\neg\exists\Box\neg A$, en dus ook $\forall\Diamond A$. Dus $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} \forall\Diamond A$. $\Box$

4.7. Voorbereiding van de bewijstheorie

In deze afdeling gaan we de relatie tussen de onderlimiet-logica **V** en de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ precies vastleggen. Daardoor zullen we de motor verkrijgen die de dynamische bewijstheorie van **VA** aandrijft. We zullen in deze en vooral de volgende afdeling zien dat de dynamiek van de logica **VA** beperkter is dan die van de meeste andere adaptieve logica's. Eens een lijn in een **VA**-bewijs gemarkeerd is, blijft ze gemarkeerd in elke mogelijke uitbreiding van dat bewijs. Daarom zal ook de notie "finale afleidbaarheid" vrij eenvoudig kunnen worden bepaald.

We herinneren er nogmaals aan dat we Γ gebruiken als afkorting voor $\Gamma^{\Box} \cup \Gamma^{\Box ?}$. Syntactisch wordt de verzameling van formules die krachtens Γ abnormaal zijn, $Ab(\Gamma)$, als volgt gedefinieerd:

Definitie 41. $Ab(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A \text{ en } A \in \Omega^{\Box}\}$.

$Ab(\Gamma)$ staat voor de verzameling van abnormaliteiten die *onvermijdbaar* zijn (omdat ze logisch volgen uit de premissen met de onderlimiet-logica **V**).

Om de precieze relatie tussen afleidbaarheid met de onderlimiet-logica **V** en afleidbaarheid met de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ te kunnen karakteriseren, moeten we eerst wat voorbereidend werk doen. [47]

Laat $Dab(\Delta)$ staan voor $\exists\Box B_1 \vee \ldots \vee \exists\Box B_n$, een eindige disjunctie van abnormaliteiten, waarbij $\Delta = \{\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_n\} \subset \Omega^{\Box}$. Verder bepalen we, voor elke formule $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, $SF(A) = \{B \mid B \text{ is een subformule van } A\}$. [48] We bepalen ook, voor elke formule $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, $NSF(A) = \{\neg B \mid B \text{ is een subformule van } A\}$. De verzameling subformules van Γ kan dan bepaald worden als $SF(\Gamma) = \{B \mid B \in SF(A), \text{ waar } A \in \Gamma\}$. Analoog voor $NSF(\Gamma)$. Tot slot bepalen we een functie f die aan elke Γ een verzameling formules $f(\Gamma) \subseteq \Omega$ toekent: $f(\Gamma) = \{\exists\Box C \mid C \in SF(\Gamma) \cup NSF(\Gamma) \text{ en } \exists\Box C \in \Omega\}$. Merk op dat geëist wordt dat $\nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box C$ ($\exists\Box C \in \Omega$). Als Γ eindig is, dan is ook $f(\Gamma)$ eindig.

47. Hiervoor inspireren we ons op [BMPV03] en [Bat].
48. De verzameling subformules van een formule wordt op de standaard manier bepaald. Aangezien $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, is A hoogstens een formule van de tweede graad (cf. supra).

Lemma 10. *Voor elk* $\mathbf{V}$*-model* M*, en elke* $A \in \mathcal{W}^{\mathcal{V}}$*, als* M *alle leden van* $f(\{A\})$ *falsifieert, dan is er een* $\mathbf{V^B}$*-model* M' *zodat* $M \vDash_{\mathbf{V}} A$ *alss* $M' \vDash_{\mathbf{V^B}} A$*.*

BEWIJS. — Veronderstel dat het antecedent waar is. Dan zijn er twee gevallen: [49]

Geval 1: $M \nvDash_{\mathbf{V}} A$ $(A \in \mathcal{W}^{\mathcal{V}})$. Hieruit volgt dat $M \vDash_{\mathbf{V}} \neg A$. Veronderstel nu dat A door geen enkel $\mathbf{V^B}$-model M' gefalsifieerd wordt. Dan verifiëren alle $\mathbf{V^B}$-modellen A. Nu zijn er twee mogelijkheden. Ofwel is A een stelling van $\mathbf{V}$ (en dus ook een stelling van $\mathbf{V^B}$), maar dit is onmogelijk: aangezien $M \nvDash_{\mathbf{V}} A$, volgt dat $\nvDash_{\mathbf{V}} A$. Ofwel is A geen stelling van $\mathbf{V}$ (A is $\mathbf{V}$-contingent). Aangezien alle $\mathbf{V^B}$-modellen A verifiëren en A $\mathbf{V}$-contingent is, moet A van de vorm $\forall\Diamond\neg B$ zijn, waarin B $\mathbf{V}$-contingent is. Dan $M \nvDash_{\mathbf{V}} \forall\Diamond\neg B$, waaruit $M \vDash_{\mathbf{V}} \neg\forall\Diamond\neg B$, en dus $M \vDash_{\mathbf{V}} \exists\Box B$. Dit spreekt de veronderstelling tegen dat M alle leden van $f(A)$ falsifieert.

Geval 2: $M \vDash_{\mathbf{V}} A$. Aangezien $f(A) = f(\neg A)$, is dit geval volledig analoog aan het vorige. □

Aangaande het volgende theorema wil ik vooraf benadrukken dat $\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m$ geen stellingen mogen zijn van $\mathbf{V}$ (er wordt geëist dat ze lid zijn van Ω; eisen dat ze lid zijn van $\Omega^{\Box}$ is onvoldoende). Anders zou bijv. uit $\vdash_{\mathbf{V}} q \vee \Box(p \vee \neg p)$ volgen dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} q$, wat vanzelfsprekend fout is (immers ook $\vdash_{\mathbf{V^B}} \Box(p \vee \neg p)$).

Theorema 11. $\vdash_{\mathbf{V^B}} A$ *alss er* $\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m \in \Omega$ $(m \geqslant 0)$ *zijn zodat* $\vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\{\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m\})$*.*

BEWIJS. — Links-rechts richting. Als $\vdash_{\mathbf{V}} A$, dan geldt het theorema. Veronderstel dus dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} A$ en $\nvdash_{\mathbf{V}} A$. Aangezien $f(\{A\})$ eindig is, is $Dab(f(\{A\}))$ eindig, en is $A \vee Dab(f(\{A\}))$ een welgevormde formule. Laat M een willekeurig $\mathbf{V}$-model zijn. Dan zijn er twee gevallen:

Geval 1: M verifieert een $\exists\Box C \in f(\{A\})$. Daaruit volgt dat M ook $Dab(f(\{A\}))$ verifieert.

Geval 2: M falsifieert $\exists\Box C$, voor elke $\exists\Box C \in f(\{A\})$. Veronderstel nu dat M ook A falsifieert. Dan volgt uit lemma 10 dat er een $\mathbf{V^B}$-model

49. Wegens *adequaatheid* en *volledigheid* van $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V^B}$, switchen we vrijelijk tussen syntaxis en semantiek.

M' bestaat dat A falsifieert. Maar dit spreekt de veronderstelling dat A $\mathbf{V^B}$-geldig is, tegen.

Voor de rechts-links richting, veronderstel dat er $\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m \in \Omega$ zijn zodat $\vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\{\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m\})$. Dan volgt hieruit dat $\vdash_{\mathbf{V^B}} A \vee Dab(\{\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m\})$, aangezien $\mathbf{V^B}$ een uitbreiding is van $\mathbf{V}$. Elk $\mathbf{V^B}$-model falsifieert $Dab(\{\exists\Box B_1, \ldots, \exists\Box B_m\})$ – geen enkele $\exists\Box B_i$ is immers een stelling van $\mathbf{V}$, en dus evenmin van $\mathbf{V^B}$ – en dus verifiëren alle $\mathbf{V^B}$-modellen A. Dus $\vDash_{\mathbf{V^B}} A$, en dus ook $\vdash_{\mathbf{V^B}} A$. $\Box$

Theorema 12 (Derivability Adjustment Theorem). *$\Gamma \vdash_{\mathbf{V^B}} A$ alss er een eindige (mogelijk lege) verzameling van abnormaliteiten $\Delta \subset \Omega$ is, zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\Delta)$.*

BEWIJS. — Aangezien zowel $\mathbf{V}$ als $\mathbf{V^B}$ (syntactisch) compact zijn, volgt dit uit theorema 11. $\Box$

Dit theorema zorgt voor de motor van de dynamische bewijstheorie. [50] Theorema 12 garandeert dat, als met de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ uit Γ kan worden afgeleid dat A, dan met de onderlimiet-logica $\mathbf{V}$ uit Γ kan worden afgeleid dat A, of dat bepaalde formules (leden van $\Delta \subset \Omega$) zich ten opzichte van Γ abnormaal gedragen. In de dynamische bewijzen van **VA** zal precies A uit Γ kunnen afgeleid worden, op de voorwaarde dat geen enkel element van Δ $\mathbf{V}$-afleidbaar is uit Γ.

Voor de voorwaardelijke generieke regel zal van de verzameling abnormaliteiten Δ geëist worden dat $\Delta \subset \Omega^{\Box}$ (in plaats van $\Delta \subset \Omega$), omdat de toepassing van de voorwaardelijke regel anders onbeslisbaar zou zijn. De markeringsregel zal ervoor zorgen dat, eens is aangetoond dat $\vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box B$, voor een $\exists\Box B \in \Delta$, alle lijnen waar $\exists\Box B$ een element is van de voorwaarde, (definitief) worden gemarkeerd.

Onderstaande (paren van) afleidingen illustreren theorema 12:

(1a) $\vdash_{\mathbf{V^B}} \Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q$

(1b) $\vdash_{\mathbf{V}} (\Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond\neg p \wedge \Diamond\neg q) \vee \Box\neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$

50. Soortgelijke theorema's zijn centraal voor alle tot nu toe ontwikkelde adaptieve logica's.

(2a) $\vdash_{\mathbf{V^B}} ?\{p, \neg p\}$

(2b) $\vdash_{\mathbf{V}} ?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p$

(3a) $\vdash_{\mathbf{V^B}} \Diamond(\exists x)Px \wedge (\forall x)\Diamond\neg Px$

(3b) $\vdash_{\mathbf{V}} (?x)Px \vee \Box\neg(\exists x)Px \vee (\exists x)\Box Px$

(4a) $\Box p \vdash_{\mathbf{V^B}} \Box\bot$

(4b) $\Box p \vdash_{\mathbf{V}} \Box\bot \vee \Box p$

(5) $\Box?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p \vdash_{\mathbf{V^B}} \Box?\{p, \neg p\}$

(6a) $\Box?\{p \wedge \neg p, q\} \vee \neg?\{p \wedge \neg p, q\} \vdash_{\mathbf{V^B}} \Box?\{p \wedge \neg p, q\} \wedge \Box?\{q, \neg q\}$

(6b) $\Box?\{p \wedge \neg p, q\} \vee \neg?\{p \wedge \neg p, q\} \vdash_{\mathbf{V}} (\Box?\{p \wedge \neg p, q\} \wedge \Box?\{q, \neg q\}) \vee \Box q \vee \Box\neg q$

(7) $\Box?\{p \vee \neg p, q\} \vee \neg?\{p \vee \neg p, q\} \vdash_{\mathbf{V^B}} \Box(p \vee \neg p)$

(8) $\Box?\{p\wedge\neg p, q\wedge\neg q\}\vee\neg?\{p\wedge\neg p, q\wedge\neg q\} \vdash_{\mathbf{V^B}} \Box((p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q))$

(1a), (2a) en (3a) illustreren dat elke eigenlijke vraag (een vraag waarvan geen enkel direct antwoord een stelling is van **V**, en waarvan niet alle directe antwoorden contradicties zijn van **V**) een 'stelling' is van $\mathbf{V^B}$: elke eigenlijke vraag is, volgens de logica $\mathbf{V^B}$, onopgelost.

(4a) illustreert dat de bovenlimiet-logica $\mathbf{V^B}$ steeds tot trivialiteit leidt wanneer ze wordt toegepast op contingente declaratieve wffs (niet-stellingen van **V** van de vorm $\exists\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$)). In de dynamische bewijzen van **VA** leidt dit echter niet tot ongewenste resultaten. Telkens $A \vee Dab(\Delta)$ **V**-afleidbaar is uit Γ, is het toegelaten om A toe te voegen aan het bewijs, onder de voorwaarde dat alle leden van Δ zich normaal gedragen. Dus hoewel $\Box p \vee \Box\bot$ afleidbaar is uit $\Box p$, zal $\Box\bot$ nooit voorkomen op een ongemarkeerde lijn van een **VA**-bewijs uit $\Box p$: de markeringsregel zal de lijn waarop $\Box\bot$ voorkomt, onmiddellijk markeren, precies omdat $\Box p$ zich abnormaal gedraagt (cf. infra).

Erotetische premissen (zie (5) tot en met (8)) leiden op zich nooit tot trivialiteit. (6a) en (6b) lijken misschien enigszins merkwaardig, maar ze passen volkomen in de in dit hoofdstuk uitgewerkte benadering: uit $\Box?\{p \wedge \neg p, q\} \wedge \Box?\{q, \neg q\}$ kan afgeleid worden dat de vragen $?\{p \wedge \neg p, q\}$ en $?\{q, \neg q\}$ *probleem-equivalent* zijn (cf. infra). De ene vraag zal namelijk *opgelost* zijn als en alleen als ook de andere vraag opgelost is. Onze aanpak maakt dit mogelijk omdat (het afleiden van) de onderdrukker van een vraag (hier onderdrukt $\Box\neg q$ de vraag $?\{p \wedge \neg p, q\}$) voldoende is om die vraag op te lossen. In het andere geval ($\Box q$) worden beide vragen ook opgelost. [51]

(7) illustreert dat, als een vraag $Q_1 \in \Gamma^{\Box ?}$ een tautologie (van **V**) als direct antwoord heeft, die tautologie uiteraard ook afleidbaar is met $\mathbf{V^B}$, en dus ook $\neg Q_1$ $\mathbf{V^B}$-afleidbaar is. (8) illustreert dat, als een vraag $Q_1 \in \Gamma^{\Box ?}$ enkel contradicties als directe antwoorden heeft, dan de onderdrukker van Q_1 (uiteraard een tautologie van **V**) $\mathbf{V^B}$-afleidbaar is, en dus ook $\neg Q_1$.

Als een consistente, niet-lege verzameling premissen Γ *normaal* is, i.e. als de verzameling premissen Γ enkel vragen (in $\Gamma^{\Box ?}$) en stellingen (in $\Gamma^{\Box}$) bevat, dan levert de adaptieve logica dezelfde gevolgverzameling op als de bovenlimiet-logica. Alle *eigenlijke* vragen (alle vragen van de eerste en de tweede soort, behalve die vragen die altijd opgelost zijn, i.e. vragen met een tautologie als direct antwoord en vragen waarvan alle directe antwoorden contradicties zijn) zijn **VA**-afleidbaar uit een normale verzameling premissen Γ.

4.8. Dynamische bewijstheorie van VA

Zoals gebruikelijk voor adaptieve logica's, bestaan de lijnen van een geannoteerd dynamisch bewijs uit vijf elementen:

(1) een lijnnummer,

(2) de afgeleide formule A,

51. We zullen verder zien dat een vraag als $?\{q, \neg q\}$ bij Wiśniewski niet geïmpliceerd wordt door $?\{p \wedge \neg p, q\}$, omdat – in zijn benadering – het direct antwoord $\neg q$ niet leidt tot een inperking van de directe antwoorden op de hoofdvraag. De vraag $?\{p \wedge \neg p, q\}$ is echter ook niet opgelost: het direct antwoord q is niet afleidbaar (omdat niet gegeven is dat de vraag gegrond is). Een analoog voorbeeld: gegeven de verzameling premissen $\Gamma = \{\neg p\}$, wordt de vraag $?\{q, \neg q\}$ in Wiśniewski's theorie niet geïmpliceerd door de vraag $?\{p, q\}$ (waarvan evenmin een direct antwoord afleidbaar is).

(3) de lijnnummers van de formules waaruit A is afgeleid,

(4) de verantwoording (de regel waarmee A werd afgeleid), en

(5) een (mogelijk lege) voorwaarde.

De voorwaarde is een verzameling van abnormaliteiten Δ, waarbij $\Delta \subset \Omega^{\Box}$. De voorwaarde noemt de formules die zich normaal moeten gedragen, opdat A (op die manier) afleidbaar zou zijn.

Hieronder worden de *generieke regels* gepresenteerd die **VA**-bewijzen uit Γ reguleren. We geven eerst de twee premisse-regels voor het introduceren van declaratieve en erotetische premissen. Daarna geven we de onvoorwaardelijke regel RU en de voorwaardelijke regel RC. In de volgende afdeling geven we een aantal afgeleide voorwaardelijke regels.

Prem-d Als $A \in \Gamma^{\Box}$, dan mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) A,

(3) "–",

(4) "Prem-d", en

(5) $\varnothing$.

Prem-e Als $A \in \Gamma^{\Box ?}$, dan mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) A,

(3) "–",

(4) "Prem-e", en

(5) $\varnothing$.

RU Als $B_1, \ldots, B_m \vdash_{\mathbf{V}} A$ ($m \geqslant 0$) en $B_1, \ldots, B_m$ komen in het bewijs voor, respectievelijk op de voorwaarden $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, dan mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) A,

(3) de nummers van de lijnen van de B_i,

(4) "RU", en

(5) $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$.

RC Als $B_1, \ldots, B_m \vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\Delta_0)$ ($m \geqslant 0$) en $B_1, \ldots, B_m$ komen in het bewijs voor, respectievelijk op de voorwaarden $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, dan mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) A,

(3) de nummers van de lijnen van de B_i,

(4) "RC", en

(5) $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$.

In tegenstelling tot het voorstel in [Meh01], waar de introductie van vragen enkel onrechtstreeks kan gebeuren, kunnen vragen in ons systeem op een directe manier worden afgeleid. Dit komt omdat we gemengde wffs van de vorm $Q \vee Dab(\Delta)$ toelaten, waardoor de vraag Q via de voorwaardelijke regel RC kan worden afgeleid, op voorwaarde Δ. Aangezien voor elke welgevormde vraag Q geldt dat $\vdash_{\mathbf{V}} Q \vee \neg Q$, kan Q in een **VA**-bewijs uit Γ steeds worden afgeleid op voorwaarde Δ, waarbij $\vdash_{\mathbf{V}} \neg Q \equiv Dab(\Delta)$, tenzij en totdat een element van Δ onvoorwaardelijk is afgeleid. Als dit laatste het geval is, dan zal de markeringsregel ons dwingen om de lijn waarop Q voorwaardelijk werd afgeleid, te markeren. Die lijn behoort dan niet langer tot het bewijs. In de volgende sectie worden onder meer twee afgeleide voorwaardelijke regels voor de afleiding van vragen gepresenteerd.

Het (ab)normaal gedrag van een formule zal bepaald worden door het stadium van het bewijs, en niet door de (abstracte) notie van afleidbaarheid. Het is precies als gevolg daarvan dat wffs die op een bepaald stadium worden neergeschreven in een bewijs, in een later stadium uit het bewijs kunnen verwijderd worden, en in die zin zijn de bewijzen dus *dynamisch*. Toch kan aangetoond worden dat elke verzameling premissen een unieke verzameling van (finale) **VA**-gevolgen heeft.

Met het oog op de definitie van de markeringsregel bepalen we eerst de verzameling $Ab^s(\Gamma)$, de verzameling van formules die zich abnormaal gedragen op stadium s van het bewijs: [52]

Definitie 42. $Ab^s(\Gamma) = \{\exists\Box A \mid \exists\Box A \in \Omega^\Box$ *en* $\exists\Box A$ *is, op stadium* s *van het bewijs, onvoorwaardelijk afgeleid uit* $\Gamma\}$.

Aangezien abnormaliteiten moeten kunnen worden afgeleid met de onderlimiet-logica **V**, wordt geëist dat de leden van $Ab^s(\Gamma)$ onvoorwaardelijk afgeleid zijn (op een lijn waarvan het vijfde element de lege verzameling is). Nu kan de markeringsregel gedefinieerd worden:

Definitie 43. *Een lijn* i *met als vijfde element de verzameling* Δ *wordt* gemarkeerd *op stadium* s *van het bewijs alss* $\Delta \cap Ab^s(\Gamma) \neq \emptyset$.

Het volgende theorema kan gemakkelijk worden afgeleid:

Theorema 13. *Als een bewijs uit* Γ *een (gemarkeerde of ongemarkeerde) lijn bevat met* A *als tweede element en* $\{B_1, \ldots, B_n\}$ $(n \geqslant 0)$ *als vijfde element, dan* $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n$.

Bewijs. — Als $n = 0$ dan is het bewijs evident, gezien de regel RU. Als $n > 0$, dan passen we een voor de hand liggende inductie toe op de lengte van het bewijs voor die lijn, waarbij RC de basis van de inductie oplevert. □

Op de gebruikelijke wijze kunnen nu ook *afleidbaarheid op een stadium*, *finale afleidbaarheid* en de *syntactische gevolgrelatie* bepaald worden:

52. Het stadium i van een geannoteerd dynamisch bewijs is het stadium waarop lijn i van het bewijs reeds werd neergeschreven, maar lijn $i{+}1$ nog niet. Met het neerschrijven van een nieuwe lijn in een geannoteerd dynamisch bewijs wordt overgegaan naar een nieuw stadium van dit bewijs.

Definitie 44.
A is afgeleid op een stadium *in een bewijs uit Γ alss A is afgeleid op een lijn die, op dat stadium van het bewijs, niet gemarkeerd is.*

Behalve afleidbaarheid op een stadium, kan ook —zoals gebruikelijk [53]— finale afleidbaarheid gedefinieerd worden:

Definitie 45. *A is* finaal afgeleid *in een bewijs uit Γ alss A is afgeleid op een lijn die niet gemarkeerd is, en deze lijn zal in geen enkele uitbreiding van het bewijs gemarkeerd worden.*

Definitie 46. $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} A$ *(A is een* **VA***-gevolg van Γ) alss A finaal afgeleid is in een* **VA***-bewijs uit Γ.*

Merk op dat we ons, door de bewijstheorie te baseren op de vereenvoudigde semantiek uit afdeling 4.6 (p. 97), heel wat problemen besparen. De regel RC mag worden toegepast, zelfs al bevat een van de Δ_i stellingen van **V**. Van zodra een stelling die een element is van een Δ_i is afgeleid, moeten alle lijnen met Δ_i als voorwaarde vanzelfsprekend gemarkeerd worden. Mochten we de voorwaardelijke regel toch gebaseerd hebben op de niet-vereenvoudigde semantiek, dan zou de toepasbaarheid van de voorwaardelijke regel onbeslisbaar zijn (omdat het niet-stelling zijn van **V** op predikatief niveau (in het algemeen) onbeslisbaar is).

Merk ook op dat de dynamiek van **VA**-bewijzen vrij beperkt is. Eens de formule $\exists\Box A$ onvoorwaardelijk is afgeleid, is ze ook finaal afgeleid (dit is zoals bij alle andere adaptieve logica's). Eens een lijn gemarkeerd is, blijft ze gemarkeerd in alle latere stadia van het bewijs. Dit is voor de meeste andere adaptieve logica's niet het geval (behalve voor diegene die ook de Eenvoudige Strategie hanteren). Het gebrek aan dynamiek is te wijten (of te danken) aan de aan de premissen opgelegde beperkingen. [54]

53. De notie 'finale afleidbaarheid' voor de logica **VA** is eenvoudiger dan voor de meeste corrigerende adaptieve logica's omdat voor **VA** (zoals voor de logica **COM** uit [BM00a]) de volgende eigenschap geldt: een lijn wordt niet gemarkeerd in om het even welke uitbreiding van het bewijs als en alleen als ze niet gemarkeerd wordt in om het even welke *eindige* uitbreiding van het bewijs.

54. Mochten ook premissen als $\Box p \vee \Box q$ toegelaten zijn, dan zouden we de veel complexere dynamiek (van de meeste adaptieve logica's) bekomen, en zou de Eenvoudige Strategie niet voldoen (ze zou slecht bepaald zijn) om de premissen "zo normaal mogelijk" te interpreteren.

Veronderstel dat $\Gamma^{\Box ?}$ onder meer de erotetische premisse $\Box ?\{p, q\} \vee \Box \neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$ bevat. Dan kan via toepassing van de generieke regel RC afgeleid worden dat $\Box ?\{p, q\}$ en dus ook dat $?\{p, q\}$, telkens op de voorwaarde $\{\Box \neg(p \vee q), \Box p, \Box q\}$, en veronderstel dat deze lijnen op stadium i niet gemarkeerd zijn. Dat $?\{p, q\}$ is afgeleid op stadium i drukt uit dat de vraag $?\{p, q\}$, op basis van de analyse van de verzameling premissen $\Gamma^{\Box} \cup \Gamma^{\Box ?}$ op dit stadium i, onopgelost is. Dit is geen zekerheid, maar een verantwoord vermoeden, gebaseerd op het inzicht op stadium i. Een belangrijke toepassing van de logica **VA** zal er nu juist op gericht zijn dit vermoeden te weerleggen. De belangrijkste heuristische regel hiervoor is zich tot doel stellen om een of meerdere elementen van een of meerdere voorwaarden Δ_i af te leiden uit $\Gamma^{\Box}$. [55] Als men op basis van deze heuristische regel tot het afleiden van een $\Box B_i \in \Delta_j$ komt, dan is minstens één vraag opgelost (en wordt de regel waarop de vraag afgeleid werd, gemarkeerd). Een aantal van de op een bepaald stadium afgeleide vragen zal dus op basis van de gevolgen die afgeleid worden uit de verzameling premissen $\Gamma^{\Box}$, kunnen worden opgelost (de negatie van die vragen is nu finaal afleidbaar). Voor vragen die finaal zijn afgeleid, kunnen in een aantal gevallen op basis van de premissen nieuwe vragen worden afgeleid. [56] Deze nieuwe vragen kunnen helpen bij het oplossen van de eerder afgeleide vragen. Dit alles wordt verder uitgewerkt in het volgende hoofdstuk.

55. Dit lijkt sterk op de doelgerichte bewijzen uit [BP01] en de procedure voor doelgerichte probleemoplossing uit [Bat03b]. We zijn er dan ook van overtuigd dat de daar ontwikkelde technieken bijzonder nuttig zouden zijn voor de logica **VA**. Bovendien lijkt het erop dat deze zonder veel problemen in **VA** kunnen worden ingebouwd.

56. Dit impliceert vanzelfsprekend niet dan enkel uit finaal afgeleide vragen nieuwe vragen worden afgeleid. Het is goed mogelijk dat, op stadium k van het bewijs een vraag Q_1 is afgeleid (Q_1 werd bijv. afgeleid op lijn j met als voorwaarde Δ_1 (bijv. een verzameling van een aantal directe antwoorden van Q_1), en lijn j is op stadium k van het bewijs niet gemarkeerd). Op lijn l kan uit Q_1 bijv. de vraag Q_2 worden afgeleid, op voorwaarde $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Als op een later stadium m van het bewijs een direct antwoord $\Box A$ van Q_1 (finaal) wordt afgeleid, dan zal lijn j gemarkeerd worden (we veronderstellen dat $\Box A \in \Delta_1$). Op dat moment is Q_1 niet langer afleidbaar (en dit blijft zo, aangezien uit $\Box A$ onvoorwaardelijk en dus finaal kan worden afgeleid dat $\neg Q_1$). Ook lijn l, waarop Q_2 werd afgeleid uit Q_1, moet op stadium m van het bewijs gemarkeerd worden. De vraag Q_2 is niet langer nuttig voor het beantwoorden van Q_1, want Q_1 is opgelost. Dit hoeft echter niet te betekenen dat Q_2 niet finaal kan worden afgeleid uit de premissen: als er geen oplossing van Q_2 (de onderdrukker of een direct antwoord van Q_2) uit de premissen kan worden afgeleid, zal Q_2 finaal afleidbaar zijn uit de premissen.

Om de bewijstheorie van **VA** te illustreren, geven we een eenvoudig voorbeeld van een **VA**-bewijs uit een verzameling premissen $\Gamma = \Gamma^{\Box ?} \cup \Gamma^{\Box} =$

$$\{\Box ?\{t, \neg t\} \vee \Box t \vee \Box \neg t, \Box(?x)Px \vee \Box\neg(\exists x)Px \vee (\exists x)\Box Px\}$$

$$\cup\ \{\Box(p \vee q), \Box(p \supset t), \Box(q \supset \neg t), \Box(\forall x)(Rx \supset Qx), \Box Ra\}.$$

1	$\Box ?\{t, \neg t\} \vee \Box t \vee \Box\neg t$	-	Prem-e	$\varnothing$
2	$\Box(p \vee q)$	-	Prem-d	$\varnothing$
3	$\Box(p \supset t)$	-	Prem-d	$\varnothing$
4	$\Box(q \supset \neg t)$	-	Prem-d	$\varnothing$
5	$\Box(?x)Px \vee \Box\neg(\exists x)Px \vee (\exists x)\Box Px$	-	Prem-e	$\varnothing$
6	$\Box(\forall x)(Rx \supset Qx)$	-	Prem-d	$\varnothing$
7	$\Box Ra$	-	Prem-d	$\varnothing$
8	$\Box(?x)Px$	5	RC	$\{\Box\neg(\exists x)Px,$ $(\exists x)\Box Px\}$
9	$(?x)Px$	8	RC	$\{\Box\neg(\exists x)Px,$ $(\exists x)\Box Px\}$
10	$(?x)Qx \vee \neg(?x)Qx$	-	RU	$\varnothing$
11	$(?x)Qx$	10	RC	$\{\Box\neg(\exists x)Qx,$ $(\exists x)\Box Qx\}$ $\dagger_{13}$
12	$\Box Qa$	6, 7	RU	$\varnothing$
13	$(\exists x)\Box Qx$	12	RU	$\varnothing$
14	$\neg(?x)Qx$	13	RU	$\varnothing$
15	$?\{p, q\} \vee \Box\neg(p \vee q) \vee \Box p \vee \Box q$	-	RU	$\varnothing$
16	$?\{p, q\} \vee \Box p \vee \Box q$	2, 15	RU	$\varnothing$
17	$?\{p, q\}$	16	RC	$\{\Box p, \Box q\}$

18 $?\{p,q\} \vee \Box t \vee \Box q$	3, 16	RU	$\varnothing$
19 $?\{p,q\} \vee \Box t \vee \Box\neg t$	4, 18	RU	$\varnothing$
20 $?\{p,q\} \vee \neg?\{t,\neg t\}$	19	RU	$\varnothing$
21 $?\{t,\neg t\} \supset ?\{p,q\}$	19	RU	$\varnothing$
22 $?\{t,\neg t\} \vee \Box t \vee \Box\neg t$	1	RU	$\varnothing$
23 $?\{t,\neg t\} \vee \Box\neg q \vee \Box\neg t$	4, 22	RU	$\varnothing$
24 $?\{t,\neg t\} \vee \Box\neg q \vee \Box\neg p$	3, 23	RU	$\varnothing$
25 $?\{t,\neg t\} \vee \Box p \vee \Box q$	2, 24	RU	$\varnothing$
26 $?\{p,q\} \supset ?\{t,\neg t\}$	25	RU	$\varnothing$
27 $?\{p,q\} \equiv ?\{t,\neg t\}$	21, 26	RU	$\varnothing$
28 $?\{t,\neg t\}$	17, 26	RU	$\{\Box p, \Box q\}$

Op lijn 9 wordt (voorwaardelijk) afgeleid dat $(?x)Px$. Met deze eenvoudige premissen is het gemakkelijk om in te zien dat $(?x)Px$ ook finaal is afgeleid. Voor het afleiden van de vraag $(?x)Qx$ op lijn 11 hebben we Γ niet nodig ($(?x)Qx \vee \neg(?x)Qx$ is immers een stelling van **V** (lijn 10)). Op lijn 13 hebben we een minimale *Dab*-formule afgeleid, waardoor we, op stadium 13 van ons bewijs, verplicht zijn om lijn 11 te markeren (aangeduid met $\dagger_{13}$). Op lijn 14 kan dan afgeleid worden dat $\neg(?x)Qx$, wat betekent dat de vraag $(?x)Qx$ op basis van de premissen is opgelost. Op lijn 27 bekomen we dat de vragen $?\{p,q\}$ en $?\{t,\neg t\}$ equivalent zijn (we zullen later zeggen dat beide vragen op basis van de premissen probleem-equivalent zijn). Dit betekent dat als de ene vraag is opgelost, dan ook steeds de andere vraag is opgelost. [57]

Veronderstel dat we het bewijs als volgt voortzetten: we stellen effectief de vraag $?\{p,q\}$ aan een betrouwbare externe bron, die ons bijv. $\Box p$ als antwoord teruggeeft. Als we dit antwoord nu als nieuwe premisse toevoegen aan het bewijs, dan wordt de vraag $?\{p,q\}$ als opgelost beschouwd,

57. Uit Γ kan ook $\Box?\{t,\neg t\}$ afgeleid worden (onder dezelfde voorwaarde als waaronder $?\{t,\neg t\}$ afleidbaar is uit Γ). Bijgevolg is ook $\Box?\{t,\neg t\} \equiv \Box?\{p,q\}$ afleidbaar uit Γ.

en wordt lijn 17 gemarkeerd. Ook lijn 28 moet gemarkeerd worden. De vraag $?\{t, \neg t\}$ zou ook nog kunnen afgeleid worden op een lijn met de voorwaarde $\{\Box t, \Box\neg t\}$, maar ook deze lijn moet gemarkeerd worden ($\Box t$ is afleidbaar uit $\Box p$ en $\Box(p \supset t)$ (lijn 3)). Uit $\Box p$ kan afgeleid worden dat $\neg?\{p, \neg p\}$ en $\neg?\{t, \neg t\}$, en dus zijn beide probleem-equivalente vragen opgelost.

Als een vraag op een bepaald stadium van een bewijs afgeleid is (voorkomt op een ongemarkeerde lijn), kan ervoor geopteerd worden die vraag effectief te stellen (aan een externe, betrouwbare bron). Als een antwoord verkregen wordt, dan kan dit als nieuwe premisse aan het bewijs worden toegevoegd. [58] Daarom voegen we een nieuwe regel toe aan de generieke regels:

Nieuw Als Q een onopgeloste vraag is (voorkomt op een ongemarkeerde lijn) op stadium i van het bewijs, dan kan de vraag Q gesteld worden aan een externe bron. Als een antwoord $\Box B$ ($B \in \mathcal{W}$) verkregen wordt, dan mag aan het bewijs een lijn worden toegevoegd die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) $\Box B$,

(3) "–",

(4) "Nieuw", en

(5) $\varnothing$.

Als $\Box B$ een *direct* antwoord is op de gestelde vraag Q, dan zal (minstens) de lijn waarop Q is afgeleid, gemarkeerd moeten worden. Maar het verkregen antwoord hoeft vanzelfsprekend geen direct antwoord op de vraag Q te zijn. In lijn met de conversationele principes van Grice ([Gri75]) en de intuïties van Manor ([Man82]), veronderstellen we hier dat onze externe bron (tot wie we de vraag gericht hebben) zich zo coöperatief en behulpzaam mogelijk opstelt (indien dit van toepassing is). Een coöperatief antwoord houdt in dat de bron een direct of corrigerend antwoord geeft, wanneer dit 'voorhanden' is. Indien niet, wordt getracht om een partieel

58. In zijn erotetische zoekscenario's spreekt Wiśniewski in dit geval van een *query* (zie [Wiś03]).

of conditioneel [59] antwoord te geven, of een eliminerend antwoord te geven (eventueel meerdere). Pas als laatste optie blijft “Ik weet het niet” over.

4.9. Afleidbare regels van VA

We geven eerst twee afgeleide voorwaardelijke regels voor het afleiden van vragen:

RC-Q1 Op om het even welke plaats in het bewijs mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) $?\{A_1, \ldots, A_n\}$,

(3) “–”,

(4) “RC-Q1”, en

(5) $\{\Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n), \Box A_1, \ldots, \Box A_n\}$.

RC-Q2 Op om het even welke plaats in het bewijs mag een lijn toegevoegd worden die bestaat uit

(1) het gepaste nummer van de lijn,

(2) $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

(3) “–”,

(4) “RC-Q2”, en

(5) $\{\Box\neg(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$
$(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)\Box A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$.

Een vraag Q kan op elk stadium van het bewijs worden neergeschreven onder de voorwaarde Δ (waarbij $\vdash_{\mathbf{V}} Dab(\Delta) \equiv \neg Q$), en is dus afgeleid op

59. In plaats van een conditioneel antwoord te geven, kan ook een wedervraag gesteld worden. Deze correspondeert met een conditioneel antwoord, en beide hebben tot doel de eerder gestelde vraag in te perken. Een dergelijke aanpak wordt uitgewerkt in [DV03].

dat stadium, tenzij en totdat een element van Δ onvoorwaardelijk is afgeleid. Dus ook vragen met alleen maar inconsistente directe antwoorden, en vragen met een tautologie als direct antwoord, kunnen op een bepaald stadium van het bewijs zijn afgeleid. Dergelijke vragen zullen echter niet finaal afleidbaar zijn: een logische analyse zal (uiteindelijk) aan het licht brengen dat een element van Δ onvoorwaardelijk afleidbaar is, waardoor de vraag niet langer afleidbaar is.

Op dit moment is er nog geen bewijsheuristiek voor **VA** beschikbaar, maar we kunnen in verband hiermee wel enkele nuttige opmerkingen maken. Er is immers een grote verzameling afleidbare regels die sterk helpen bij het beslissen of een bepaalde vraag afleidbaar is uit de premissen, of bij het vormen van een 'gerechtvaardigd' oordeel hierover.

Er is een ganse reeks van (voor de hand liggende) afleidbare regels. Ze kunnen gemakkelijk worden afgeleid uit Theorema 13 (p. 107) en de eigenschappen van **V**. We geven er enkele: [60]

RD1 Uit A_Δ mag $A_{\Delta\cup\Theta}$ afgeleid worden.

RD2 Als $B \vdash_{\mathbf{V}} C$, mag uit $A_{\Delta\cup\{B\}}$ afgeleid worden dat $A_{\Delta\cup\{C\}}$.

RD3 Uit $A_{\{B_1,\ldots,B_n\}}$ en $\neg A_\varnothing$ mag $(B_1 \vee \ldots \vee B_n)_\varnothing$ afgeleid worden.

RD4 Uit $A_{\Delta\cup\{B\}}$ en $\neg B_\varnothing$ mag A_Δ afgeleid worden.

RD5 Uit $A_{\Delta_1\cup\{B\}}$ en $\neg B_{\Delta_2}$ mag $A_{\Delta_1\cup\Delta_2}$ afgeleid worden.

De afgeleide regels illustreren het grote nut van dynamische bewijzen in de zoektocht naar vragen die afleidbaar zijn uit een gegeven verzameling premissen. Meer in het bijzonder illustreren ze het nut om verschillende vragen (en dus ook voorwaarden) tegelijkertijd te onderzoeken. Dit zal vooral duidelijk worden bij het zoeken naar door een gegeven vraag geïmpliceerde vragen.

60. We herinneren eraan dat elke voorwaarde Δ abnormaliteiten van de vorm $\exists\Box A$ (waarbij $A \in \mathcal{F}$) bevat. A_Δ duidt aan dat A afgeleid is op een niet-gemarkeerde lijn van het bewijs, met Δ als vijfde element. Dit soort van notatie werd ingevoerd in [BDV].

4.10. Enkele meta-eigenschappen van VA

Aangezien **VA** past binnen het algemene schema van een adaptieve logica, kan, steunend op de inzichten ontwikkeld in [Bat], bewezen worden dat **VA** de volgende standaard-eigenschappen van adaptieve logica's heeft:

Theorema 14 (Cautious Cut).
Als $\Gamma \cup \Gamma' \vDash_{\mathbf{VA}} A$ *en* $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} B$ *voor elke* $B \in \Gamma'$, *dan* $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} A$.

Theorema 15 (Cautious Monotonicity).
Als $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} A$ *en* $\Gamma \vDash_{\mathbf{VA}} B$ *voor elke* $B \in \Gamma'$, *dan* $\Gamma \cup \Gamma' \vDash_{\mathbf{VA}} A$.

Theorema 16 (Proof Invariance). *Als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} A$, *dan kan elk bewijs uit* Γ *uitgebreid worden tot een bewijs waarin* A *finaal is afgeleid uit* Γ.

4.11. Tot slot

Met behulp van **VA** kunnen vragen worden afgeleid, zowel uit declaratieve premissen als uit andere vragen. Omdat niet geëist wordt dat een vraag gegrond moet zijn, zijn zeer veel vragen afleidbaar: elke vraag die onopgelost is, waarvan dus noch de onderdrukker noch een direct antwoord afleidbaar is, is afleidbaar. In het volgende hoofdstuk gaan we een aantal relaties tussen declaratieve en erotetische premissen en afleidbare vragen vastleggen. Deze zijn geïnspireerd op de erotetische concepten van Wiśniewski, maar vereisen geen beperking tot een ω-volledig fragment. Dankzij de dynamische bewijstheorie van **VA** krijgt het redeneren met vragen ook een meer realistisch karakter. Vragen worden afgeleid op basis van het inzicht in de (declaratieve en erotetische) premissen op een bepaald stadium van het bewijs. Dit inzicht is 'voorlopig', en zo worden ook de afgeleide vragen herzienbaar.

Niets of niemand is logisch alwetend, en het blootleggen van de (interessante) gevolgen van een theorie of een verzameling premissen kost tijd en vooral ook moeite. Zelfs al is een beslissingsmethode beschikbaar, dan ontbreekt het mensen en computers vaak aan de nodige middelen om een exhaustieve procedure te doorlopen. Bijgevolg worden ze gedwongen om te handelen volgens hun beste inzichten op dat ogenblik (men zou in die omstandigheden natuurlijk ook om het even wat kunnen doen, maar irrationalisme beschouwen we niet als een “verantwoorde” optie). In een aantal contexten is het bovendien veel interessanter (sneller, gemakkelijker, doelgerichter, enzovoort) om vragen te stellen dan te proberen verdere afleidingen te maken. In dergelijke contexten is het belangrijk dat de vragen die gesteld worden, ook nuttige vragen zijn (gegeven het inzicht in de premissen op dat ogenblik): ze moeten dus informatief zijn (gegeven het inzicht op dat ogenblik), ook al kan later blijken dat men het antwoord eigenlijk zelf uit de premissen kon afleiden. “Stop the world, I want to think.”

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 5

Bepaling van erotetische concepten

5.1. Inleiding

In hoofdstuk 2 werden de belangrijkste concepten van de inferentiële erotetische vraaglogica van Wiśniewski besproken, en hebben we gewezen op een aantal tekortkomingen. In het vorige hoofdstuk hebben we de monotone logica **V** en de adaptieve vraaglogica **VA** gepresenteerd. In dit hoofdstuk zullen we de mogelijkheden van **VA** verkennen, voornamelijk aan de hand van de erotetische concepten evocatie en erotetische implicatie.

Eerst zullen we (een vorm van) evocatie bepalen, en nagaan in hoeverre dit concept overeenkomt met dat van Wiśniewski. Daarna zullen we, steunend op de logica's **V** en **VA**, een aantal verschillende invullingen geven van het concept (erotetische) implicatie. Op basis van het concept W-implicatie zullen we een poging tot reconstructie van Wiśniewski's erotetische implicatie wagen. Daarna komen we nog even terug op de in hoofdstuk 2 vermelde 'gebreken' van Wiśniewski's erotetische implicatie.

Tot slot doen we een aantal alternatieve voorstellen, die gebaseerd zijn op (een lichte variant van) de logica **VA**. Deze alternatieve voorstellen sluiten dichter aan bij een formele benadering van probleemoplossing.

5.2. Evocatie en onderdrukking van een vraag

Dat een vraag Q finaal **VA**-afgeleid is uit een verzameling premissen Γ betekent nog niet dat ze ook geëvoceerd wordt (in de zin van Wiśniewski) door die verzameling premissen. Het betekent enkel dat de vraag niet opgelost wordt door Γ: uit Γ is noch een direct antwoord van Q, noch de onderdrukker van Q afleidbaar. Met andere woorden, de vraag Q blijft, op basis van Γ, een open vraag: ze wordt niet onderdrukt door Γ, en ze is informatief ten opzichte van Γ (geen enkel van haar directe antwoorden is afleidbaar uit Γ). Merk op dat zeer veel vragen **VA**-afleidbaar zijn uit een verzameling premissen Γ: elke welgevormde vraag Q die niet door Γ wordt opgelost, is **VA**-afleidbaar uit Γ. Als de vraag Q is afgeleid uit Γ, en er bovendien geldt dat $\pi(Q)$ is afgeleid uit Γ, zullen we zeggen dat de vraag Q door Γ geëvoceerd wordt. Slechts een fractie van de uit Γ afleidbare vragen, worden ook door Γ geëvoceerd.

In wat volgt, zullen we vaak steunen op het volgende theorema:

Theorema 17. *Zij Γ een verzameling premissen en $A \in \mathcal{F}$. Er geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \exists\Box A$ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$.*

BEWIJS. — De links-rechts richting. Als Γ **V**-inconsistent is, dan geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$ en $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \exists\Box A$, en is het theorema bewezen. Veronderstel nu dat Γ een **V**-consistente verzameling is en dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \exists\Box A$. Aangezien Γ **V**-consistent is, zijn er **V**-modellen die Γ verifiëren, en dus — wegens Reassurance — ook **VA**-modellen die Γ verifiëren. Daarom volgt uit $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \exists\Box A$ dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{VA}} \neg\exists\Box A$, en dus dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{VA}} \forall\Diamond\neg A$. Uit theorema 9 (p. 99) volgt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box\neg\neg A$, en dus dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$.

De rechts-links richting. Uit $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A$ volgt rechtstreeks dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \exists\Box A$. □

We bepalen eerst wanneer een vraag Q door een verzameling premissen Γ onderdrukt wordt. Onderdrukking [1] van een vraag Q door een verzameling premissen Γ, kan in **VA** (of in **V**) [2] als volgt worden uitgedrukt:

1. In [Har02] introduceert Harrah op summiere wijze de notie *suppression* (*onderdrukking*) van een vraag door een verzameling premissen. Harrah suggereert dat onderdrukking van een vraag door een verzameling premissen in een duale relatie staat tot Wiśniewski's notie *evocatie*. In termen van **CL**: Een vraag Q wordt onderdrukt door een verzameling premissen Γ alss $\neg A$ afleidbaar is uit Γ, voor elk direct antwoord A van Q.
2. Het maakt niet uit of we **V** of **VA** als onderliggende logica nemen. We weten

Definitie 47. *Een vraag* $?\{A_1, \ldots, A_n\}$ *wordt* onderdrukt *door een verzameling premissen* Γ *alss* $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \Box\neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$.

Definitie 48. *Een vraag* $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *wordt* onderdrukt *door een verzameling premissen* Γ *alss*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \Box\neg(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Of samengevat: [3]

Definitie 49. *Een vraag* Q *wordt* onderdrukt *door een verzameling premissen* Γ *alss* $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \rho(Q)$, *waarbij* $\rho(Q)$ *de onderdrukker is van* Q.

Merk op dat, als Γ **V**-inconsistent is, dan elke vraag Q door Γ onderdrukt wordt. Vanzelfsprekend is ook elke vraag **VA**-afleidbaar uit Γ. Om op een zinnige manier over inconsistente verzamelingen te kunnen spreken, moet **V** vervangen worden door een paraconsistente modale logica, en moet **VA** vervangen worden door een adaptieve logica die een combinatie is van een inconsistentie-adaptieve en een ampliatieve logica. Dit houdt onder meer in dat twee soorten abnormaliteiten (in een bepaalde volgorde) moeten worden geminimaliseerd. Dit brengt een aantal problemen met zich, waar ik niet zal op ingaan. [4]

Als de negatie van een vraag Q finaal afleidbaar is uit Γ ($\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \neg Q$), dan kunnen we zeggen dat de vraag Q opgelost is: hetzij omdat ze door Γ onderdrukt wordt, hetzij omdat ze niet langer informatief is (omdat een direct antwoord van Q werd afgeleid):

immers dat, als $A \in \mathcal{W}$, dan geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \Box A$.

3. De onderdrukker $\rho(Q)$ van een vraag Q werd gedefinieerd in afdeling 4.2.2 (p. 77).

4. Ik heb een adaptieve logica uitgewerkt voor het afleiden van vragen uit (mogelijk inconsistente) premissen, die bovendien een (primitief) mechanisme voor 'belief revision' bevat. Het idee is — grofweg — dat een uit de premissen afleidbare contradictie $\Box(A \wedge {\sim}A)$ een vraag $?\{A, {\sim}A\}$ oproept (niettegenstaande zowel $\Box A$ als $\Box{\sim}A$ afleidbaar zijn uit de premissen). Als deze vraag gesteld wordt aan een betrouwbare bron, wordt met het verkregen antwoord, bijv. $\Box{\sim}A$, een revisie-operatie op de verzameling premissen uitgevoerd, waardoor $\Box A$ niet langer volgt uit de bekomen verzameling, en $\Box{\sim}A$ er wel uit volgt. De preferenties worden uitgedrukt aan de hand van het aantal $\Box$-en (als de premissen bijv. $\Box\Box A$ en $\Box B$ bevatten, dan wordt aan A een hogere preferentie toegekend dan aan B). Door een aantal complicaties is mijn voorstel — helaas — nog niet publiceerbaar.

Definitie 50. *Een vraag Q is* niet-informatief *t.o.v. een verzameling premissen Γ alss er een $\Box A \in dQ$ bestaat, zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \Box A$.*

Merk op dat we voor een vraag van de tweede soort

$$Q = (?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

ook kunnen stellen dat Q niet-informatief is ten opzichte van Γ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)\Box A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. [5]

Definitie 51.
Een vraag Q is opgelost *door een verzameling premissen Γ alss*

(*1*) *Q onderdrukt wordt door Γ, of*

(*2*) *Q niet (langer) informatief is t.o.v. Γ.*

Evocatie van een vraag Q uit een verzameling premissen Γ bepalen we als volgt:

Definitie 52. *Een vraag $?\{A_1,\ldots,A_n\}$ wordt* geëvoceerd *door de verzameling premissen Γ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} ?\{A_1,\ldots,A_n\} \wedge \Box(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$.*

Definitie 53. *Een vraag $(?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ wordt* geëvoceerd *door de verzameling premissen Γ alss*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (?\alpha_1)\ldots(?\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \wedge \Box(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_n)A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Samenvattend:

Definitie 54. *Een vraag Q wordt geëvoceerd door een verzameling premissen Γ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q \wedge \pi(Q)$.*

We kunnen nu aantonen dat, voor consistente verzamelingen premissen, de bewijstheorie van **VA** adequaat is om Wiśnieswki's definitie van evocatie te vatten. We wijzen vooraf op een aantal moeilijkheden, en voeren een aantal afspraken in.

Voor inconsistente verzamelingen premissen zorgt Wiśniewski's definitie van evocatie ervoor dat geen enkele vraag geëvoceerd wordt. De adaptieve

5. Voor het (logische) verband tussen $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} (\exists\alpha_1)\Box A(\alpha_1)$ en $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box A(\alpha_1/c_i)$, waarbij c_i een constante is, verwijs ik naar theorema 3 (p. 91).

logica **VA** laat toe om elke mogelijke vraag af te leiden uit een inconsistente verzameling premissen. Beide aanpakken zijn (in hun huidige vorm) ongeschikt om op een zinnige manier vragen af te leiden uit inconsistente premissen. Door de asymmetrie zullen we ons in het volgende theorema moeten beperken tot consistente verzamelingen premissen.

Afhankelijk van de onderliggende logica (**CL** of ω-volledige, en dus niet-compacte $\mathbf{CL}^*$), is de formule $(\exists x)Px$ in de vraaglogica van Wiśniewski al dan niet een prospectieve presuppositie van de vraag $(?x)Px$ [6] (voor **CL** niet, en voor $\mathbf{CL}^*$ wel). Wat betreft evocatie krijgen we, met **CL** als onderliggende logica dat $\mathbf{E}(\{Pa \vee Pb\}, (?x)Px)$, maar *niet* dat $\mathbf{E}(\{(\exists x)Px\}, (?x)Px)$. Met $\mathbf{CL}^*$ als onderliggende logica worden beide vragen geëvoceerd door de respectievelijke verzamelingen premissen. Met de logica **VA** zullen ook beide vragen geëvoceerd worden door respectievelijk $\{\Box(Pa \vee Pb)\}$ en $\{\Box(\exists x)Px\}$, hoewel **V** en **VA** compact zijn (en dus niet ω-volledig). Wegens het niet-compact zijn van $\mathbf{CL}^*$ kan onderstaand theorema niet uitgebreid worden naar om het even welke oneindige verzameling premissen. Veronderstel dat $\Theta = \{P\alpha \mid \alpha \in \mathcal{C}\} \cup \{(\exists x)\neg Px\}$. Dan volgt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}^*} \bot$, en bijgevolg wordt geen enkele vraag geëvoceerd door Θ. In de context van **VA** krijgen we dat $\Theta^{\Box} = \{\Box P\alpha \mid \alpha \in \mathcal{C}\} \cup \{\Box(\exists x)\neg Px\}$. Dan volgt dat $\Theta^{\Box} \nvdash_{\mathbf{V}} \bot$, en ook dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} (?x)\neg Px \wedge \Box(\exists x)\neg Px$. Bijgevolg wordt $(?x)\neg Px$ geëvoceerd door $\Theta^{\Box}$.

Verder voeren we een aantal afspraken in. Voor elke modale formule van de vorm $\Box A$ (waarbij $A \in \mathcal{W}$), $\sqrt{\Box A} = A$. We bepalen de verzameling $\Theta^{\Box}$ als $\Theta^{\Box} = \{\Box A \mid A \in \Theta; \Theta \subset \mathcal{W}\}$, en $\sqrt{\Theta^{\Box}}$ als Θ. Waar Q een vraag is van de eerste of de tweede soort (zoals bepaald in hoofdstuk 4), is de verzameling directe antwoorden van Q gelijk aan dQ. De verzameling van directe antwoorden van de **CL**-tegenhanger van de vraag Q (met exact dezelfde notatie) heeft dan de verzameling $\sqrt{dQ}$ als verzameling van directe antwoorden. Tot slot definiëren we de notie *maximale presuppositie*, $\mu(Q)$, van een vraag Q. Een presuppositie A is een maximale presuppositie van een vraag Q alss elke presuppositie van Q **V**-afleidbaar is uit A. We kiezen één specifieke maximale presuppositie van een vraag $Q = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ van de eerste soort, namelijk $\Box A_1 \vee \ldots \vee \Box A_n$, als de maximale presuppositie van Q, afgekort als $\mu(Q)$. De hiermee corresponderende verzameling $\Delta_{\mu(Q)}$ bepalen we als volgt: $\Delta_{\mu(Q)} = \{\Box A_1, \ldots, \Box A_n\}$. We kiezen één specifieke maximale presuppositie van een vraag $(?\alpha_1) \ldots (?\alpha_n)A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ van de tweede

6. In plaats van Wiśniewski's notatie, $?\mathbf{S}(Px)$, gebruiken we onze notatie, dus $(?x)Px$.

soort, namelijk $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Box A(x_1,\ldots,x_n)$, als de maximale presuppositie van Q, $\mu(Q)$. De hiermee corresponderende verzameling $\Delta_{\mu(Q)}$ bepalen we als volgt: $\Delta_{\mu(Q)} = \{(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Box A(x_1,\ldots,x_n)\}$. Voor elke vraag Q van de eerste of de tweede soort, geldt dan dat $\vdash_{\mathbf{V}} Q \vee \rho(Q) \vee \mu(Q)$.

Theorema 18. *Voor elke $\mathbf{CL}^*$-consistente, eindige Θ, voor elke vraag Q van de eerste of tweede soort, $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} Q \wedge \pi(Q)$ alss*

(1) $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}^*} \sqrt{\pi(Q)}$, en

(2) voor elk direct antwoord $A \in \sqrt{dQ}$, $\Theta \nvdash_{\mathbf{CL}^*} A$.

BEWIJS. — **De links-rechts richting.** Als Θ $\mathbf{CL}^*$-consistent is, dan is Θ $\mathbf{CL}$-consistent, en is $\Theta^{\Box}$ $\mathbf{V}$-consistent. Aangezien Θ eindig is, is ook $\Theta^{\Box}$ eindig. Uit $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} Q \wedge \pi(Q)$ volgt dan dat $Q \wedge \pi(Q)$ finaal afgeleid is op een lijn i, met als voorwaarde een verzameling van abnormaliteiten Δ, in een $\mathbf{VA}$-bewijs uit $\Theta^{\Box}$. Dan kan het bewijs uitgebreid worden met lijnen k en $k+1$, waarop respectievelijk Q en $\pi(Q)$ finaal zijn afgeleid, beide op voorwaarde Δ. Aangezien Q finaal is afgeleid, weten we dat $\Delta \subset \Omega$ (mocht Δ stellingen van $\mathbf{V}$ bevatten, kon Q niet finaal zijn afgeleid). Zij $\Delta = \{\exists\Box A_1,\ldots,\exists\Box A_n\} \subseteq \Omega$. Met theorema 17 (p. 118) volgt uit $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} \pi(Q)$ dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$. Met theorema 6 (p. 91) kunnen we afleiden dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} \sqrt{\pi(Q)}$. Aangezien Θ $\mathbf{CL}^*$-consistent is en eindig, volgt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}^*} \sqrt{\pi(Q)}$.

Om te bewijzen dat (2) geldt, veronderstellen we dat er een $A \in \sqrt{dQ}$ bestaat zodanig dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}^*} A$. Aangezien Θ $\mathbf{CL}^*$-consistent is en eindig, volgt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} A$. Met theorema 6 (p. 91) volgt dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$. Aangezien $\Theta^{\Box}$ eindig is, bestaat er een uitbreiding van het beschouwde $\mathbf{VA}$-bewijs uit $\Theta^{\Box}$ waarin $\Box A$ finaal (want onvoorwaardelijk) is afgeleid. Aangezien $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A \supset \neg Q$ ($\Box A$ is een direct antwoord van Q), kan het bewijs verder worden uitgebreid, zodanig dat $\neg Q$ finaal (want onvoorwaardelijk) wordt afgeleid op lijn l. Uit lijnen k en l is dan finaal en onvoorwaardelijk afleidbaar dat $Dab(\Delta)$, en dus mogen we besluiten dat $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} Dab(\Delta)$. Uit $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A_1 \vee \ldots \vee \exists\Box A_n$ volgt met de uitgebreide disjunctie-eigenschap dat $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \exists\Box A_i$, voor een i waarbij $1 \leqslant i \leqslant n$. Dit spreekt de veronderstelling tegen dat $Q \wedge \pi(Q)$ finaal afgeleid is op lijn i (met als voorwaarde Δ).

De rechts-links richting. Veronderstel dat, voor een $\mathbf{CL}^*$-consistente, eindige Θ, geldt dat

(1) $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}^*} \sqrt{\pi(Q)}$, en

(2) voor elk direct antwoord $A \in \sqrt{dQ}$, $\Theta \nvdash_{\mathbf{CL}^*} A$.

Dan volgt daaruit dat

(1) $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} \sqrt{\pi(Q)}$, en

(2) voor elk direct antwoord $A \in \sqrt{dQ}$, $\Theta \nvdash_{\mathbf{CL}} A$.

Met toepassing van theorema 6 (p. 91) volgt daaruit dat

(1) $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$, en

(2) voor elk direct antwoord $\Box A \in dQ$, $\Theta^{\Box} \nvdash_{\mathbf{V}} \Box A$.

Uit (1) volgt dat $\pi(Q)$ met RU onvoorwaardelijk kan worden toegevoegd aan een **VA**-bewijs uit $\Theta^{\Box}$, bijv. op lijn k. Op lijn $k+1$ kan, via toepassing van RU, de **V**-stelling $Q \vee \rho(Q) \vee \mu(Q)$ toegevoegd worden aan het bewijs. Aangezien $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$ kan, via RU, op lijn $k+2$ afgeleid worden dat $Q \vee \mu(Q)$. Door toepassing van RC kan Q toegevoegd worden op een lijn $k+3$ van het **VA**-bewijs uit $\Theta^{\Box}$, met als voorwaarde Δ, waarbij Δ zodanig is dat $Dab(\Delta)$ gelijk is aan $\mu(Q)$. Uit lijnen k en $k+3$ kan dan op lijn $k+4$ met RU afgeleid worden dat $Q \wedge \pi(Q)$, op voorwaarde Δ. Uit (2) weten we dat geen enkel direct antwoord van Q **V**-afleidbaar is uit $\Theta^{\Box}$. Met de uitgebreide disjunctie- en existentie-regels volgt dat geen enkel element van Δ **V**-afleidbaar is uit $\Theta^{\Box}$. Dus zal lijn $k+4$, in om het even welke uitbreiding van het bewijs uit $\Theta^{\Box}$, nooit gemarkeerd worden. Dus kunnen we besluiten dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} Q \wedge \pi(Q)$. $\Box$

Dit betekent dat een vraag in Wiśniewski's theorie wordt geëvoceerd door een **CL***-consistente, eindige verzameling premissen Θ als en slechts als die vraag in **VA** geëvoceerd wordt door $\Theta^{\Box}$.

Zoals de logica's **V** en **VA** nu bepaald zijn, kan de notie *generatie* van een vraag door een verzameling premissen niet op object-niveau worden bepaald. De bijkomende voorwaarde die generatie van evocatie onderscheidt, kan in **V** uitgedrukt worden als $\nvdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$ (de proactieve presuppositie van de vraag Q mag niet **V**-afleidbaar zijn uit de lege verzameling). Deze eis kan natuurlijk niet uitgedrukt worden, of tot uiting komen, in een **V**-bewijs (of **VA**-bewijs) uit Γ. We weten evenwel dat $\nvdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$ alss $\vdash_{\mathbf{VA}} \neg\pi(Q)$, maar ook dit kan niet 'afgelezen' worden uit een **VA**-bewijs uit Γ. Mochten we, bij het bepalen van de logica **VA**, de verzameling abnormaliteiten $\Omega^{\Box}$ uitbreiden met alle formules van de vorm $\exists\Box\Box A$ (waarbij nog steeds $A \in \mathcal{F}$), zouden we de logica **VA2** bekomen. In **VA2** zou dan ook de regel gelden: "Als $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \exists\Box\Box A$, dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA2}} \forall\Diamond\neg\Box A$". In dat geval zou de bijkomende voorwaarde (om te kunnen spreken van generatie) als volgt kunnen worden uitgedrukt: $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA2}} \Diamond\neg\pi(Q)$. Immers, als $\vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$, dan ook $\vdash_{\mathbf{V}} \Box\pi(Q)$, en $\vdash_{\mathbf{VA2}} \Box\pi(Q)$, en dus $\Gamma \nvdash_{\mathbf{VA2}} \Diamond\neg\pi(Q)$ (we veronderstellen dat Γ consistent is). Als $\nvdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$, dan $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \Box\pi(Q)$ (Γ bevat nog steeds enkel premissen van de vorm $\Box A$, waarbij $A \in \mathcal{F}$), en dus $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA2}} \Diamond\neg\pi(Q)$. Dus op die manier zou ook het concept generatie van een vraag uit een verzameling premissen constructief worden benaderd met een adaptieve logica. Het spreekt vanzelf dat dit verder moet worden uitgezocht.

5.3. Erotetische implicatie

We hebben reeds gewezen op het groot belang van het kunnen afleiden, op basis van de premissen, van vragen uit een of meerdere hoofdvragen. Vanzelfsprekend is het belangrijk dat de uit een hoofdvraag afgeleide vragen enige relevantie hebben voor het oplossen van de hoofdvraag. We zullen ons in eerste instantie laten leiden door het baanbrekende werk van Wiśniewski, en een poging doen om zijn semantisch concept van erotetische implicatie constructief te benaderen via de bewijstheorie van de logica's **V** en **VA**. Daarna zullen we een aantal andere opties blootleggen.

5.3.1. Implicatie van vragen in V en VA

We hebben in hoofdstuk 4 reeds gezien dat een vraag een andere vraag kan impliceren, bijv. als $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$. Men kan zich afvragen of deze implicatie hier eigenlijk wel iets betekent. De vraag is dus of we, met een eenvoudige materiële implicatie, toch Wiśniewski's vrij complexe notie van erotetische implicatie kunnen vatten (of een andere vorm van erotetische implicatie).

Dat $Q_1 \supset Q_2$ een **VA**-gevolg is van Γ heeft niet zoveel te betekenen. Zo geldt bijvoorbeeld dat $\varnothing \vdash_{\mathbf{VA}} ?\{p, \neg p\} \wedge ?\{q, \neg q\}$, en dus ook dat $\varnothing \vdash_{\mathbf{VA}}$

$?\{p, \neg p\} \supset ?\{q, \neg q\}$. Nochtans is tussen beide vragen $?\{p, \neg p\}$ en $?\{q, \neg q\}$, gegeven de lege verzameling premissen, geen enkel verband. We zullen zien dat dat verband tussen een vraag Q_1 en een vraag Q_2 er wel is wanneer $Q_1 \supset Q_2$ een **V**-gevolg is van Γ, eventueel op een eindig aantal (specifieke) abnormaliteiten na. [7] Om exact te kunnen bepalen wanneer een vraag geïmpliceerd wordt door een andere vraag en de verzameling (declaratieve) premissen, moeten we eerst een aantal begrippen definiëren.

Eerst definiëren we een *juist-voldoende antwoord* op een vraag: [8]

Definitie 55. *$\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$) is een* juist-voldoende antwoord *op de vraag Q alss er een direct antwoord $\Box B$ van Q bestaat zodanig dat $\Box B \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$ en $\Box A \vdash_{\mathbf{V}} \Box B$.*

Een juist-voldoende antwoord op een vraag Q is dus een wff die **V**-equivalent is met een direct antwoord van Q.

Partiële antwoorden kunnen op (minstens) twee verschillende manieren bepaald worden. We geven eerst een definitie die nauw aansluit bij die van Belnap: [9]

Definitie 56. *$\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$) is een* B-partieel antwoord *op de vraag Q alss*

(1) $\Box A$ geen juist-voldoende antwoord op Q is;

(2) Q een consistent direct antwoord $\Box B$ heeft, waarvoor geldt dat $\Box B \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$;

(3) $\pi(Q) \nvdash_{\mathbf{V}} \Box A$.

Deze definitie verschilt nogal sterk van de definitie van een W-partieel antwoord (die we onmiddellijk hierna geven). Zo zijn $\Box(q \vee t)$ en $\Box(t \supset p)$ B-partiële antwoorden op de vraag $?\{p, q, r\}$, en is $\Box(Pa \vee (Qb \wedge Qc))$ een B-partieel antwoord op $(?x)Px$, terwijl geen van deze formules W-partiële

7. Zoals bij Wiśniewksi's erotetische implicatie (zie hoofdstuk 2) zal een uit Q_1 afgeleide vraag Q_2 in een aantal gevallen toch irrelevant zijn voor het beantwoorden van Q_1 (cf. infra).
8. Deze definitie is analoog aan de definitie van 'H-just-complete answer' in [BS76, p. 126], uiteraard getransformeerd naar de huidige toepassingscontext.
9. Deze definitie is een omzetting van Belnaps definitie van een "proper H-partial answer" ([BS76, p. 128]) naar de huidige context.

antwoorden zijn. W-partiële antwoorden kunnen als volgt gedefinieerd worden: [10]

Definitie 57.
$\Box A$ $(A \in \mathcal{F})$ *is een* W-partieel antwoord *op een vraag* Q *alss*

(1) $\Box A$ *geen juist-voldoende antwoord is op* Q*;*

(2) $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A \equiv \Box(B_1 \vee \ldots \vee B_k)$*, waarbij* $k \geqslant 2$ *en* $\Box B_1, \ldots, \Box B_k$ *een aantal, maar niet alle, directe antwoorden zijn van* Q*.*

Uit deze definitie volgt dat vragen met exact twee directe antwoorden — zoals in Wiśniewski's theorie— geen W-partiële antwoorden kunnen hebben. Deze vragen hebben uiteraard wel B-partiële antwoorden. Er kan gemakkelijk worden aangetoond dat alle W-partiële antwoorden op een vraag Q B-partiële antwoorden zijn van Q (maar vanzelfsprekend niet omgekeerd).

Een eliminerend antwoord op een vraag kan als volgt worden bepaald: [11]

Definitie 58. $\Box A$ $(A \in \mathcal{F})$ *is een* eliminerend antwoord *op een vraag* Q *alss* $\Box A \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B$*, waarbij* $\Box B$ *een direct antwoord is van de vraag* Q*.*

Zo zijn $\Box(\neg p \wedge \neg q)$ en $\Box\neg t$ eliminerende antwoorden op de vraag $?\{p, q, r, t\}$; $\Box(\neg Pa \wedge Qc)$ en $\Box\neg(Pa \vee Pb)$ zijn eliminerende antwoorden op de vraag $(?x)Px$. [12]

10. Deze definitie is gebaseerd op Wiśniewski's definitie van een partieel antwoord (zie bijv. [Wiś95, pp. 114–115]). De notie "partieel antwoord" neemt een belangrijke plaats in in Wiśniewski's theorie. Een waar partieel antwoord op een vraag Q garandeert dat een waar direct antwoord van Q kan gelokaliseerd worden binnen een echte deelverzameling van dQ. Deze eigenschap van een partieel antwoord lijkt sterk op een van de voorwaarden die moeten vervuld zijn om, in Wiśniewski's theorie, te kunnen spreken van erotetische implicatie. Voor een compacte logica kan erotetische implicatie bij Wiśniewski dan ook bepaald worden aan de hand van afleidbaarheid van partiële en/of directe antwoorden (zie [Wiś95, p. 182]).

11. Onze definitie van een *eliminerend antwoord* leunt nauw aan bij die van Belnap ([BS76, p. 126]) en Manor ([Man82]). Voor zover ik weet wordt deze notie niet door Wiśniewski bepaald.

12. Eventueel kan deze definitie vervangen worden door een definitie die een veel kleinere verzameling van eliminerende antwoorden bepaalt: $\Box A$ $(A \in \mathcal{F})$ is een *juist-eliminerend antwoord* op een vraag Q alss $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A \equiv \Box\neg B$, waarbij $\Box B$ een direct antwoord is van de vraag Q.

Tot slot kunnen we ook de notie *corrigerend antwoord* op een vraag definiëren: [13]

Definitie 59. *$\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$) is een* corrigerend antwoord *op een vraag Q alss $\vdash_{\mathbf{V}} \Box A \equiv \rho(Q)$.*

Een corrigerend antwoord sluit uit dat de presuppositie van een vraag Q het geval is, en zorgt ervoor dat de vraag Q als opgelost beschouwd kan worden. Een veilige [14] vraag heeft uiteraard geen ware corrigerende antwoorden.

In navolging van Belnap ([BS76, p. 130]) kunnen we stellen dat alle formules $\Box A$ ($A \in \mathcal{F}$) die in een van de bovengenoemde relaties [15] staan tot een vraag Q *erotetisch relevant* zijn met betrekking tot de vraag Q. We komen hier later nog op terug.

Om een aantal (logische) relaties tussen een vraag Q_1, een verzameling premissen Γ, en een of meerdere vragen $Q_2, \ldots, Q_m$ te kunnen vastleggen, voeren we een aantal nieuwe afkortingen in. Zij $\Delta_p^Q = \{\Box B_1, \ldots, \Box B_n\}$, een verzameling van (een aantal) *W-partiële antwoorden* van Q. $Dab(\Delta_p^Q)$ is een afkorting voor $\Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_n$; $A \vee Dab(\varnothing)$ komt neer op A. Zij $\Delta_e^Q = \{\Box B_1, \ldots, \Box B_n\}$, een verzameling van (een aantal) *eliminerende antwoorden* van Q. $Dab(\Delta_e^Q)$ is een afkorting voor $\Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_n$; $A \vee Dab(\varnothing)$ komt neer op A.

Nu kunnen we bepalen wanneer een vraag Q_1, op basis van een verzameling premissen Γ en de logica $\mathbf{V}$, een vraag Q_2 *impliceert*:

Definitie 60. *Een vraag Q_1* impliceert, *op basis van een verzameling premissen Γ en de logica $\mathbf{V}$, de vraag Q_2 alss*

(1) *er een (mogelijk lege) verzameling van W-partiële antwoorden op Q_1, $\Delta_p^{Q_1}$, bestaat zodanig dat:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1});$$

of

13. Deze definitie is gebaseerd op die van Belnap ([BS76, p. 129]) en Manor (in [Man82]).
14. Een vraag Q is veilig alss $\vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q)$.
15. Dus $\Box A$ is een B-partieel antwoord, of een W-partieel antwoord (deze mogelijkheid zit al in de eerste vervat), of een eliminerend antwoord of een corrigerend antwoord van Q.

(2) *er bestaat een (mogelijk lege) verzameling van W-partiële antwoorden op* Q_1*,* $\Delta_p^{Q_1}$*, en er bestaat een (niet-lege) verzameling van eliminerende antwoorden van* Q_1*,* $\Delta_e^{Q_1}$*, zodanig dat:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1) \wedge [(Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1}) \vee Dab(\Delta_e^{Q_1})].$$

De tweede mogelijkheid (waarvoor geldt $\Delta_e^{Q_1} \neq \varnothing$ en $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1)$) is enkel van belang voor het geval dat Q_1 een vraag is van de tweede soort. Immers, als Q_1 een vraag is van de eerste soort, dan is het tweede geval herleidbaar tot het eerste: uit $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1)$ en een eliminerend antwoord van Q_1 (hier dus een vraag van de eerste soort), is steeds hetzij een direct antwoord van Q_1 afleidbaar (als Q_1 slechts twee directe antwoorden heeft), hetzij een W-partieel antwoord op Q_1 afleidbaar (als Q_1 meer dan twee directe antwoorden heeft).

Merk op dat als Q_1 een vraag is met slechts twee directe antwoorden (en dus zeker een vraag is van de eerste soort), en als we weten dat Q_1 op basis van Γ de vraag Q_2 impliceert, dit steeds betekent dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$. De reden hiervoor is eenvoudig: vragen met slechts twee directe antwoorden hebben geen W-partiële antwoorden. Dit betekent dat, als Q_2 is opgelost, ook steeds Q_1 is opgelost.

Omdat deze definitie goed illustreert hoe de logica $\mathbf{V}$ werkt, en dit het volgen van de meta-bewijzen (hopelijk) makkelijker zal maken, zullen we nu uitgebreid ingaan op definitie 60, en hoe ze dient begrepen te worden. Als de vraag Q_2 opgelost is (i.e. als we $\Box A$ bekomen, waarbij $\Box A$ hetzij een direct antwoord is van Q_2, hetzij de onderdrukker van Q_2), dan

(1) lost $\Gamma \cup \{\Box A\}$ de vraag Q_1 op (omdat een direct antwoord van Q_1 of de onderdrukker van Q_1 afleidbaar is uit $\Gamma \cup \{\Box A\}$), ofwel

(2) maakt $\Gamma \cup \{\Box A\}$ de "logische ruimte" waarin een oplossing van de vraag Q_1 te vinden is, kleiner dan de "logische ruimte" waarin volgens Γ een oplossing van Q_1 te vinden is.

Deze kleinere "logische ruimte" moet als volgt begrepen worden: uit $\Gamma \cup \{\Box A\}$ is ofwel een partieel antwoord van Q_1 afleidbaar, ofwel is een eliminerend antwoord van Q_1 afleidbaar (samen met de proactieve presuppositie $\pi(Q_1)$). Een partieel antwoord op Q_1 stelt ons steeds in staat een vraag Q_3 af te leiden, waarvoor geldt dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_3)$ (de vraag Q_3 kan dus niet onderdrukt worden, gegeven $\Gamma \cup \{\Box A\}$), en waarvoor geldt dat $dQ_3 \subset dQ_1$. Dit betekent dat, als een direct antwoord op Q_3 kan worden bekomen (dit hangt, zoals steeds, vooral van pragmatische factoren af), dan zal meteen ook Q_1 opgelost zijn. Als een eliminerend antwoord van Q_1 afleidbaar is uit $\Gamma \cup \{\Box A\}$, dan weten we, aangezien $\pi(Q_1)$ afleidbaar is, dat, *als* Q_1 een *waar* direct antwoord heeft, dit direct antwoord een element is van een *echte* deelverzameling van Q_1. [16]

We proberen bovenstaande uitleg helder te krijgen. Veronderstel eerst dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$: de vraag Q_1 impliceert op basis van de verzameling premissen Γ de vraag Q_2. Op basis van deze informatie kunnen we beslissen om de vraag Q_2 effectief te stellen, aan een of andere betrouwbaar geachte bron. Het doel van het stellen van deze vraag is om – uiteindelijk – de vraag Q_1 op te lossen (het oplossen van Q_1 is immers wat ons interesseert). Veronderstel dat we $\Box A$ als antwoord terugkrijgen en dat $\Box A$ de vraag Q_2 oplost: hetzij omdat $\Box A$ de onderdrukker is van Q_2, $\rho(Q_2)$, hetzij omdat $\Box A$ een (waar) direct antwoord van Q_2 is. In beide gevallen geldt dat $\Box A \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_2$. Als we $\Box A$ aan onze premissen Γ toevoegen, dan verkrijgen we via enkele eenvoudige logische operaties dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1 \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$. Zij $Dab(\Delta_p^{Q_1})$ gelijk aan $\Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_k$ ($k \geqslant 0$), waarbij $\Box B_1, \ldots, \Box B_k$ W-partiële antwoorden zijn van Q_1. Aangezien $\vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1 \equiv (\rho(Q_1) \vee \mu(Q_1))$, bekomen we dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1) \vee \mu(Q_1) \vee \Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_k$. Met het toepassen van de uitgebreide disjunctie- en existentie-regel weten we dat een van de vier gevallen zich moet voordoen:

(1) $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1)$: in dit geval is Q_1 opgelost, want onderdrukt.

(2) $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$: in dit geval is Q_1 een vraag van de eerste soort. Er is een direct antwoord $\Box A_i$ van Q_1 afleidbaar, en Q_1 wordt dus opgelost door $\Gamma \cup \{\Box A\}$.

16. Een eliminerend antwoord van Q_1, bijv. $\Box\neg A_i$, sluit uit dat een van de directe antwoorden van Q_1, in dit geval dus $\Box A_i$, waar is. Zij $\Sigma = dQ_1 \setminus \{\Box A_i\}$, een echte deelverzameling van dQ_1. Als Q_1 (minstens) een waar direct antwoord heeft, i.e. als (minstens) een element van dQ_1 waar is, dan is ook (minstens) een element van Σ, een *echte* deelverzameling van dQ_1 waar. Dat Q_1 een waar direct antwoord heeft, is, ondanks het afleidbaar zijn van $\pi(Q_1)$, niet zeker. De proactieve presuppositie garandeert enkel dat de onderdrukker van Q_1 vals is, en dus niet dat Q_1 een waar direct antwoord heeft. Bovendien werken we niet met ω-volledige modellen. Het is dus mogelijk dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box(\exists x)Px$, maar dat $\Box Pc$ voor geen enkele constante c waar is, en dat bijgevolg geen enkel direct antwoord van $(?x)Px$ waar is.

(3) $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\Box A(x_1,\ldots,x_n)$: in dit geval is Q_1 een vraag van de tweede soort. Met de uitgebreide existentie-regel volgt dat, voor een of ander n-tupel constanten $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$, $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A(x_1/c_1,\ldots,x_n/c_n)$. Bijgevolg is een direct antwoord van Q_1 afleidbaar uit $\Gamma \cup \{\Box A\}$, en wordt Q_1 dus opgelost.

(4) $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box B_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$: $\Box B_j$ is een W-partieel antwoord van Q_1, en dit is onvoldoende om Q_1 op te lossen. Aangezien $\Box B_j$ een partieel antwoord is van Q_1 weten we dat $\Box B_j \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1)$, en dus dat Q_1 niet onderdrukt wordt door $\Gamma \cup \{\Box A\}$. Zij $\Box B_j$ gelijk aan $\Box(C_1 \vee \ldots \vee C_i)$, waarbij $2 \leqslant i$ en $\{\Box C_1,\ldots,\Box C_i\} \subset dQ_1$ (dit volgt uit de definitie van een W-partieel antwoord). Zij $Q_3 = ?\{C_1,\ldots,C_i\}$. Uit $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box B_j$ volgt dan dat, als we ervan uitgaan dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1$ (dit wil zeggen, we gaan ervan uit dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \nvdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$), [17] dan $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{VA}} \pi(Q_3) \wedge Q_3$. Dus in dit geval wordt de vraag Q_3 geëvoceerd door $\Gamma \cup \{\Box A\}$. Als de vraag Q_3 opgelost wordt, dan zal ook Q_1 opgelost zijn.

Veronderstel nu dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1) \wedge [(Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1}) \vee Dab(\Delta_e^{Q_1})]$, waarbij $\Delta_e^{Q_1}$ een niet-lege verzameling van eliminerende antwoorden van Q_1 is. We bekijken enkel het geval waar Q_1 een vraag is van de tweede soort. Dan bekomen we, via eenzelfde redenering als hierboven, een aantal mogelijkheden. De enige nieuwe mogelijkheid is dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1) \wedge Dab(\Delta_e^{Q_1})$ het geval is. Hieruit volgt, via distributiviteit en de uitgebreide disjunctie- en existentie-regel, dat $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \pi(Q_1) \wedge \Box D$, voor een of ander eliminerend antwoord $D \in \Delta_e^{Q_1}$.

Zij $Q_1 = (?x_1)\ldots(?x_n)A(x_1,\ldots,x_n)$, en het eliminerend antwoord $\Box D$ zodanig dat $\Box D \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg A(x_1/c_1,\ldots,x_n/c_n)$. Dan volgt dat

$$\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} (\Box(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)A(x_1,\ldots,x_n)) \wedge \Box\neg A(x_1/c_1,\ldots,x_n/c_n).$$

Dan wordt de vraag

$$Q_3 = (?x_1)\ldots(?x_n)(x_1 \neq c_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq c_n \wedge A(x_1,\ldots,x_n))$$

geëvoceerd door $\Gamma \cup \{\Box A\}$. Als Q_3 opgelost wordt (dus, als we een direct antwoord van Q_3 bekomen), dan zal ook Q_1 opgelost zijn. Als Q_1 een *waar*

17. Als deze veronderstelling niet geldt, namelijk als $\Gamma \cup \{\Box A\} \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$, dan is Q_1 sowieso opgelost. Dan impliceerde de vraag Q_1 de vraag Q_2 om triviale redenen (Q_1 was immers reeds opgelost, en $\neg Q_1$ was afleidbaar uit Γ en dus ook $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$). We komen hier verder nog op terug.

direct antwoord heeft, dan is het een element van een echte deelverzameling van dQ_1, namelijk een element van $dQ_1 \setminus \{\Box A(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n)\}$.

Hieronder geven we een aantal voorbeelden van implicatie van een vraag door een andere vraag op basis van Γ. Lijnen die voorafgegaan worden door een '*' zijn wel degelijk stellingen van **V**, maar zijn *geen* voorbeelden van implicatie zoals bepaald door definitie 60 (p. 127). [18]

(1) $\Box(p \vee q \vee r) \vdash_{\mathbf{V}} (?\{p, q, r\} \supset ?\{p, \neg p\}) \vee (\Box\neg p \wedge \Box(p \vee q \vee r))$

(2) $\vdash_{\mathbf{V}} ?[p] \supset ?[p; q]$

(3) $\vdash_{\mathbf{V}} (?[p; q] \supset ?[p]) \vee \Box((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee \Box((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

(4) $\vdash_{\mathbf{V}} ?[p \wedge q] \supset ?[p; q]$

(5) $\Box(\exists x)Px \vdash_{\mathbf{V}} ((?x)Px \supset ?\{Pa, \neg Pa\} \vee \Box\neg Pa) \wedge \Box(\exists x)Px$

*(6) $\vdash_{\mathbf{V}} ((?x)Px \supset ?\{Pa, Pb\}) \vee \Box\neg(Pa \vee Pb)$

(7) $\Box(\exists x)Px \vdash_{\mathbf{V}} [((?x)Px \supset ?\{Pa, Pb\}) \vee (\Box\neg(Pa \vee Pb))] \wedge \Box(\exists x)Px$

*(8) $\vdash_{\mathbf{V}} (?[p \wedge q] \supset ?[p]) \vee \Box p$

(9) $\vdash_{\mathbf{V}} ?[p; q] \supset (?[p] \vee ?[q])$

Uit (6) kan niet besloten worden dat $?\{Pa, Pb\}$ geïmpliceerd wordt door $(?x)Px$. Hoewel $\Box\neg(Pa \vee Pb)$ een eliminerend antwoord is van $(?x)Px$, wordt de verzameling directe antwoorden van $(?x)Px$ niet ingeperkt (omdat de presuppositie $\Box(\exists x)Px$ niet afleidbaar is). Dit betekent echter helemaal niet dat $?\{Pa, Pb\}$ niet nuttig zou kunnen zijn voor het oplossen van $(?x)Px$. Vooreerst is elk direct antwoord op $?\{Pa, Pb\}$ een direct antwoord op $(?x)Px$. Het is ook mogelijk dat $?\{Pa, Pb\}$ onderdrukt wordt (we krijgen $\Box(\neg Pa \wedge \neg Pb)$ als antwoord terug). Ook dat antwoord is nuttig (weliswaar in mindere mate) voor het oplossen van $(?x)Px$. Uit $(?x)Px \vee \Box\neg(\exists x)Px \vee (\exists x)\Box Px$ en $\Box(\neg Pa \wedge \neg Pb)$ kan in **V** immers afgeleid worden dat $(?x)Px \vee \Box\neg(\exists x)Px \vee (\exists x)\Box(Px \wedge (x \neq a) \wedge (x \neq b))$. In **VA** kan dan afgeleid worden dat $(?x)Px$, op de voorwaarde $\{\Box\neg(\exists x)Px, (\exists x)\Box(Px \wedge (x \neq a) \wedge (x \neq b))\}$. Intuïtief (maar niet

18. Zoals reeds vermeld, is $?[p]$ een afkorting voor $?\{p, \neg p\}$, en $?[p; q]$ een afkorting voor $?\{p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$.

helemaal correct) kunnen we besluiten dat de verzameling oplossingen (de verzameling van abnormaliteiten die de vraag kan oplossen) kleiner is geworden: $\Box(Pa \wedge (a \neq a) \wedge (a \neq b))$ en $\Box(Pb \wedge (b \neq a) \wedge (b \neq b))$ zijn immers nooit **V**-afleidbaar uit een consistente Γ, want contradictorisch. Uit $\Box(\neg Pa \wedge \neg Pb)$ is, mits enig rekenwerk, **V**-afleidbaar dat $(?x)Px \supset (?x)(Px \wedge x \neq a \wedge x \neq b)$, zodat we in plaats van (6) ook kunnen afleiden dat:

$$\vdash_{\mathbf{V}} (?x)Px \supset (?\{Pa, Pb\} \vee (?x)(Px \wedge x \neq a \wedge \neq b)).$$

De vraag $(?x)Px$ is dus herleidbaar tot de vragen $?\{Pa, Pb\}$ en $(?x)(Px \wedge x \neq a \wedge \neq b))$. Aan herleidbaarheid van een vraag tot een verzameling vragen wordt verderop nog enige aandacht besteed. Op basis van de premisse $\Box(\exists x)Px$, de proactieve presuppositie van $(?x)Px$, kan wel worden besloten dat $(?x)Px$ de vraag $?\{Pa, Pb\}$ impliceert (zie (7)).

(8) is geen voorbeeld van erotetische implicatie omdat $\Box p$ geen W-partieel antwoord is van $?[p \wedge q]$, noch een eliminerend antwoord ervan. Intuïtief lijkt de vraag $?\{p, \neg p\}$ nochtans relevant te zijn voor (het oplossen van) de vraag $?\{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$, maar door de strenge bepaling van W-partiële antwoorden wordt de vraag niet geïmpliceerd. In hoofdstuk 2 hebben we getoond dat ook Wiśniewski's erotetische implicatie aan dit euvel lijdt. Mochten we in de definitie van implicatie (def. 60, p. 127) de notie B-partieel antwoord gebruiken, zou de vraag wel geïmpliceerd worden. We komen hier verder nog op terug.

(9) illustreert dat de kunstgrepen [19] van Wiśniewksi in **V** (en **VA**) niet nodig zullen zijn, dankzij het feit dat we verschillende afgeleide vragen logisch kunnen combineren. (9) illustreert een belangrijke eigenschap van de vraaglogica's **V** en **VA**: als we uit een consistente verzameling premissen Γ (onvoorwaardelijk) kunnen afleiden dat $Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_n)$, dan garandeert deze formule dat het oplossen van de vragen Q_2 tot en met Q_n steeds voldoende is om, met behulp van Γ, de vraag Q_1 op te lossen.

Eigenschap 19. *Als $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_n)$, dan is het zeker dat, als (of nadat) de vragen Q_2 tot en met Q_n zijn opgelost, ook Q_1 kan opgelost worden op basis van Γ.*

19. Om een aantal nuttige vragen toch uit een hoofdvraag te kunnen afleiden, laat Wiśniewski in zijn erotetische zoekscenario's toe dat de niet-transitieve erotetische implicatie toch transitief gebruikt mag worden, waardoor volkomen irrelevante vragen kunnen worden afgeleid (zie hoofdstuk 2).

Als blijkt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_n)$ betekent dit natuurlijk niet dat alle vragen Q_2 tot en met Q_n moeten zijn opgelost, vooraleer Q_1 kan opgelost worden. Het oplossen van, pakweg, vraag Q_4 kan in sommige gevallen volstaan.

Inzake bovenstaande eigenschap moeten twee bemerkingen worden gemaakt. Vooreerst is het mogelijk dat $Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_n)$ **V**-afleidbaar is uit Γ, enkel omdat $\neg Q_1$ afleidbaar is uit Γ (de vraag Q_1 wordt reeds opgelost door Γ), waardoor de implicatie onmiddellijk volgt. Dit is een eigenschap die we liever zouden vermijden, en daarom wordt verder in de tekst een implicatie gedefinieerd die deze eigenschap niet heeft. Dit heeft natuurlijk als gevolg dat erotetische implicatie dan een *niet-monotone* notie wordt. [20] We hebben reeds opgemerkt dat ook Wiśniewski's erotetische implicatie deze eigenschap heeft. [21] Wiśniewski's erotetische implicatie is dan ook monotoon: als $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$, dan geldt voor alle Θ', waarbij $\Theta \subseteq \Theta'$, dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta', Q_2)$.

Een tweede bemerking betreft het 'toevoegen' van irrelevante vragen. Stel bijv. dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$, en dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$. Dan kan gemakkelijk worden afgeleid dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset (Q_2 \vee Q_3)$, waarbij Q_3 volkomen irrelevant is voor het oplossen van Q_1. Het stellen van de vraag Q_3 is in dit geval overbodig. Om dit te vermijden zullen we moeten werken met de logica **VA**. Merk toch op dat hier sprake is van een ander soort irrelevantie dan bij Wiśniewksi's erotetische implicatie.

Door definitie 60 (p. 127) worden een aantal vragen geïmpliceerd die niet geïmpliceerd worden door Wiśniewski's definitie van erotetische implicatie. Dit komt omdat Wiśniewski eist dat, als de implicerende vraag een waar direct antwoord heeft, dan ook de geïmpliceerde vraag gegarandeerd een waar direct antwoord heeft. In definitie 60 wordt dit niet geëist, en kan de vaststelling dat Q_2 geen waar direct antwoord heeft (en dus onderdrukt wordt), gebruikt worden om de vraag Q_1 op te lossen. We illustreren dit

20. In de procedure voor probleemoplossing (zie [Bat03b]) is de relatie tussen het hoofdprobleem en de, op basis van de premissen, daaruit afgeleide problemen, in zekere zin ook niet-monotoon (hoewel er geen sprake is van een logica in de klassieke zin). Het oplossen van het hoofdprobleem zorgt er voor dat de procedure stopt, en dat alle eerder afgeleide problemen vervallen.

21. Als $Q_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$ en $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dan $Im(Q_1, \Gamma, Q_2)$, waarbij Q_2 om het even welke ja-nee-vraag is, bijv. $?\{B, \neg B\}$, en bij uitbreiding om het even welke vraag Q_2 die, gegeven Γ, gegrond is.

even met een voorbeeld, waarbij

$$\Gamma = \{\Box(q \supset p)\} \cup \{\Box?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p\}.$$

1	$\Box(q \supset p)$	-	Prem-d	$\varnothing$
2	$\Box?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg p$	-	Prem-e	$\varnothing$
3	$?\{p, \neg p\} \vee \Box p \vee \Box\neg q$	1, 2	RU	$\varnothing$
4	$?\{\neg p, q\} \vee \Box\neg(\neg p \vee q) \vee \Box\neg p \vee \Box q$	-	RU	$\varnothing$
5	$?\{\neg p, q\} \vee \Box(p \wedge \neg q) \vee \Box\neg p \vee \Box q$	4	RU	$\varnothing$
6	$?\{\neg p, q\} \vee (\Box p \wedge \Box\neg q) \vee \Box\neg p \vee \Box q$	5	RU	$\varnothing$
7	$?\{\neg p, q\} \vee \Box p \vee \Box\neg p \vee \Box q$	6	RU	$\varnothing$
8	$?\{\neg p, q\} \vee \Box p \vee \Box\neg p \vee \Box p$	1, 7	RU	$\varnothing$
9	$?\{\neg p, q\} \vee \neg?\{p, \neg p\}$	8	RU	$\varnothing$
10	$?\{p, \neg p\} \supset ?\{\neg p, q\}$	9	RU	$\varnothing$
11	$?\{q, \neg q\} \vee \Box q \vee \Box\neg q$	-	RU	$\varnothing$
12	$?\{q, \neg q\} \vee \Box p \vee \Box\neg q$	1, 11	RU	$\varnothing$
13	$(?\{q, \neg q\} \vee \neg?\{p, \neg p\}) \vee \Box\neg q$	12	RU	$\varnothing$
14	$(?\{p, \neg p\} \supset ?\{q, \neg q\}) \vee \Box\neg q$	13	RU	$\varnothing$

Lijn 10 kan als volgt geïnterpreteerd worden: als de vraag $?\{\neg p, q\}$ opgelost is, dus als we bekomen hebben dat $\Box A$, waarbij $\Box A$ gelijk is aan $\Box\neg(\neg p \vee q)$, of aan $\Box\neg p$ of aan $\Box q$, dan wordt ook de vraag $?\{p, \neg p\}$ opgelost door $\Gamma \cup \{\Box A\}$.

Merk op dat, in de vraaglogica van Wiśniewski, de vraag $?\{\neg p, q\}$ niet geïmpliceerd wordt door $?\{p, \neg p\}$ en $\Theta = \{q \supset p\}$. De reden hiervoor is dat niet gegarandeerd is dat $?\{\neg p, q\}$ een waar direct antwoord heeft als $?\{p, \neg p\}$ een waar direct antwoord heeft en de premisse $q \supset p$ waar is. Ook in onze benadering is niet gegarandeerd dat $?\{\neg p, q\}$ een waar direct antwoord heeft, maar in dat geval is uit de onderdrukker $\Box\neg(\neg p \vee q)$ van $?\{\neg p, q\}$ afleidbaar dat $\Box p$.

We willen nogmaals benadrukken dat, als we beslissen om een vraag als $?\{\neg p, q\}$ effectief te stellen, we dan niet zeker zijn dat we steeds een antwoord (hetzij een direct antwoord, hetzij de onderdrukker van de vraag) zullen bekomen. Dit hangt af van andere factoren, waarop de vraagsteller doorgaans weinig invloed kan uitoefenen. Als we, zoals wordt voorgesteld in [Bat03b], werken met een verzameling vragen waarop steeds een oplossing wordt bekomen (omdat ze te beantwoorden zijn met "standaardmiddelen"), dan kan die garantie wel ingebouwd worden. We komen hier onmiddellijk op terug.

Merk verder op dat $?\{q, \neg q\}$, op basis van Γ, niet geïmpliceerd wordt door $?\{p, \neg p\}$ (lijn 14 is het beste wat we kunnen bekomen). Dit heeft opnieuw te maken met de strenge bepaling van erotetische implicatie: elk direct antwoord op een geïmpliceerde vraag moet 'cognitief nuttig' zijn voor het oplossen van de implicerende vraag (en $\Box\neg q$ is, naar analogie met de bepalingen van Wiśniewski, niet cognitief nuttig).

Men kan echter ook stellen dat $\Box\neg q$ wel degelijk nuttig is voor het beantwoorden van $?\{p, \neg p\}$ op basis van de premisse $\Box(q \supset p)$: het wijst er namelijk op dat de vraag $?\{p, \neg p\}$ niet zal kunnen beantwoord worden door een beroep te doen op de premisse $\Box(q \supset p)$, en dus dat de vraag $?\{p, \neg p\}$ op een andere manier zal moeten worden opgelost. Dit is de weg die gevolgd wordt in de probleemoplossingsprocedure van [Bat03b] en [Bat04a]. [22]

We geven ook een voorbeeld met een vraag van de tweede soort:

$$\Box(\exists x)Px \vdash_{\mathbf{V}} [((?x)Px \supset ?\{Pa, Pb\}) \vee \Box\neg Pa] \wedge \Box(\exists x)Px.$$

In Wiśniewski's theorie geldt niet dat $\mathbf{Im}((?x)Px, \{(\exists x)Px\}, ?\{Pa, Pb\})$. Dit is om dezelfde reden: een direct antwoord van $(?x)Px$ garandeert niet dat de vraag $?\{Pa, Pb\}$ een waar direct antwoord heeft.

Naar ons gevoel hecht Wiśniewski in zijn theorie (en in de bepaling van

22. Voorlopig is de procedure enkel bepaald voor ja-nee vragen (dus geen echte alternatief-vragen en ook geen vragen van de tweede soort), maar quasi elke week worden nieuwe resultaten voorgesteld (te volgen op http://logica.ugent.be/dirk/francqui.html).

allerhande erotetische concepten) overmatig veel belang aan het gegrond zijn van een vraag (de garantie dat een vraag, gegeven de premissen, een waar direct antwoord heeft). Vanuit pragmatisch oogpunt (bijv. voor het oplossen van een probleem, in een wetenschappelijke of alledaagse context) hebben we weinig aan de garantie dat een vraag een waar direct antwoord heeft, als we om principiële of praktische redenen niet kunnen uitmaken *welk* direct antwoord op de vraag waar is. Het is immers niet omdat we weten dat een vraag een waar direct antwoord heeft, dat we ook een waar direct antwoord op die vraag kunnen bekomen (en dus weten welk direct antwoord van de vraag waar is – natuurlijk kunnen ook meerdere directe antwoorden van de vraag waar zijn). In Wiśniewski's theorie is een ja-nee vraag $?\{A, \neg A\}$ steeds gegrond (ofwel is A waar, ofwel is $\neg A$ waar). Stel dat A staat voor "$(\exists x)(\forall y)Pxy$ is **CL**-afleidbaar uit Γ". Ook al bestaat er een positieve test voor **CL**-afleidbaarheid, dan nog is het goed mogelijk dat we tegen het eind van ons leven nog steeds geen antwoord hebben op de vraag $?\{A, \neg A\}$. Ook voor vragen waarop door het uitvoeren van een test, of het doorlopen van een algoritme steeds een waar direct antwoord kan worden bekomen, kan — zowel in de wetenschappelijke praktijk als de praktijk van alledag — vaak toch geen waar direct antwoord worden bekomen (wegens gebrek aan tijd en middelen). In die zin lijkt het belang dat Wiśniewski aan het gegrond zijn van een vraag hecht, me enigszins overdreven. Bovendien kan de informatie (de verzameling premissen) waarop we ons baseren om vragen te stellen, of vragen uit andere vragen af te leiden, eenvoudigweg valse premissen bevatten. In dat geval zouden we groot belang hechten aan het gegrond zijn van een vraag, terwijl een aantal presupposities van die vraag feitelijk vals zijn (dit gaat natuurlijk niet op voor ja-nee vragen). Tegelijk kunnen vragen die het vals zijn van een aantal presupposities van de hoofdvraag aan het licht zouden kunnen brengen, niet worden gesteld, precies omdat ze (verkeerdelijk) ingeschat worden als niet gegrond. We komen later nog terug op een aantal 'onhebbelijkheden' van Wiśniewski's erotetische implicatie.

5.3.2. W-implicatie

In deze afdeling gaan we onderzoeken of we definitie 60 (p. 127) niet kunnen aanpassen, teneinde Wiśniewski's notie van erotetische implicatie toch via een **VA**-bewijs te benaderen.

Wiśniewski ([Wiś95, p. 182]) toont aan dat voor een compacte onderliggende logica het volgende geldt: [23]

Theorema 20.
Als (compacte) **CL** *de onderliggende logica is, dan* $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$ *alss*

(1) *voor elke* $A \in dQ_1$*:* $\Theta, A \vdash_{\mathbf{CL}} B_1 \vee \ldots \vee B_k$ *voor een aantal* $B_1, \ldots, B_k \in dQ_2 (k \geqslant 1)$,

(2) *voor elke* $B \in dQ_2$ *bestaat er een* $C \in dQ_1 \cup pQ_1$ *zodanig dat* $\Theta, B \vdash_{\mathbf{CL}} C$.

Voor het benaderen van Wiśniewski's concept van erotetische implicatie met de logica's **V** en **VA**, brengen we enkel vragen van de eerste soort in rekening. De redenen hiervoor worden verderop gegeven. Om Wiśniewski's concept te benaderen, moeten we rekening houden met twee zaken die niet vervat zitten in definitie 60 (p. 127):

(1) er moet geëist worden dat als de proactieve presuppositie $\pi(Q_1)$ van de vraag Q_1 waar is, dan ook de proactieve presuppositie $\pi(Q_2)$ van de vraag Q_2 waar is; en

(2) uit geen enkel direct antwoord van Q_2 mag de onderdrukker $\rho(Q_1)$ van de vraag Q_1 afleidbaar zijn. Beide voorwaarden zullen op objectniveau kunnen worden uitgedrukt.

Definitie 61. *Zij* Γ *een* **V***-consistente verzameling premissen, en* $Q_1 = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ *en* $Q_2 = ?\{B_1, \ldots, B_m\}$ *vragen van de eerste soort. Een vraag* Q_1 W-impliceert *een vraag* Q_2 *op basis van* Γ *alss*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box(\sqrt{\pi(Q_1)} \supset \sqrt{\pi(Q_2)})$;

(2) *voor elke* $\Box B_j \in dQ_2$ *kan aangetoond worden dat:*
$\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)}) \vee \Box\neg B_j$;

(3) *er is een (mogelijk lege)* Δ_p *zodanig dat* $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$.

23. We geven het theorema voor **CL**; de klassieke logica is vanzelfsprekend compact. Met pQ wordt de verzameling van alle partiële antwoorden van de vraag Q bedoeld. Bij Wiśniewski wordt een partieel antwoord van een vraag Q bepaald als een disjunctie van minstens twee, maar niet alle directe antwoorden van Q (vergelijkbaar dus met de notie W-partieel antwoord; de "W" staat er niet toevallig).

Alle voorwaarden kunnen in een **VA**-bewijs uit Γ worden uitgedrukt. Eisen dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A$ komt op hetzelfde neer als eisen dat A onvoorwaardelijk **VA**-afleidbaar is uit Γ. De tweede voorwaarde valt uiteen in een *eindig* aantal voorwaarden (omdat Q_2 een vraag is van de eerste soort, en dus een eindig aantal directe antwoorden heeft).

De aanwezigheid van het tweede disjunct ($\Box\neg B_j$) in voorwaarde (2) heeft te maken met het feit dat, als $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B_j$, dan geldt dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)})$, omdat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)})$. Aangezien $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B_j$ is $\Gamma \cup \{\Box B_j\}$ **V**-inconsistent, en dus is om het even welke formule afleidbaar uit $\Gamma \cup \{\Box B_j\}$, dus geldt dat ook $\Gamma \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_1$. Dit alles wordt duidelijk in het bewijs van het onderstaande theorema.

We zullen nu aantonen dat, voor een consistente verzameling premissen Θ, en vragen van de eerste soort Q_1 en Q_2, Wiśniewski's erotetische implicatie samenvalt met W-implicatie zoals bepaald in definitie 61 (p. 137):

Theorema 21. *Zij $\Theta^\Box$ een* **V***-consistente verzameling premissen, en $Q_1 = ?\{A_1, \ldots, A_n\}$ en $Q_2 = ?\{B_1, \ldots, B_m\}$ vragen van de eerste soort.*

Dan geldt dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$ *alss Q_1, op basis van $\Theta^\Box$, W-impliceert dat Q_2.*

BEWIJS. — Er geldt dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$ alss

(1) voor elke $A \in dQ_1$: $\Theta, A \vdash_{\mathbf{CL}} B_1 \vee \ldots \vee B_k$ voor een aantal $B_1, \ldots, B_k \in dQ_2 (k \geqslant 1)$,

(2) voor elke $B \in dQ_2$ bestaat er een $C \in dQ_1 \cup pQ_1$ zodanig dat $\Theta, B \vdash_{\mathbf{CL}} C$.

Er geldt ook dat Q_1 W-impliceert Q_2 op basis van $\Theta^\Box$ alss

(3) $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(\sqrt{\pi(Q_1)} \supset \sqrt{\pi(Q_2)})$;

(4) voor elke $\Box B_j \in dQ_2$ kan aangetoond worden dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)}) \vee \Box\neg B_j$;

(5) er is een (mogelijk lege) Δ_p zodanig dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$.

De links-rechts richting. We veronderstellen dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$. Dan volgt uit (1) dat, voor elke $A_i \in dQ_1$, $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} A_i \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$.

Bijgevolg geldt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$. En dus volgt met theorema 6 (p. 91) dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(\sqrt{\pi(Q_1)} \supset \sqrt{\pi(Q_2)})$. Hieruit volgt ook, via de eigenschappen van $\mathbf{V}$, dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_2) \supset \rho(Q_1)$ (omdat $\rho(Q_2)$ en $\rho(Q_1)$ gelijk zijn aan respectievelijk $\Box\neg\sqrt{\pi(Q_2)}$ en $\Box\neg\sqrt{\pi(Q_1)}$), wat we onmiddellijk zullen nodig hebben.

Uit (2) volgt dat er voor elke $B_j \in dQ_2$ een $C \in dQ_1 \cup pQ_1$ bestaat zodanig dat $\Theta, B_j \vdash_{\mathbf{CL}} C$. Hieruit kunnen we, via theorema 6 (p. 91) en de overeenkomsten tussen een vraag en haar directe en partiële antwoorden in de twee systemen, afleiden dat er, voor elke $\Box B_j \in dQ_2$ (waarbij Q_2 de overeenkomstige vraag in $\mathbf{V}$ is), een $\Box C$ bestaat, waarbij $\Box C$ een direct of een W-partieel antwoord is van Q_1, zodanig dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset C)$. Aangezien $Q_2 \vee \neg Q_2$ een stelling is van $\mathbf{V}$, volgt er dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} Q_2 \vee \rho(Q_2) \vee \mu(Q_2)$. Omdat Q_2 een vraag is van de eerste soort, is $\mu(Q_2)$ de disjunctie van alle directe antwoorden van Q_2, en dus volgt er dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} Q_2 \vee \rho(Q_2) \vee \Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_m$. Hieruit volgt, wegens $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_2) \supset \rho(Q_1)$, dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} Q_2 \vee \rho(Q_1) \vee \Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_m$. Aangezien $\vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1) \supset \neg Q_1$, kunnen we afleiden dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee \Box B_1 \vee \ldots \vee \Box B_m$. Dan volgt er, omdat er voor elke $\Box B_j \in dQ_2$ een specifieke $\Box C_j$ bestaat zodanig dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset C_j)$, dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee \Box C_1 \vee \ldots \vee \Box C_m$, waarbij elke $\Box C_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ een direct of W-partieel antwoord is van Q_1. Voor elk disjunct $\Box C_j$, als $\Box C_j$ een direct antwoord is van Q_1, dan is uit $\Box C_j$ $\mathbf{V}$-afleidbaar dat $\neg Q_1$. De overige disjuncten $\Box C_j$ (mogelijk zijn er geen) zijn W-partiële antwoorden van Q_1, en kunnen gegroepeerd worden als $Dab(\Delta_p^{Q_1})$. Bijgevolg hebben we afgeleid dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$, waarbij $\Delta_p^{Q_1}$ mogelijk leeg is.

Dat ook voorwaarde (4) geldt, kan gemakkelijk worden aangetoond. We tonen het aan voor een willekeurige $\Box B_j \in dQ_2$. In een $\mathbf{VA}$-bewijs uit $\Theta^\Box$ kan steeds een lijn k worden neergeschreven met $\neg\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n))$ als tweede element, en $\{\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n))\}$ als vijfde element. Dan kan hieruit, op de lijn $k+1$, afgeleid worden dat $\neg\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)) \vee \Box\neg B_j$, eveneens op de voorwaarde $\{\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n))\}$. Als lijn k niet gemarkeerd wordt, in geen enkele uitbreiding van het bewijs, dan wordt ook lijn $k+1$ nooit gemarkeerd, en dan geldt dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)) \vee \Box\neg B_j$. Stel dat lijn k toch gemarkeerd zou worden. Dan kan dit alleen omdat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n))$. We weten dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset C_j)$, waarbij $\Box C_j$ een direct of W-partieel antwoord is van Q_1. Bijgevolg geldt dat $\Theta^\Box \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset (A_1 \vee \ldots \vee A_n))$.

Hieruit volgt dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B_j$, en wegens theorema 17 (p. 118), dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} \Box\neg B_j$. Dus bekomen we ook in dit geval dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_n)) \vee \Box\neg B_j$.

De rechts-links richting. Uit (3) volgt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$. Daaruit volgt dat, voor elke $A_i \in dQ_1$: $\Theta, A_i \vdash_{\mathbf{CL}} B_1 \vee \ldots \vee B_m$. Uit (5) volgt, voor elke $\Box B_j \in dQ_2$, dat $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1 \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$ (omwille van $\Box B_j \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_2$). Dan volgt dat $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1) \vee \mu(Q_1) \vee Dab(\Delta_p^{Q_1})$. Via de uitgebreide disjunctie- en existentie-regel bekomen we dan, voor elke $\Box B_j \in dQ_2$, dat: $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1)$ of $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$ ($A_i \in dQ_1$) of $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \Box C_k$ (waarbij C_k een W-partieel antwoord is van Q_1). De enige echte moeilijkheid is de eerste mogelijkheid, namelijk dat $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1)$ het geval is. Als een van de andere mogelijkheden zich voordoet, kan gemakkelijk worden aangetoond, door toepassing van de eigenschap $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} A$ alss $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$, dat steeds volgt dat $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$. We concentreren ons enkel op de eerste mogelijkheid. Uit (4) weten we dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)}) \vee \Box\neg B_j$, voor elke $\Box B_j \in dQ_2$. Veronderstellen we nu dat $\Theta^{\Box} \cup \{\Box B_j\} \vdash_{\mathbf{V}} \rho(Q_1)$, voor een of andere $\Box B_j \in dQ_2$. Dan volgt hieruit dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)})$. Uit $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{VA}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)}) \vee \Box B_j$ volgt dat er een verzameling abnormaliteiten Δ bestaat zodanig dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \neg\Box(B_j \supset \sqrt{\rho(Q_1)}) \vee \Box\neg B_j \vee Dab(\Delta)$ en $Ab(\Gamma) \cap \Delta = \varnothing$. Dan volgt uit beide samen dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B_j \vee Dab(\Delta)$. Aangezien $Ab(\Gamma) \cap \Delta = \varnothing$, volgt met de uitgebreide disjunctie- en existentie-regel dat $\Theta^{\Box} \vdash_{\mathbf{V}} \Box\neg B_j$. Dus kunnen we afleiden dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CL}} \neg B_j$, en dat $\Theta \cup \{B_j\} \vdash_{\mathbf{CL}} C$ (omdat $\Theta \cup \{B_j\}$ inconsistent is). Dus hebben we aangetoond dat, als Q_1 W-impliceert dat Q_2 op basis van $\Theta^{\Box}$, dan $\mathbf{Im}(Q_1, \Theta, Q_2)$. $\Box$

Het is voorlopig een open vraag of bovenstaand theorema kan uitgebreid worden naar het algemene geval waarin Q_1 en Q_2 zowel vragen van de eerste als vragen van de tweede soort kunnen zijn. Ik beschik weliswaar over enkele resultaten die in die richting wijzen, maar er zijn heel wat bijkomende moeilijkheden: welke vragen geïmpliceerd worden op basis van een vraag en een verzameling premissen, hangt in Wiśniewski's theorie sterk af van de onderliggende logica (al dan niet ω-volledig), terwijl dat in mijn systeem niet het geval is. Dat vragen ook kunnen opgelost worden door de onderdrukker ervan te bekomen, is een bijkomende complicatie. Dat de vragen van de tweede soort bovendien een oneindige verzameling van directe antwoorden hebben, maakt de zaken extra moeilijk (er kan wel gewerkt worden met de proactieve presuppositie van een vraag van de tweede soort, maar dit geeft bij Wiśniewski dan weer verschillende resultaten (afhankelijk van het al dan niet werken met ω-volledige modellen). Het verder reconstrueren (dus ook voor vragen van de tweede soort) van Wiśniewski's notie erotetische implicatie, zal — als het al de moeite waard is (zie verder) — later moeten gebeuren.

5.3.3. Een evaluatie van implicatie en W-implicatie

In hoofdstuk 2 hebben we een aantal zwakheden blootgelegd van Wiśniewski's erotetische implicatie. Op basis van theorema 21 (p. 138) is het duidelijk dat W-implicatie dezelfde zwaktes heeft. A fortiori gelden deze ook voor de eerder bepaalde notie implicatie.

1. Als $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$, waarbij $\Box A$ een direct of W-partieel antwoord van Q_1 is, dan impliceert Q_1 op basis van Γ om het even welke vraag Q_2. Als $\Box A$ een direct antwoord is van Q_1, dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$, voor om het even welke Q_2. Als $\Box A$ een W-partieel antwoord is van Q_1, dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} (Q_1 \supset Q_2) \vee \Box A$, voor om het even welke Q_2. De vraag Q_1 W-impliceert elke vraag Q_2 die aan de bijkomende voorwaarden van W-implicatie voldoet. Ook hier is dus het probleem dat een geïmpliceerde vraag Q_2 mogelijk van geen enkel nut is voor het oplossen van Q_1. Als $\Box A$ een direct antwoord is van Q_1, dan is Q_1 opgelost, en is elke geïmpliceerde vraag overbodig (voor het oplossen van Q_1). De echte moeilijkheid doet zich dus voor wanneer $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$ (Q_1 wordt niet opgelost door Γ), en $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box A$, waarbij $\Box A$ een W-partieel antwoord is van Q_1.[24] In de volgende afdeling zullen we een gewijzigde notie van implicatie bepalen, die zal steunen op (een specifieke vorm van) **VA**-afleidbaarheid. Deze nieuwe implicatie is enigszins vergelijkbaar met Wiśniewski's sterke erotetische implicatie.[25]

2. In hoofdstuk 2 hebben we gewezen op het 'vreemde gedrag' van Wiśniewski's erotetische implicatie als de premissen aantonen dat geen enkel direct antwoord op een vraag Q_1 waar is. Er geldt bijv. dat $\mathbf{Im}(?\{p,q\}, \{\neg t, \neg p, \neg q, r\}, ?\{t, \neg r\})$, hoewel de geïmpliceerde vraag $?\{t, \neg r\}$ vanzelf-

24. Neem bijvoorbeeld voor Q_1, Q_2 en Γ respectievelijk $?\{p,q,r\}$, $?\{t,\neg t\}$ en $\{\Box(p \vee q)\}$. Er geldt dat $\{\Box(p \vee q)\} \vdash_{\mathbf{V}} (?\{p,q,r\} \supset ?\{t,\neg t\}) \vee \Box(p \vee q)$, en dus wordt $?\{t,\neg t\}$, op basis van $\{\Box(p \vee q)\}$, geïmpliceerd door $?\{p,q,r\}$.

25. In welke mate ze vergelijkbaar zijn, moet nog verder worden onderzocht.

sprekend van geen enkel nut is voor het beantwoorden van $?\{p, q\}$. [26] Ook de tot nu toe bepaalde implicaties leiden aan dit euvel (dat zeer vergelijkbaar is met (1)). Ook dit zal hierna worden opgelost door te werken met **VA**-afleidbaarheid.

3. We hebben er reeds meermaals op gewezen dat Wiśniewski's erotetische implicatie niet-transitief is. Ook de door definitie 60 (p. 127) bepaalde implicatie is niet transitief. Op basis van de lege verzameling impliceert de vraag $?\{p, \neg p\}$ bijv. de vraag $?[p; q]$, en de vraag $?[p; q]$ impliceert op haar beurt de vraag $?\{q, \neg q\}$, maar deze laatste vraag wordt niet geïmpliceerd door de eerste vraag. Dit is natuurlijk ook terecht: de vraag $?\{q, \neg q\}$ is, gegeven het feit dat er geen premissen zijn (die een logische link tussen beide zouden kunnen leggen), in geen enkel opzicht nuttig voor het oplossen van de vraag $?\{p, \neg p\}$.

Bij praktische toepassingen (bijv. erotetische zoekscenario's in [Wiś03]), waarbij uit een hoofdvraag nuttige vragen worden afgeleid, speelt de (te) strenge definitie van erotetische implicatie Wiśniewski parten. Om uit een hoofdvraag $?\{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ de (intuïtief) zeer relevante vragen $?\{p, \neg p\}$ en $?\{q, \neg q\}$ af te kunnen leiden (deze worden immers niet geïmpliceerd, volgens Wiśniewski's strenge bepaling) stelt hij (in [Wiś03]) de volgende oplossing voor. Elke vraag Q_i die voorkomt in een erotetisch zoekscenario voor de hoofdvraag Q_1, wordt ofwel rechtstreeks door Q_1 geïmpliceerd, ofwel is er een tussenliggende vraag Q_2 zodanig dat Q_2 door Q_1 geïmpliceerd wordt, en Q_2 op haar beurt de vraag Q_i impliceert. In het voorbeeld van hierboven vervult $?[p; q]$ de rol van tussenliggende (geïmpliceerde en implicerende) vraag. Deze constructie heeft een belangrijk nadeel: namelijk dat een volkomen irrelevante vraag Q_i (irrelevant in de zin dat geen enkel direct antwoord van Q_i het vinden van een direct antwoord op de hoofdvraag Q_1 kan vooruithelpen) toch in het erotetisch zoekscenario voor Q_1 kan opduiken. We geven slechts een voorbeeld: de hoofdvraag $?\{p, \neg p\}$ impliceert, op basis van de lege verzameling premissen, de vraag $?[p; q]$, die op haar beurt, op basis van de lege verzameling premissen, de vraag $?\{q, \neg q\}$ impliceert. Nochtans is $?\{q, \neg q\}$ volkomen irrelevant voor het

26. Vanzelfsprekend is uit elk direct antwoord van $?\{t, \neg r\}$ samen met $\{\neg t, \neg p, \neg q, r\}$ een direct antwoord van $?\{p, q\}$ afleidbaar (via Ex Falso Quodlibet), maar het punt is natuurlijk dat de premissen de vraag $?\{p, q\}$ oplossen (in onze terminologie, maar dit kan niet uitgedrukt worden in Wiśniewski's theorie), en dat die vraag dus geen vragen meer hoeft te impliceren.

oplossen van $?\{p, \neg p\}$ (gegeven de lege verzameling premissen). Dit voorbeeld is afkomstig uit [Bat03b], waar gewezen wordt op het gebrek aan doelgerichtheid en relevantie van de traditionele vraaglogica's (zoals die van Wiśniewski). In [Bat03b] en [Bat04a] wordt een procedurele aanpak voorgesteld voor het doelgericht oplossen van problemen. Als we de logica **VA** gebruiken voor het beantwoorden of oplossen van een vraag op basis van een verzameling premissen, zal het afleiden van irrelevante vragen kunnen worden vermeden. Een erotetische implicatie op basis van **VA** heeft dan ook een aantal raakpunten met de procedurele aanpak.

5.4. Implicatie van vragen: een voorstel op basis van VA

In deze afdeling geven we een bepaling van (een notie van) erotetische implicatie die steunt op de adaptieve logica **VA**. We hebben vooreerst een definitie nodig die bepaalt wanneer A *finaal* afleidbaar is uit Γ *op voorwaarde* Δ. Merk op dat deze notie verschilt van de gebruikelijke (en ook in hoofdstuk 4 gegeven) definitie van 'finale afleidbaarheid'. [27] Het is natuurlijk mogelijk dat A op verschillende voorwaarden kan worden afgeleid uit Γ. Het is ook mogelijk dat, in een **VA**-bewijs uit Γ, A wordt afgeleid op voorwaarde $\{\Box B\}$, en dat $\Box B$ onvoorwaardelijk afleidbaar is. Dan wordt de lijn waarop A is afgeleid op voorwaarde $\{\Box B\}$, gemarkeerd (en zou A niet finaal afleidbaar zijn uit Γ op de voorwaarde $\{\Box B\}$). Als nu echter, verder in het bewijs, A onvoorwaardelijk kan worden afgeleid uit Γ, dan is $A_\varnothing$ finaal afleidbaar uit Γ. Dan spreken we af dat we toch stellen dat ook $A_{\{\Box B\}}$ finaal afleidbaar is uit Γ (omwille van het feit dat $\varnothing \subset \{\Box B\}$), ondanks het feit dat elke lijn met A als tweede element en $\Box B$ als vijfde element, gemarkeerd wordt.

We hebben $Ab(\Gamma)$ als volgt bepaald:

$$Ab(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A; A \in \Omega^{\Box}\}.$$

27. Als we zeggen dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} A$, i.e. A is finaal **VA**-afleidbaar uit Γ, laten we in het midden *hoe* A finaal **VA**-afleidbaar is uit Γ: (1) A kan *onvoorwaardelijk* finaal afleidbaar zijn uit Γ, en in dat geval is A **V**-afleidbaar uit Γ; (2) A kan finaal afleidbaar zijn uit Γ op een voorwaarde Δ, of kan finaal afleidbaar zijn uit Γ op verschillende voorwaarden $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$; (3) A kan zowel onvoorwaardelijk als voorwaardelijk afleidbaar zijn uit Γ.

We voeren nu twee definities in die ons zullen toelaten om uit te drukken onder welke voorwaarde(n) een **VA**-gevolg van Γ finaal afleidbaar is uit Γ.

Definitie 62. *Een disjunctie van abnormaliteiten* $Dab(\Delta)$, *waarbij* $\Delta \subset \Omega^{\Box}$, *is* inactief *in* Γ *alss* $Ab(\Gamma) \cap \Delta = \varnothing$.

Definitie 63. $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} A_{\Delta}$, A_{Δ} *is* finaal afleidbaar *uit* Γ, *alss er een* $\Delta' \subseteq \Delta$ *bestaat zodanig dat* $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\Delta')$, *en* Δ' *inactief is in* Γ.

De clausule "er is een Δ' zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} A \vee Dab(\Delta')$, en Δ' is inactief in Γ" komt hier neer op de eis dat een **VA**-bewijs uit Γ steeds zo kan worden uitgebreid dat A voorkomt op een ongemarkeerde lijn, met als voorwaarde Δ'.

We bepalen nu het concept partiële **VA**-implicatie:

Definitie 64. *Een vraag* Q_2 *wordt* partieel *geïmpliceerd door een vraag* Q_1 *en een verzameling premissen* Γ *alss*

(*1*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_{\Delta}}$, *waarbij* $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$, *en*

(*2*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (Q_1 \supset Q_2)_{\{\Box A_i, \ldots, \Box A_m\}}$, *waarbij* $i \geqslant 0$ *en* $\Box A_i, \ldots, \Box A_m$ *W-partiële antwoorden zijn van* Q_1.

Als men enkel geïnteresseerd is in het oplossen van de hoofdvragen [28], dan hoeft partiële implicatie enkel voor de hoofdvragen bepaald te worden. In dat geval kan voorwaarde (1) beter vervangen worden door de volgende voorwaarde: $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \Box Q_{1_{\Delta}}$, waarbij $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$. Een minder strenge notie van partiële **VA**-implicatie wordt bekomen door in voorwaarde (2) de eis dat $\Box A_i, \ldots, \Box A_m$ W-partiële antwoorden moeten zijn van Q_1 af te zwakken tot de eis dat $\Box A_i, \ldots, \Box A_m$ B-partiële antwoorden moeten zijn van Q_1.

Voorwaarde (1) stelt dat de vraag Q_1 **VA**-afleidbaar moet zijn uit Γ, op voorwaarde $\{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$. Dit is normaal gezien steeds het geval, tenzij Q_1 door Γ wordt opgelost. [29] Als dit laatste het geval is, kan aan

28. Een hoofdvraag heeft de logische vorm $\Box Q$, en is **VA**-afleidbaar uit de verzameling erotetische premissen.

29. Als Q_1 door Γ wordt opgelost, dan is ofwel een direct antwoord van Q_1, ofwel de onderdrukker van Q_1 onvoorwaardelijk (en dus finaal) afgeleid op een lijn in een **VA**-bewijs uit Γ. Als Γ **V**-consistent is, dan is in beide gevallen $\neg Q_1$ onvoorwaardelijk

voorwaarde (1) dus niet voldaan worden, en bijgevolg impliceert Q_1 dan geen enkele vraag (op voorwaarde dat Γ **V**-consistent is). Dit is intuïtief plausibel: het heeft namelijk geen enkele zin om vragen af te leiden teneinde een vraag te kunnen beantwoorden die eigenlijk al beantwoord is.

Wat de tweede voorwaarde betreft, volstaat het niet te eisen dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset Q_2$. Veronderstel immers dat noch Q_1 noch Q_2 door Γ worden opgelost: dit komt erop neer dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$ en $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \neg Q_2$. Dan volgt hieruit dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1$ en $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_2$, en dus ook dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset Q_2$. Omdat alle vragen die niet door Γ worden opgelost, **VA**-afleidbaar zijn uit Γ, garandeert $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset Q_2$ niet in het minst dat Q_2 van enig nut kan zijn voor het oplossen van Q_1. Daarom wordt in voorwaarde (2) geëist dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (Q_1 \supset Q_2)_{\{\Box A_i,\ldots,\Box A_m\}}$. Dit komt erop neer dat:

- $Q_1 \supset Q_2$ kan worden afgeleid onder de voorwaarde $\{\Box A_i, \ldots, \Box A_m\}$ op een ongemarkeerde lijn k van een **VA**-bewijs uit Γ (en lijn k zal niet gemarkeerd worden in om het even welke uitbreiding van het bewijs). Dan geldt, voor alle $\Box A_i$, dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$.

- Als toch zou blijken dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \Box A_i$, voor een of andere $\Box A_i$, dan zal lijn k gemarkeerd worden, maar dan kan het bewijs steeds uitgebreid worden zodat een lijn kan worden neergeschreven met als tweede element $Q_1 \supset Q_2$, en als vijfde element Δ, waarbij $\varnothing \subseteq \Delta \subset \{\Box A_i, \ldots, \Box A_m\}$, en geen enkel element van Δ **V**-afleidbaar is uit Γ.

Het bovenstaande illustreert reeds goed de *dynamiek* die bij het afleiden van vragen uit premissen en/of andere vragen zal spelen. Stel dat Γ onder meer $\Box Q_1 \vee \neg Q_1$ bevat, en we onze aandacht richten op het oplossen van de (hoofd)vraag Q_1. Dan kunnen we een **VA**-bewijs uit Γ maken. Stel dat we op lijn j van het bewijs Q_1 hebben afgeleid op voorwaarde $\{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$. Stel dat we op lijn k van het bewijs $Q_1 \supset Q_2$ hebben afgeleid op voorwaarde $\{\Box A_1, \Box A_2\}$, waarbij $\Box A_1$ en $\Box A_2$ W-partiële antwoorden van Q_1 zijn. Stel dat lijnen j en k op stadium k van het bewijs ongemarkeerd zijn. Dan kunnen we, op stadium k van het bewijs, besluiten dat Q_2, op basis van Γ, partieel geïmpliceerd wordt door Q_1. Gegeven de inzichten in de premissen die het bewijs ons op dit stadium levert, is het rationeel om de vraag Q_2 te stellen, gegeven ons doel een oplossing van Q_1 te bekomen. Of we Q_2 effectief stellen, hangt af van allerhande pragmatische

afleidbaar uit Γ, en is Q_1 dus geen finaal **VA**-gevolg van Γ. Als Γ **V**-inconsistent is, dan is Q_1 (alsook $\neg Q_1$) sowieso finaal afleidbaar uit Γ.

factoren. Een verdere analyse van de premissen (een voortzetting van het bewijs uit Γ) kan aan het licht brengen dat Q_1 door Γ wordt opgelost. In dat geval is het niet langer rationeel de vraag Q_2 te stellen (om het doel, namelijk het oplossen van Q_1, te bereiken) [30]: lijnen j en k worden gemarkeerd. Dit is een voorbeeld van *interne dynamiek*. Anderzijds kan Γ ook worden uitgebreid, bijv. omdat een antwoord $\Box C$ wordt bekomen op een eerder gestelde vraag. Door deze nieuwe premisse kan dan bijv. $\Box A_1$ onvoorwaardelijk worden afgeleid, waardoor lijn k gemarkeerd wordt, en Q_2 dus niet langer partieel geïmpliceerd wordt door Q_1 (omdat niet langer geldt dat elk direct antwoord van Q_2 nuttig is voor het oplossen van Q_1.) Dit is een voorbeeld van *externe* dynamiek.

We geven een eenvoudig voorbeeld dat een van de verschillen tussen **V**-implicatie en partiële **VA**-implicatie illustreert. Op basis van $\Gamma = \{\Box(p \vee q)\}$ **V**-impliceert de vraag $?\{p, q, r\}$ de vraag $?\{t, \neg t\}$ (zie definitie 60, p. 127), maar $?\{t, \neg t\}$ wordt, op basis van Γ niet partieel **VA**-geïmpliceerd door $?\{p, q, r\}$ (zie definitie 64, p. 144).

Het is vrij eenvoudig om nog een aantal andere soorten implicaties tussen vragen te bepalen op basis van de adaptieve logica **VA**. Het zal onmiddellijk duidelijk worden dat deze concepten steeds verder afwijken van Wiśniewski's erotetische implicatie.

Definitie 65. *Een vraag Q_1* **VA**-impliceert *een vraag Q_2 op basis van een verzameling premissen Γ alss*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_\Delta}$, *waarbij $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$, en*

(2) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{2_\Delta}$, *waarbij Δ enkel directe, B-partiële en eliminerende antwoorden van Q_1 bevat.*

Voorwaarde (1) is identiek aan die in definitie 64 (p. 144). Wat voorwaarde (2) betreft, mag Δ enkel formules bevatten die *erotetisch relevant* (cf. supra) zijn voor Q_1: partiële antwoorden hoeven dus geen W-partiële antwoorden te zijn, en voor een eliminerend antwoord wordt niet geëist dat ook de proactieve presuppositie van Q_1, $\pi(Q_1)$ **V**-afleidbaar moet zijn uit Γ. Aangezien Q_{2_Δ} finaal is afgeleid op een lijn in een **VA**-bewijs uit Γ, betekent dit dat

30. Dit neemt niet weg dat Q_2 nuttig kan zijn voor het oplossen van een andere vraag.

- ofwel geen enkel element van Δ **V**-afleidbaar is uit Γ,
- ofwel een partieel of eliminerend antwoord van Q_1 **V**-afleidbaar is uit Γ (mocht een direct antwoord **V**-afleidbaar zijn uit Γ, dan is voorwaarde (1) niet voldaan), maar dan is er een $\Delta' \subset \Delta$ zodanig dat $Q_{2_{\Delta'}}$ finaal afleidbaar is uit Γ.

Ondanks de relatief zwakke eisen (in vergelijking met die van Wiśniewksi's erotetische implicatie) die in voorwaarde (2) worden gesteld, worden een aantal vragen die intuïtief nuttig kunnen geacht worden voor het oplossen van een hoofdvraag, nog steeds niet geïmpliceerd. We geven een eenvoudig voorbeeld: als $\Gamma = \{\Box(p \supset q)\}$, dan lijkt het stellen van de vraag $?\{p, \neg p\}$ nuttig voor het beantwoorden van de vraag $?\{q, \neg q\}$.[31] Nochtans wordt $?\{p, \neg p\}$, op basis van Γ niet **VA**-geïmpliceerd door $?\{q, \neg q\}$. We zullen nu een concept bepalen dat dit wel toelaat. Hiervoor laten we ons inspireren door [Bat03b].

In [Bat03b] wordt een procedure voor probleemoplossing uitgewerkt. Een probleem wordt gerepresenteerd als een verzameling onbeantwoorde vragen. De doelstelling is steeds een onopgelost probleem op te lossen door, steunend op de premissen, deelproblemen af te leiden. Op bepaalde vragen (deelproblemen) die uit een hoofdprobleem worden afgeleid, kan steeds een antwoord verkregen worden (namelijk als een vraag behoort tot de gegeven verzameling van vragen die met standaardmiddelen kunnen beantwoord worden). De procedure zorgt ervoor dat het oplossen van het probleem (via het afleiden van deelproblemen) doelgericht gebeurt. Als een oplossing voor het probleem afgeleid is, stopt de procedure. Ook als het probleem, gegeven de premissen en de verzameling beantwoordbare vragen niet oplosbaar is, zal de procedure stoppen (ze is enkel bepaald voor het propositioneel fragment). De procedure is enkel bepaald voor ja-nee vragen, en — in het algemeen, maar niet altijd (dit hangt af van de verzameling beantwoordbare vragen) — zijn de geïmpliceerde vragen van een lagere complexiteit dan de implicerende vraag. Het typische kenmerk van de bepaling is dat niet geëist wordt dat elk mogelijk direct antwoord van de geïmpliceerde vraag "cognitief nuttig" is (in de zin van Wiśniewski). Elk direct antwoord van een geïmpliceerde vraag is wel nuttig vanuit het perspectief van probleemoplossing: hetzij omdat het direct antwoord ons

31. Uit het direct antwoord $\Box p$ kan immers een direct antwoord van $?\{q, \neg q\}$, nl. $\Box q$, worden afgeleid. Het direct antwoord $\Box\neg p$ is een 'dead end', en geeft aan dat $?\{q, \neg q\}$ niet kan worden opgelost via $\Box(p \supset q)$.

effectief dichter brengt bij de oplossing van de hoofdvraag, hetzij omdat het direct antwoord een ganse tak van mogelijke paden (naar de oplossing) afsnijdt (dan is het desbetreffende antwoord een 'dead end'). We kunnen deze relatie tussen een probleem en een daaruit afgeleid probleem min of meer vatten door middel van het concept *nuttige* vraag:

Definitie 66. *Een vraag Q_2 is, op basis van de* **V***-consistente verzameling premissen* Γ, nuttig *voor het oplossen van een vraag Q_1 alss*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_\Delta}$, *waarbij* $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$, *en*

(2) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (Q_1 \supset Q_2)_\Theta$, *zodanig dat, als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{2_{\Theta'}}$, *waarbij* $\Theta' \subseteq \{\rho(Q_2)\} \cup \Delta_{\mu(Q_2)}$, *dan* $\Theta \subset \Theta'$, *voor alle dergelijke* Θ'.

Voorwaarde (1) stelt, zoals hierboven, dat de vraag Q_1 niet opgelost is door Γ. Daardoor is ook het nuttig zijn van een vraag voor een andere vraag een niet-monotone notie. Als Q_1 is opgelost, en dus niet langer **VA**-afleidbaar is uit Γ, dan wordt geen enkele vraag nog als nuttig beschouwd. Voorwaarde (2) komt erop neer dat $Q_1 \supset Q_2$ afleidbaar moet zijn onder een voorwaarde Θ, waarbij Θ een echte deelverzameling moet zijn van de kleinste verzameling abnormaliteiten Θ' waaronder Q_2 voorwaardelijk finaal **VA**-afleidbaar is uit Γ. [32] Dit betekent dat uit minstens één oplossing van Q_2 (een direct antwoord van Q_2 of de onderdrukker van Q_2) een direct antwoord op Q_1 afleidbaar is, of $\rho(Q_1)$ afleidbaar is.

We geven een aantal voorbeelden van nuttige vragen:

> Voor elke **V**-consistente verzameling premissen Γ geldt dat, als Γ de vraag $(?x)Px$ niet oplost en als $\Gamma \nvdash_{\mathbf{V}} \Box\neg Pa$, dan geldt steeds dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} ((?x)Px \supset ?\{Pa, \neg Pa\})_{\{\Box\neg Pa\}}$, en dus is $?\{Pa, \neg Pa\}$ een nuttige vraag voor het oplossen van $(?x)Px$. Als we als direct antwoord op de vraag $?\{Pa, \neg Pa\}$ bekomen dat $\Box Pa$, is inderdaad meteen ook de vraag $(?x)Px$ beantwoord.

Gegeven $\Gamma = \{\Box(\forall x)(Px \supset Qx)\}$ is de vraag $(?x)Px$ nuttig voor het oplossen van de vraag $(?x)Qx$. Beide voorwaarden van definitie 66 zijn

32. De complexiteit van de tweede voorwaarde is nodig. Immers, stel dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} \pi(Q_2)$. Als dan geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_2$, dan geldt ook dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset Q_{2_\Theta}$, waarbij $\Theta \subset \{\rho(Q_2)\} \cup \Delta_{\mu(Q_2)}$. Maar hier is niet gegarandeerd dat een direct antwoord van Q_2 nuttig is voor het oplossen van Q_1. Integendeel, Q_2 kan om het even welke vraag zijn.

immers voldaan:

(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (?x)Qx_{\Delta}$, waarbij $\Delta = \{\Box\neg(\exists x)Qx, (\exists x)\Box Qx\}$, en

(2) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} (?x)Qx \supset (?x)Px_{\{\Box(\forall x)\neg Px\}}$,
terwijl $\Gamma \nvdash_{\mathbf{VA}} (?x)Px_{\{\Box(\forall x)\neg Px, (\exists x)\Box Px\}}$.

Uit elk direct antwoord $\Box Pc$ ($c \in \mathcal{C}$) van de geïmpliceerde vraag is, samen met Γ, inderdaad een direct antwoord $\Box Qc$ van de implicerende vraag afleidbaar.

Voorwaarde (2) is in een bepaald opzicht nog steeds vrij streng: het komt erop neer dat we eisen dat uit minstens één direct antwoord van Q_2 samen met Γ een oplossing van Q_1 kan worden afgeleid. Een vraag Q_2 waarvoor geldt dat uit elk van haar directe antwoorden samen met Γ een W-partieel antwoord van Q_1 kan worden afgeleid, voldoet niet aan de definitie van een nuttige vraag. [33] Het is duidelijk dat we 'in het echte leven' vaak veel minder kieskeurig (moeten) zijn. Het zal niet in elke context, rekening houdend met een aantal pragmatische factoren, rationeler zijn om de meest nuttige afgeleide vragen te stellen (waarbij de meest nuttige vragen die vragen zijn waarvan elk direct antwoord leidt tot een oplossing van de hoofdvraag).

Bovenstaand probleem kan ten dele worden opgevangen door een (eindige) reeks van vragen te laten impliceren door een hoofdvraag.

Definitie 67. *Een (onopgeloste) vraag Q_1 is* herleidbaar *tot een (eindige) reeks vragen $Q_2, \ldots, Q_m$ alss*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_\Delta}$, *waarbij* $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$, *en*

(2) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_m)_{\varnothing}$, *en*

(3) $|dQ_1| \geqslant |dQ_i|, (2 \leqslant i \leqslant m)$.

Op voorwaarde (2) zijn een aantal variaties mogelijk (naar analogie met de verschillende soorten reeds bepaalde implicaties). Dit zou verder moeten worden uitgezocht.

Als we de vragen $Q_1, \ldots, Q_m$ beperken tot ja-nee vragen (waarvan de

33. Nochtans lijkt dit wel een nuttige vraag; misschien niet de meest nuttige, maar toch zeker nuttig.

proactieve presuppositie steeds een stelling is, en de onderdrukker dus steeds vals is), dan komt de herleidbaarheid van Q_1 tot een reeks vragen $Q_2, \ldots, Q_m$ op basis van de premissen Γ, min of meer overeen met het afleiden van een *deelprobleem* $\{Q_2, \ldots, Q_m\}$ uit een hoofdprobleem Q_1, op basis van Γ (zie [Bat03b]).

We bepalen nog een aantal concepten die geïnspireerd zijn op concepten uit [Har61]:

Definitie 68. *Een vraag* Q_2 lost*, op basis van de* $\mathbf{V}$*-consistente verzameling premissen* Γ*, een vraag* Q_1 op *alss*

(*1*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_\Delta}$*, waarbij* $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$*, en*

(*2*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$.

De eerste voorwaarde belet dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$ (voorwaarde (2)) zou voldaan zijn omwille van de 'triviale' reden dat Q_1 opgelost wordt door Γ alleen (in dat geval geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_1$, en dus ook dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset Q_2$).

De definitie kan uitgebreid worden naar een reeks vragen die een hoofdvraag oplost: [34]

Definitie 69. *Een eindige reeks vragen* $Q_2, \ldots, Q_m$ lost*, op basis van de* $\mathbf{V}$*-consistente verzameling premissen* Γ*, een vraag* Q_1 op *alss*

(*1*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_{1_\Delta}$*, waarbij* $\Delta = \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$*, en*

(*2*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \supset (Q_2 \vee \ldots \vee Q_m)$.

Verder kunnen we ook *probleem-equivalente* vragen bepalen:

Definitie 70. *Twee vragen* Q_1 *en* Q_2 *zijn* probleem-equivalent *ten opzichte van een* $\mathbf{V}$*-consistente verzameling premissen* Γ *alss*

(*1*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1$*, en*

(*2*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_2$*, en*

(*3*) $\Gamma \vdash_{\mathbf{V}} Q_1 \equiv Q_2$.

34. Merk op dat de definitie (in haar huidige vorm) niet uitsluit dat in de reeks vragen die de hoofdvraag oplost irrelevante en/of overbodige vragen zitten: uit $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset Q_2$ volgt bijv. ook dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{VA}} Q_1 \supset (Q_2 \vee Q_3)$.

Als twee vragen Q_1 en Q_2 probleem-equivalent zijn t.o.v. Γ, dan zijn beide vragen onopgelost. Als een van beide door het uitbreiden van Γ wordt opgelost, dan is meteen ook de andere vraag opgelost. We geven een eenvoudig voorbeeld. De vragen $?\{p, \neg p\}$ en $?\{q, \neg q\}$ zijn probleem-equivalente vragen t.o.v. de verzameling premissen $\{\Box(p \equiv q)\}$.

Een *combinatie* van directe antwoorden op een verzameling ja-nee-vragen $\Theta = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ $(n \geqslant 1)$, is:

(1) een direct antwoord op Q_1 als $\Theta = \{Q_1\}$

(2) een conjunctie waarvan elk conjunct exact één direct antwoord op elke $Q_i \in \Theta$ bevat (als $i > 1$).

Indien Q_1 herleidbaar is tot een verzameling vragen $\{Q_2, \ldots, Q_m\}$, dan zal elke combinatie van directe antwoorden op de verzameling vragen $\{Q_2, \ldots, Q_m\}$ de vraag Q_1 oplossen.

Een concept waar traditioneel veel aandacht aan besteed wordt is herleidbaarheid van een vraag tot een verzameling meer eenvoudige vragen. Voor Wiśniewksi's vraaglogica wordt het concept uitgebreid bestudeerd in [Wiś94], [Leś00] en [Wiś]. Herleidbaarheid wordt daar, onder meer, als volgt gedefinieerd:

Definitie 71. *Een vraag Q is* herleidbaar *tot een niet-lege verzameling vragen Φ alss*

(1) *voor elk direct antwoord A op de vraag Q, voor elke vraag $Q_i \in \Phi$, geldt: $A \models_{m.c.} dQ_i$, en*

(2) *uit elke verzameling die uit exact een direct antwoord van elke vraag $Q_i \in \Phi$ bestaat, is een direct antwoord van Q afleidbaar, en*

(3) *geen enkele vraag $Q_i \in \Phi$ heeft meer directe antwoorden dan Q.*

We bewijzen nu een eigenschap die stelt dat elke vraag van de eerste soort herleidbaar is tot een reeks eenvoudige ja-nee vragen. Met een *eenvoudige* ja-nee vraag bedoelen we elke welgevormde vraag $Q = ?\{A, \neg A\}$ (waarvoor dus geldt dat $dQ = \{\Box A, \Box\neg A\}$). Een eenvoudige ja-nee vraag is dus steeds een vraag van de eerste soort. Met $|dQ|$ duiden we het aantal elementen van dQ aan (kardinaliteit van de verzameling dQ). Dan kan het volgende theorema bewezen worden.

Theorema 22. *Voor elke vraag Q van de eerste soort zijn er eenvoudige ja-nee vragen $Q_1, \ldots, Q_m$, zodanig dat $\vdash_{\mathbf{V}} Q \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)$ en $|dQ_i| \leqslant |dQ|$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.*

BEWIJS. — Zij Q een vraag van de eerste soort, en $\Box A_1, \ldots, \Box A_m$ een opsomming van alle directe antwoorden van Q. Zij Θ een verzameling van eenvoudige ja-nee vragen die op de volgende manier bepaald wordt: $\Theta = \{Q_k \mid dQ_k = \{\Box A_k, \Box\neg A_k\}$, voor $1 \leqslant k \leqslant m\}$. Aangezien elke $Q_k \in \Theta$ een ja-nee vraag is, is $\neg\rho(Q_k)$ gelijk aan $\neg\Box\neg(A_k \vee \neg A_k)$, en dus een stelling van $\mathbf{V}$ (voor elke $Q_k \in \Theta$). Bijgevolg weten we dat $\vdash_{\mathbf{V}} Q_k \vee \Box A_k \vee \Box\neg A_k$, voor elke $Q_k \in \Theta$. Daaruit is, wegens $\Box A_k \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q_k$ afleidbaar dat $\vdash_{\mathbf{V}} (Q \supset Q_k) \vee \Box\neg A_k$, voor elke vraag $Q_k \in \Theta$. Daaruit kan afgeleid worden dat $\vdash_{\mathbf{V}} (Q \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)) \vee (\Box\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg A_m)$. Hieruit volgt dat $\vdash_{\mathbf{V}} (Q \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)) \vee \Box(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_m)$. We weten dat $\vdash_{\mathbf{V}} \Box(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \equiv \rho(Q)$, en dat $\rho(Q) \vdash_{\mathbf{V}} \neg Q$, en dus geldt dat $\vdash_{\mathbf{V}} Q \supset (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)$. Aangezien elke welgevormde vraag minstens 2 directe antwoorden heeft, geldt dat $|dQ_i| \leqslant |dQ|$. $\Box$

Elke vraag Q van de eerste soort kan dus herleid worden tot een eindige reeks ja-nee vragen, waarvan een combinatie van directe antwoorden steeds de vraag Q oplost.

5.5. Voorlopige conclusies en open problemen

We hebben in dit hoofdstuk een waaier van logische relaties tussen een (implicerende) vraag, de verzameling premissen en een of meerdere (geïmpliceerde) vragen bepaald. We hebben aangetoond, voor vragen van de eerste soort, dat we een implicatie kunnen bepalen die samenvalt met de erotetische implicatie van Wiśniewski. Voor vragen van de tweede soort moet dit nog worden aangetoond. Hoe de in dit hoofdstuk bepaalde erotetische concepten, die alle een *explicatie* leveren voor 'het rijzen van een vraag', zich exact tot elkaar verhouden, moet verder worden uitgezocht. Ook de precieze overeenkomsten en verschillen met de procedure voor probleemoplossing uit [Bat03b] moeten worden onderzocht. Vermoedelijk kan de doelgerichte procedure, waarbij het zoekproces gestuurd wordt door het *positief deel* zijn van een formule, als basis genomen worden voor het ontwikkelen van een heuristiek voor **VA**. Wellicht kan de heuristiek voor een groot deel ook in de bewijzen zelf worden ingebouwd.

Vanuit het perspectief van probleem-oplossing lijkt de logica **VA** een aantal interessante mogelijkheden te bieden. Het doel van een probleemoplossingsproces is uiteraard het oplossen van het hoofdprobleem, dat uit een of meer onopgeloste vragen bestaat (eventueel kunnen meerdere hoofdproblemen tegelijk aangepakt worden). Voor de eenvoud veronderstellen we dat we slechts met één hoofdprobleem geconfronteerd worden, dat bovendien uit slechts één onopgeloste vraag Q bestaat. Bovendien beschikken we over een verzameling premissen Γ. Stel dat we, op stadium i van een **VA**-bewijs uit Γ, Q hebben afgeleid op een ongemarkeerde lijn. Het is mogelijk dat $\neg Q$ **V**-afleidbaar is uit de premissen, maar op stadium i van ons bewijs is dit in elk geval nog niet gebeurd. Door het voortzetten van ons bewijs (i.e. door een verdere analyse van de premissen) kan duidelijk worden of Q ook finaal **VA**-afleidbaar is uit Γ. Hiervoor zijn een aantal criteria (die in bepaalde gevallen inderdaad zullen toelaten om te besluiten dat Q finaal afleidbaar is, en dus niet kan worden opgelost door Γ alleen), maar in andere gevallen zal, op basis van het (eindige) bewijs, niet met absolute zekerheid kunnen worden besloten dat Q finaal afleidbaar is uit Γ. Dit is nu precies wat een adaptieve vraaglogica aantrekkelijk maakt in vergelijking met de statische definities van Wiśniewksi: in plaats van eindeloos afleidingen te blijven maken, teneinde $\neg Q$ te kunnen afleiden mocht dit inderdaad uit Γ volgen, kunnen we, op basis van de notie afleidbaarheid op een stadium, anders handelen. Als bijv. na n stadia in een bewijs nog steeds niet blijkt dat $\neg Q$ afleidbaar is, kan er voorlopig (dit oordeel kan later, bij verdere analyse, eventueel worden herzien) vanuit gegaan worden dat Q afleidbaar is uit Γ. Hoe 'rationeel' deze opvatting is, is uiteraard afhankelijk van (hoe goed) de gezette stappen in het bewijs (waren). Bovendien vergt het analyseren van premissen en het afleiden van gevolgen in de echte wereld vaak veel tijd (en dus geld) en moeite. Vaak is het dan ook voordeliger [35] om op een bepaald moment van de analyse een aantal vragen effectief te stellen (ook al kan later blijken dat je zelf het antwoord kon afleiden uit de informatie die je ter beschikking had, en ook al hangt aan het laten beantwoorden van je vragen vaak ook een stevig prijskaartje). [36]

35. Dit voordeel kan op allerlei facetten slaan (daarom niet altijd in termen van kosten). Iemand als Hintikka hamert steeds op het strategisch voordeel dat het stellen van vragen (en het krijgen van specifieke antwoorden) kan opleveren.

36. Daarom is het vaak interessant om een aantal verschillende door de hoofdvraag geïmpliceerde vragen te proberen afleiden. Een aantal van deze geïmpliceerde vragen kan je dan op basis van de premissen proberen oplossen, terwijl andere best aan een externe bron zullen moeten worden gesteld. In het algemeen zal je natuurlijk niet altijd kunnen uitmaken wat met welke vraag moet gebeuren.

Omdat ook het beantwoorden van vragen tijd en middelen kost, stelt men best niet zomaar een aantal vragen, maar bij voorkeur vragen die nuttig of relevant zijn voor het beantwoorden van de hoofdvraag. Dit houdt niet in dat elk mogelijk antwoord op de gestelde vraag direct nuttig moet zijn voor de hoofdvraag (in de zin van Wiśniewski). Denk bijv. aan een dokter die de oorzaak van de symptomen van zijn patiënt probeert te achterhalen. Vaak zal hij een reeks standaard-testen laten uitvoeren (die weliswaar verband houden met ziektes die de symptomen zouden verklaren), zonder dat er garantie is dat elk resultaat van een test rechtstreeks nuttig is (in de zin van Wiśniewski) voor het beantwoorden van de hoofdvraag "Aan welke ziekte lijdt deze patiënt?".

Dat een vraag Q_2 door een vraag Q_1 geïmpliceerd wordt, garandeert dat het stellen (en het oplossen) van de vraag Q_2 direct nuttig is voor het oplossen van de vraag Q_1. Hoe kunnen we echter komen tot Q_2, of, bij uitbreiding, tot $Q_2 \vee \ldots \vee Q_m$? In een **VA**-bewijs uit Γ kunnen we steeds een lijn i neerschrijven met als tweede element Q_1 en als vijfde element $\{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$. Als lijn i gemarkeerd wordt, dan is vraag Q_1 opgelost. Als we ons tot doel stellen de vraag Q_1 op te lossen, moeten we dus een van de elementen van de voorwaarde $\{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$ (onvoorwaardelijk) kunnen afleiden uit Γ (Γ kan ondertussen uitgebreid worden met verkregen antwoorden op door ons gestelde vragen). Elk element van $\{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$ kan dus beschouwd worden als een *doel*. De verzameling doelen (verbonden met een vraag Q_1) kan worden ingeperkt door het afleiden van de negatie van een doel: door het (onvoorwaardelijk) afleiden van de proactieve presuppositie $\pi(Q_1)$ van de vraag Q_1, kan Q_1 afgeleid worden op een lijn j, met als voorwaarde $\Delta_{\mu(Q_1)}$. Aangezien $\Delta_{\mu(Q_1)} \subset \{\rho(Q_1)\} \cup \Delta_{\mu(Q_1)}$ is de verzameling doelen (verbonden met het oplossen van Q_1) ingeperkt. Ook het onvoorwaardelijk afleiden van een eliminerend antwoord van Q_1 leidt tot een inperking van de verzameling doelen. [37]

We hebben er reeds op gewezen dat de logica's **V** en **VA** niet geschikt zijn om (zinnige) vragen af te leiden uit een inconsistente verzameling Γ. Dit kan opgelost worden door **V** te vervangen door een paraconsistente vraaglogica **VuN** (de erotetische uitbreiding van **Tun**, dat zelf wordt bekomen door **CLuN** uit te breiden met de modale axioma's van **T**). **VA** zou

37. Inzake vragen van de tweede soort is hier wel enige voorzichtigheid geboden (cfr. supra).

dan moeten worden vervangen door een combinatie van twee adaptieve logica's: een inconsistentie-adaptieve (modale) logica, en een ampliatieve adaptieve logica (analoog aan het mechanisme van **VA**). [38] Dit moet uiteraard verder worden uitgezocht. Een van de problemen is dat zo een vraaglogica bijvoorbeeld wel zou toelaten dat uit een inconsistentie een vraag zou worden afgeleid waarvan elk direct antwoord duidelijk zou maken welke helft van de inconsistentie moet worden behouden (en welke helft moet worden verworpen), maar dat niet meteen duidelijk is hoe de oorspronkelijke verzameling dan moet worden gewijzigd.

In een realistische context van kennisverwerving is het onvermijdelijk dat we ons geregeld op foutieve informatie baseren, en dus conclusies trekken uit premissen die feitelijk vals zijn. In dit verband is het nuttig om ook andere vragen dan eenvoudige ja-nee vragen te stellen (hoewel we aangetoond hebben dat elke vraag van de eerste soort tot een verzameling ja-nee vragen herleidbaar is). We verduidelijken dit even met een voorbeeld. Een onderzoeker beschikt over de informatie $\Box(p \vee q \vee r)$, en stelt zich op basis daarvan de vraag $?\{p, q, r\}$. Daaruit leidt hij de vraag $?\{p, \neg p\}$ af, die hij effectief stelt. Als antwoord verkrijgt hij $\Box\neg p$. Vervolgens leidt hij de vraag $?\{q, \neg q\}$ af, die hij ook effectief stelt, en waarop hij het antwoord $\Box\neg q$ verkrijgt. Omdat hij uit de premisse en de verkregen antwoorden $\Box r$ afleidt, heeft hij een antwoord op zijn hoofdvraag, en staakt hij zijn onderzoek. Nochtans, mocht hij in plaats van de vraag $?\{q, \neg q\}$ de vraag $?\{r, \neg r\}$ gesteld hebben (die vraag had hij ook afgeleid), zou hij als antwoord $\Box\neg r$ verkregen hebben. De onderzoeker baseerde zich immers op valse informatie ($\Box\neg(p \vee q \vee r)$ is het geval). Door het één voor één stellen van de ja-nee vragen kwam dit echter niet aan het licht. Afhankelijk van de volgorde waarin de onderzoeker zijn drie afgeleide vragen zou stellen, zou hij telkens tot een andere conclusie komen (en steeds een valse conclusie). Dit zou kunnen vermeden worden door alle ja-nee vragen effectief samen te stellen, maar het stellen van echte alternatief-vragen (vragen van de eerste soort die geen ja-nee vragen zijn) lijkt op dit punt effectiever (ze 'bundelen' alle ja-nee vragen in kwestie in een enkele vraag).

Het moge duidelijk zijn dat het werken met premissen die vals blijken te zijn, en het werken met inconsistente premissen waaruit vragen kunnen

38. Combinaties van twee of meer adaptieve logica's kunnen perfect worden bepaald, mits ze dezelfde onderlimiet-logica hebben (zie bijv. [Bat01b]). De twee verschillende soorten abnormaliteiten zullen in een bepaalde volgorde moeten 'geminimaliseerd' worden.

afgeleid worden, niet zomaar met een vraaglogica kunnen worden beschreven. Daarvoor is hoe dan ook een of ander mechanisme van ‘belief revision’ nodig. Een aantal aspecten hiervan worden bestudeerd in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 6

Herziening van (inconsistente) opvattingen

6.1. Inleiding

Het onderzoek rond 'belief revision' (herziening van opvattingen) [1] heeft sinds de publicatie van [AGM85] in 1985 een hoge vlucht genomen. [2] Dit heeft zich vooral geuit in een vloedgolf van publicaties, maar in veel mindere mate in substantiële vooruitgang in het onderzoek. Terwijl de claims in de tweede helft van de jaren 1980 ronduit ambitieus en zelfs ietwat hoogdravend waren, kan op dit moment niet anders dan vastgesteld worden dat de vooruitgang die in het onderzoek geboekt werd, vrij bescheiden is, en dat dat wel eens aan de uitgangspunten van het paradigma zou kun-

1. Het Engelse 'belief' zullen we doorgaans vertalen als 'opvatting' (soms ook als 'overtuiging'). Er lijkt niet echt een passende vertaling te zijn voor het Engelse origineel. Als de vertaling van een Engelse samenstelling omslachtig klinkt (zijn er goede Nederlandse woorden voor 'belief base', 'partial meet contraction', 'remainder set', enz.?), zullen we doorgaans het Engelse origineel behouden (maar soms zal ook voor een gemengde Engels-Nederlandse uitdrukking worden gekozen). Dit levert misschien niet altijd een 'keurige' tekst op, maar ik ben ervan overtuigd dat het, ondanks alles, de leesbaarheid verhoogt (zeker voor iemand die vertrouwd is met de literatuur rond 'belief revision').
2. Deze klassiek geworden paper van Alchourrón, Gärdenfors, en Makinson ([AGM85]) wordt doorgaans als vertrekpunt gezien van het onderzoek naar 'belief revision'. De initialen van de auteurs worden gebruikt om het nieuwe paradigma te benoemen: de AGM-aanpak.

nen liggen. [3] We kunnen hoe dan ook niet om het onderzoek heen, omdat het (veruit) de dominante benadering is in het onderzoek rond de dynamiek van 'belief revision', en er tot op heden zo goed als geen alternatieve benaderingen grondig uitgewerkt zijn. [4]

In dit hoofdstuk zullen we, na een korte presentatie van de belangrijkste begrippen, ingaan op het onvermogen van de traditionele AGM-aanpak om op een zinnige manier met inconsistente opvattingen om te gaan. Daarvoor moet een paraconsistente logica gehanteerd worden. We doen een voorstel waarbij voor de operaties van 'belief revision' gesteund wordt op een inconsistentie-adaptieve logica, maar we behouden de traditionele concepten van de AGM-benadering. Vanzelfsprekend treden hierbij een aantal (vrij technische) complicaties op, en komen we tot alternatieve rationaliteitspostulaten. We bewijzen vervolgens (de varianten op) de klassieke representatie-theorema's. Voor deze bewijzen hebben we zoveel als mogelijk de structuur van de bewijzen voor de klassieke representatie-theorema's (zoals die gepresenteerd worden in het handboek [Han99]) proberen te behouden.

6.2. Het standaard AGM-model

Als startpunt van het onderzoek naar 'belief revision' wordt doorgaans de klassiek geworden paper van Alchourrón, Gärdenfors, en Makinson ([AGM85]) genomen. [5] De centrale vraag in het onderzoek naar 'belief revision' is hoe een verzameling opvattingen Γ op een 'rationele' manier kan

3. Vanuit AGM-hoek werd medio jaren 1990 overigens nogal merkwaardig gereageerd toen een auteur een aantal uitgangspunten van de AGM-aanpak bekritiseerde. We verwijzen hier naar de ronduit giftige toon waarop Makinson (in [Mak95]) een artikel van Tennant ([Ten94]) bespreekt. In [Ten94] zet Tennant aan de hand van zeer eenvoudige voorbeelden een aantal tekortkomingen (de meeste hebben te maken met de aanwezigheid van het zogenaamde 'Recovery'-postulaat) van de AGM-aanpak op een rijtje, en verwondert hij er zich over dat men, ondanks deze eenvoudige tegenvoorbeelden, halsstarrig aan de uitgangspunten van het AGM-paradigma blijft vasthouden. In zijn bespreking ([Mak95]) van Tennants artikel beschuldigt Makinson Tennant onder meer van "disregard of relevant results in the literature cited" en van "apparent unawareness of other higly relevant contributions", zonder daar ook maar een concreet voorbeeld van te geven.

4. De dynamiek die speelt bij het herzien van opvattingen, lijkt te schreeuwen om bijdragen vanuit (geprioriteerde) adaptieve logica's.

5. De opvattingen van de auteurs leunen sterk aan bij die van Levi (zie bijv. [Lev80]).

of moet gewijzigd worden, wanneer nieuwe informatie verkregen wordt (en dus een nieuwe opvatting of overtuiging gevormd wordt). Het interessante geval is natuurlijk wanneer een nieuwe opvatting A incompatibel is met de bestaande verzameling opvattingen Γ ($\neg A$ is een element van Γ, of is eruit afleidbaar). We geven een voorbeeld van een database, die onder meer de volgende gegevens bevat:

p: Alle Gentse logici hebben lang haar.

q: L. is een logicus.

r: L. werkt in Gent.

Als de database gekoppeld is aan een programma dat logische [6] afleidingen kan maken, dan kan het programma uit p, q en r afleiden dat:

s: L. heeft lang haar.

Veronderstel nu dat we vaststellen dat L. in werkelijkheid kort haar blijkt te hebben. Dan willen we dit feit ($\neg s$) toevoegen aan de database. Maar dan wordt de database inconsistent, en dus triviaal. Willen we trivialiteit vermijden, dan moet de database consistent gehouden worden, en dus moet de database worden herzien: een of meerdere gegevens moeten uit de database worden verwijderd. Vanzelfsprekend willen we niet alle gegevens uit de database verwijderen, want dat zou onnodig verlies van (waardevolle) informatie betekenen. Dus moeten we kiezen tussen het opgeven van p, q, r, of s.

Het probleem van 'belief revision' is dat logische overwegingen alleen niet volstaan om te beslissen welke opvattingen moeten worden opgegeven; daarvoor is ook een of ander selectiemechanisme nodig (op basis van preferenties). Wat het probleem complex maakt, is dat de gegevens in een database (of de opvattingen van een persoon) logische gevolgen hebben. [7] Als een opvatting wordt opgegeven, moet dus ook beslist worden welke gevolgen van die opvatting eveneens moeten worden opgegeven, en welke kunnen behouden worden. Stel dat we er in de beschreven situatie voor kiezen om p op te geven. Nu heeft p onder meer als gevolg dat

6. In de geest van het AGM-paradigma veronderstellen we hier dat klassieke logica gebruikt wordt (of in elk geval een logica waarvoor het Ex Falso Quodlibet geldt).
7. Laten we er even van uitgaan dat alle gevolgen van de gegevens in de database ook in die database zijn opgeslagen.

p': Behalve L. hebben alle Gentse logici lang haar.

De vraag is of p' in de herziene versie van de database moet zitten.

De studie van 'belief revision' is een poging om een aantal van die vragen te beantwoorden. In de AGM-aanpak wordt het probleem van 'belief revision' aangepakt vanuit twee globale strategieën: het ontwerpen van expliciete *constructies* van het revisie-proces en het formuleren van *postulaten* voor dergelijke constructies, onder de vorm van postulaten van rationaliteit. [8] Veel van het theoretische werk bestaat erin de twee benaderingen te verbinden via zogenaamde *representatie-theorema's*.

Hoewel de klassieke AGM-resultaten verkregen worden voor een gevolgrelatie [9] Cn die iets algemener is dan de gevolgrelatie van (propositionele) klassieke logica, presenteren we de resultaten enkel voor $Cn_{\mathbf{CL}}$, waarbij **CL** hier staat voor het *propositionele* fragment van klassieke logica. In het AGM-paradigma kunnen opvattingen enkel als propositionele wffs worden weergegeven.

Een revisie-operatie zorgt ervoor dat men van de ene 'belief state' overgaat in een andere. Een 'belief state' wordt gerepresenteerd door een verzameling propositionele wffs. In het standaard AGM-model wordt gewerkt met *deductief gesloten* verzamelingen ('belief sets'). Dit werken met 'belief sets' kwam onder invloed van AI-mensen onder vuur te liggen (zie onder meer [Mak85], [Han91], [Han99], [Fuh91]): in een 'belief set' kan geen onderscheid worden gemaakt tussen fundamentele opvattingen en opvattingen die louter gevolgen zijn van een aantal fundamentele opvattingen. Dit leidde tot een alternatieve benadering op basis van niet-deductief gesloten verzamelingen ('belief bases') (cf. infra).

Er zijn drie mogelijke epistemische verhoudingen tussen een opvatting A en een verzameling opvattingen Γ:

(1) A wordt door Γ *aanvaard*: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$,

(2) A wordt door Γ *verworpen*: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \neg A$,

(3) A wordt door Γ noch aanvaard, noch verworpen:

$$\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} A \text{ en } \Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \neg A.$$

8. Voor een bespreking van de twee strategieën verwijs ik naar [Mak85, pp. 350–351].
9. Hiermee wordt een "supra-klassieke"-gevolgrelatie bedoeld: als A kan afgeleid worden uit Γ met klassieke waarheidsfunctionele logica, dan $A \in Cn(\Gamma)$.

In het AGM-paradigma worden drie operaties op een 'belief set' Γ bepaald: expansie, contractie en revisie. *Expansie* van Γ met een opvatting A komt neer op het nemen van de unie van Γ en $\{A\}$, en hiervan de deductieve sluiting te nemen. *Contractie* van Γ met een opvatting A bestaat erin een aantal opvattingen uit Γ te verwijderen, zodat een verzameling bekomen wordt die deductief gesloten is en de opvatting A niet bevat. *Revisie* van Γ met een opvatting A bestaat in het toevoegen van A aan Γ, maar op zo een manier dat de uiteindelijke verzameling opvattingen consistent is, wat inhoudt dat een of meerdere eerdere opvattingen van Γ mogelijk moeten worden opgegeven (uit Γ moeten worden verwijderd).

'Belief revision' heeft betrekking op wijzigingen die moeten worden aangebracht aan een verzameling opvattingen over een statische, niet-veranderende wereld. De wijzigingen worden veroorzaakt door het ontdekken, het verkrijgen of het corrigeren van informatie over die stabiele wereld. [10]

Terwijl er een unieke manier is om een verzameling opvattingen uit te breiden, zijn de contractie- en revisie-operatie niet uniek te bepalen. [11] Daarom voorziet het AGM-paradigma in zogenaamde postulaten van rationaliteit, waaraan elke contractie- en revisie-operatie moet voldoen. Deze postulaten van rationaliteit reflecteren de drie credo's van het AGM-paradigma:

(1) Een verzameling opvattingen moet steeds consistent zijn.

(2) Een verzameling opvattingen moet steeds deductief gesloten zijn.

(3) De wijzigingen die aan een verzameling opvattingen worden aangebracht, moeten steeds minimaal gehouden worden.

We geven enkel de zes klassieke basis-postulaten voor contractie van een 'belief set' Γ met een formule A, genoteerd als $\Gamma - A$ (uit [AGM85]):

10. Hoe een verzameling opvattingen rationeel moet worden gewijzigd wanneer de werkelijkheid (de toestand van de wereld) verandert, wordt bestudeerd in de (nauw met 'belief revision' verwante) literatuur rond *updates* (zie bijv. [KM92]).

11. Logische eigenschappen zijn onvoldoende om te kunnen kiezen tussen de verschillende alternatieven. Elk alternatief kan, in bepaalde omstandigheden, gerechtvaardigd zijn. Hoewel het dus onmogelijk is om een unieke theorie te formuleren, kunnen wel logische inperkingen geformuleerd worden waaraan elke rationele vervanging van een verzameling opvattingen zou moeten voldoen.

(C-1) $\Gamma - A$ is een deductief gesloten verzameling opvattingen. (*Sluiting*)

(C-2) $\Gamma - A \subseteq \Gamma$ (*Insluiting*)

(C-3) Als $A \notin \Gamma$, dan $\Gamma - A = \Gamma$ (*Leemte*)

(C-4) Als $A \in \Gamma - A$, dan $\vdash A$ (*Succes*)

(C-5) $\Gamma \subseteq (\Gamma - A) + A$ (*Herstel*)

(C-6) Als $\vdash A \equiv B$, dan $\Gamma - A = \Gamma - B$ (*Gelijkwaardigheid*)

Deze postulaten worden geacht algemeen aanvaarde intuïties inzake het op rationele wijze opgeven van opvattingen, te vatten. Postulaat (C-1) stelt dat het resultaat van het contracteren of inkrimpen van een verzameling opvattingen opnieuw een (deductief gesloten) verzameling opvattingen moet zijn. Het tweede postulaat stelt dat in een contractie-proces geen nieuwe opvattingen aan de oorspronkelijke verzameling opvattingen mogen worden toegevoegd. (C-3) stelt dat, als een opvatting A niet door Γ wordt aanvaard, de contractie van Γ met A terug Γ oplevert (er is geen reden om iets aan Γ te wijzigen). Postulaat (C-4) stelt dat de contractie van Γ met A een verzameling moet opleveren waartoe A niet behoort, behalve als A een logische stelling is (dan behoort A sowieso tot om het even welke (deductief gesloten) verzameling opvattingen). Het vijfde postulaat stelt dat de contractie-operatie van Γ met A herstelbaar moet zijn. Dit houdt in dat de oorspronkelijke verzameling opvattingen, Γ, steeds opnieuw kan worden bekomen door een expansie-operatie op Γ met (de net verwijderde opvatting) A. Postulaat (C-6) stelt dat contractie-operaties op Γ met logisch equivalente opvattingen steeds dezelfde verzameling opvattingen moeten opleveren.

Van deze postulaten is het Herstel-postulaat (C-5) veruit het meest controversiële, en het is dan ook veelvuldig bekritiseerd (zie bijv. [Fuh91] en vooral [Ten97]). Het postulaat hangt nauw samen met een van de hogervermelde credo's, namelijk met het principe van minimale verandering: bij het uitvoeren van een contractie-operatie moet zo weinig mogelijk uit een verzameling opvattingen verwijderd worden. De kritiek op het Herstel-postulaat komt erop neer dat een aantal intuïtief aanvaardbare contractie-operaties er niet aan voldoen. We geven een voorbeeld, afkomstig uit [Han91, p. 73]:

Veronderstel dat ik geloof dat Cleopatra een zoon had (opvatting A) en dat ik ook geloof dat Cleopatra een dochter had (opvatting B). Bijgevolg geloof ik ook dat Cleopatra een kind had (opvatting $A \vee B$). Op een bepaald moment verkrijg ik informatie die me doet besluiten dat de redenen die ik had om A en B aan te nemen vals zijn. Daardoor zie ik me gedwongen mijn verzameling opvattingen te contracteren met $A \vee B$. Als gevolg daarvan zullen A, B, $A \vee B$ en alle elementen die er logisch equivalent mee zijn, uit mijn verzameling opvattingen verdwijnen. Stel dat ik kort daarop van een betrouwbare bron verneem dat uit recent onderzoek is gebleken dat Cleopatra een kind had. Dan lijkt het volkomen redelijk om mijn huidige verzameling opvattingen opnieuw uit te breiden met $A \vee B$, zonder evenwel ook opnieuw A en B toe te voegen (de redenen die ik had om A en B te geloven zijn nog steeds vals, en de nieuwe informatie bevat geen redenen om A te geloven, noch redenen om B te geloven). Maar deze contractie-operatie voldoet niet aan het Herstel-postulaat.

Dit eenvoudig voorbeeld (naast vele andere) toont aan dat er zinnige contractie-operaties bestaan die niet voldoen aan het Herstel-postulaat. We zullen verder in dit hoofdstuk tonen dat een basis-gegenereerde contractie-operatie niet voldoet aan het Herstel-postulaat.

De AGM-postulaten [12] moeten opgevat worden als *logische* inperkingen voor een rationele theorie-verandering: ze zijn bedoeld als minimale vereisten waaraan elke rationele verandering van opvattingen zou moeten voldoen. De AGM-aanpak levert een model dat de dynamiek in de opvattingen van een geïdealiseerde actor beschrijft. [13]

6.3. Inconsistente opvattingen

Dat mensen inconsistente opvattingen hebben, is veeleer regel dan uitzondering. Hoewel ‘rationele’ mensen er ongetwijfeld naar streven *lokaal* consistente opvattingen te hebben, zijn hun opvattingen op *globaal* niveau haast zeker inconsistent (daarom nog niet onmiddellijk te lokaliseren, en

12. De AGM-postulaten voor revisie zijn in dezelfde zin. We zullen verderop in dit hoofdstuk de postulaten voor revisie van een basis geven.
13. Er zijn echter een aantal problematische aspecten aan deze idealisering, waarvan de belangrijkste zijn: het werken met deductief gesloten verzamelingen (logische alwetendheid), en de globale consistentie-eis.

zeker niet onmiddellijk weg te werken). Ook omvangrijke databanken hebben veel kans om inconsistente data te bevatten, vooral als die data afkomstig zijn van verschillende bronnen. Ondanks deze vaststelling is de klassieke AGM-aanpak totaal onbruikbaar om het rationeel wijzigen van inconsistente theorieën en opvattingen te modelleren. [14]

Slecht enkele auteurs besteden enige aandacht aan inconsistente verzamelingen opvattingen, en hoe die rationeel te wijzigen. [15]

Volgens Fuhrmann ([Fuh91, pp. 186–187]) zijn er, als we geconfronteerd worden met een inconsistente verzameling opvattingen, twee dingen belangrijk:

(1) we moeten de inconsistenties isoleren — een inconsistente verzameling mag niet volledig gecorrumpeerd worden (triviaal worden) omdat een aantal inconsistenties in de verzameling geslopen zijn; en

(2) we moeten lokaal de consistentie (trachten te) herstellen — we moeten een inconsistentie kunnen opheffen door de inconsistente verzameling te laten inkrimpen (contractie), terwijl andere inconsistenties, die we (nog) niet kunnen oplossen, mee kunnen worden overgedragen naar de gecontracteerde verzameling.

Aan de tweede eis kan vanzelfsprekend nooit voldaan worden door de AGM-postulaten voor contractie, omdat die eisen dat elke gecontracteerde verzameling consistent moet zijn (wat impliceert dat alle inconsistenties in één operatie moeten worden verwijderd). [16]

14. Als een 'belief set' Γ op een bepaald moment inconsistent wordt, dan is Γ de triviale verzameling, en is alle informatie in Γ verloren (en deze kan in principe op geen enkele manier worden teruggewonnen).

15. Vooral Restall en Slaney (in [RS95]) hebben een belangrijke constructieve bijdrage geleverd, door de AGM-postulaten aan te passen voor een onderliggende (monotone) paraconsistente logica. Andere auteurs (zoals Fuhrmann (in [Fuh91]), Hansson (in [Han99]) en Wasserman (in [Was99])) wijzen er enkel op dat de AGM-benadering geen zinnige resultaten oplevert wanneer ze wordt toegepast op inconsistente verzamelingen opvattingen. We citeren Hansson ([Han99, p. 370]): "In practice, our corrections of inconsistencies are often local, i.e., they only make certain parts of the belief base consistent. No model of such local changes seems to be available."

16. Tennant ([Ten97, pp. 248–249]) schrijft hierover: "This is an exceptionally strong requirement on contraction, and arguably one which should not be imposed if one takes paraconsistent logic seriously. For the paraconsistentist, there could be 'localized' contradictions lurking within a theory, and a contraction might be required (for other reasons than *this* particular inconsistency) elsewhere in the theory. In such a case there

Aan de eerste eis kan nooit voldaan worden als we **CL** als onderliggende logica gebruiken (geen enkele logica waarin het Ex Falso Quodlibet geldt, kan hieraan voldoen). We moeten dus een paraconsistente logica gebruiken, maar niet zomaar om het even welke. We moeten rekening houden met twee problemen:

(1) het (ver)spreiden van de inconsistenties doorheen de (gevolg)verzameling; en

(2) door het gebruiken van een zwakkere logica (dan **CL**) verliezen we mogelijk heel wat inferentiekracht (regels als Disjunctief Syllogisme, Contrapositie, Modus Tolens, Dubbele Negatie, enzovoort zijn mogelijk ongeldig).

Het eerste probleem lijkt te vragen om een zeer arme paraconsistente logica (zoals bijvoorbeeld **CLuN**, die inconsistenties maximaal isoleert, zodat bijv. geen enkele inconsistentie afleidbaar is uit enige andere inconsistentie). [17] Het tweede probleem vraagt juist om een zo sterk mogelijke logica, en dus een rijke paraconsistente logica, zoals **CLuNs** (zie [BD]) of **LP** (zie [Pri79]), waarin bijv. De Morgan-regels wel geldig zijn. Hoewel deze logica's meer 'inferentiekracht' hebben dan **CLuN**, zijn ook hier een aantal regels van **CL** (zoals Disjunctief Syllogisme) niet geldig. Bovendien hebben ze het grote nadeel dat ze inconsistenties spreiden (uit een inconsistentie $A \wedge {\sim}A$, zijn steeds ook andere inconsistenties afleidbaar) i.p.v. isoleren.

Het hier geschetste probleem is welbekend uit de literatuur rond adaptieve logica's. Elke *monotone* paraconsistente logica maakt op zijn minst enkele inferentieregels van **CL** *globaal* ongeldig (bijv. Disjunctief Syllogisme, Modus Tollens). [18] Deze regels kunnen dus ook niet toegepast worden op consistente delen van de verzameling opvattingen: maar als iemand gelooft dat p en ${\sim}p \vee q$ het geval is, waarom zou hij dan niet mogen besluiten dat

is no *prima facie* reason why a contraction to remove a particular logical falsehood $q\&\neg q$ should at the same time fix whatever it is that leads to some different inconsistency $r\&\neg r$ elsewhere."

17. Dit klopt niet helemaal, omdat bijv. $(p \wedge {\sim}p) \wedge {\sim}(p \wedge {\sim}p) \vdash_{\mathbf{CLuN}} p \wedge {\sim}p$. Dus exacter, voor alle wffs A en B, als A consistent is, en A is verschillend van B, dan $A \wedge {\sim}A \nvdash_{\mathbf{CLuN}} B \wedge {\sim}B$.

18. Er bestaat een paraconsistente logica, namelijk de logica **AN** (zie [Meh00]), waarin Disjunctief Syllogisme bijv. wel geldig is. Maar dan zijn weer andere **CL**-regels (bijv. Additie) niet geldig. In die zin verandert dit dus niks aan de gegeven argumentatie.

q het geval is (tenzij of totdat hij merkt dat hij zowel p als $\sim p$ gelooft, en zijn geloof in p dus problematisch wordt). Dit soort van redeneringen wordt perfect gemodelleerd door een inconsistentie-adaptieve logica als **ACLuN1** of **ACLuN2**. We zullen ons in de rest van dit hoofdstuk enkel toeleggen op **ACLuN1**. Omdat we enkel het propositioneel fragment van **ACLuN1** nodig hebben, zullen we, voor het gemak van de notatie, spreken van **AL**. **AL** lost beide bovenstaande problemen op: (1) **AL** isoleert de inconsistenties op maximale wijze (evenzeer als **CLuN**); en (2) uit de buurt van inconsistenties behoudt **AL** de volle inferentiekracht van **CL**.

Omdat we zoals gezegd enkel het propositionele fragment van de logica's **CLuN** en **ACLuN1** nodig hebben, zullen we ons bij de presentatie ervan dan ook tot het propositionele fragment beperken. Als we het over **CLuN** en **CL** hebben doelen we steeds op het propositioneel fragment ervan. Met **AL** bedoelen we het propositioneel fragment van **ACLuN1**. Alle hieronder vermelde eigenschappen van **CLuN** en **AL** gelden trouwens voor het volledige (predikatief) fragment.

6.4. De (zwakke) (monotone) paraconsistente logica CLuN

CLuN is in zekere zin de meest 'natuurlijke' paraconsistente logica die bekomen kan worden uit **CL**. De negatie in **CL**, "$\neg$", wordt semantisch gekarakteriseerd door (1) $v_M(\neg A) = 1$ als $v_M(A) = 0$ (negatie-volledigheid) en (2) $v_M(\neg A) = 0$ als $v_M(A) = 1$ (consistentie). **CLuN** wordt eenvoudigweg bekomen door in de semantiek de klassieke negatie "$\neg$" te vervangen door de paraconsistente negatie "$\sim$", die gekarakteriseerd wordt door $v_M(\sim A) = 1$ als $v_M(A) = 0$ (negatie-volledigheid). Alle andere semantische clausules van **CL** blijven behouden. Het resultaat is een zeer zwakke paraconsistente logica, waarin de meeste afleidingsregels voor negatie van **CL** niet gelden: bijv. beide richtingen van Dubbele Negatie, De Morgan-eigenschappen, enz. Bovendien zijn de equivalentie-regel en de eliminatie van de identiteit slechts beperkt geldig, namelijk in zoverre het vervangen plaatsvindt buiten het bereik van een negatie. De zwakte van **CLuN** maakt juist de kracht uit van de adaptieve logica's die **CLuN** als onderlimiet-logica hebben.

Zij $\mathcal{L}$ de standaard propositionele taal (inclusief "$\perp$"), met $\sim$ als de standaard negatie. Zij $\mathcal{S}$ de verzameling van propositionele letters, $\mathcal{W}$ de verzameling welgevormde formules (wffs) en ${}^{\sim}\mathcal{W} = \{\sim A \mid A \in \mathcal{W}\}$.

Syntactisch kan **CLuN** bijvoorbeeld gekarakteriseerd worden door het volledige positieve (propositionele) fragment van **CL** uit te breiden met het axiomaschema $A \vee \sim A$:

MP	Uit A en $A \supset B$ afleiden dat B
A⊃1	$A \supset (B \supset A)$
A⊃2	$((A \supset B) \supset A) \supset A$
A⊃3	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
A⊥	$\perp \supset A$
A∧1	$(A \wedge B) \supset A$
A∧2	$(A \wedge B) \supset B$
A∧3	$A \supset (B \supset (A \wedge B))$
A∨1	$A \supset (A \vee B)$
A∨2	$B \supset (A \vee B)$
A∨3	$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
A≡1	$(A \equiv B) \supset (A \supset B)$
A≡2	$(A \equiv B) \supset (B \supset A)$
A≡3	$(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B))$
A∼1	$(A \supset \sim A) \supset \sim A$ (of: $A \vee \sim A$)

Een **CLuN**-model M is een singleton $\langle v \rangle$, waarin v een toekenningsfunctie is die (in een volledig klassieke metataal) bepaald wordt door:

C1.1	$v : \mathcal{S} \longrightarrow \{0, 1\}$
C1.2	$v : {}^{\sim}\mathcal{W} \longrightarrow \{0, 1\}$

De valuatiefunctie v_M bepaald door het model M is een functie die voldoet aan de volgende voorwaarden:

C2.1 $v_M : \mathcal{W} \longrightarrow \{0, 1\}$

C2.2 waar $A \in \mathcal{S}$, $v_M(A) = v(A)$; $v_M(\perp) = 0$

C2.3 $v_M({\sim}A) = 1$ alss $v_M(A) = 0$ of $v({\sim}A) = 1$

C2.4 $v_M(A \supset B) = 1$ alss $v_M(A) = 0$ of $v_M(B) = 1$

C2.5 $v_M(A \wedge B) = 1$ alss $v_M(A) = 1$ en $v_M(B) = 1$

C2.6 $v_M(A \vee B) = 1$ alss $v_M(A) = 1$ of $v_M(B) = 1$

C2.7 $v_M(A \equiv B) = 1$ alss $v_M(A) = v_M(B)$

Waarheid in een model, semantisch gevolg en geldigheid worden bepaald zoals gewoonlijk: A is waar in M (M verifieert A) alss $v_M(A) = 1$; $\Gamma \vDash_{\mathbf{CLuN}} A$ alss alle **CLuN**-modellen van Γ (de **CLuN**-modellen die alle leden van Γ verifiëren) A verifiëren; A is geldig alss A door alle **CLuN**-modellen geverifieerd wordt.

Dat de semantiek karakteristiek is voor het inferentiesysteem wordt aangetoond in [Bat99a]:

Theorema 23. $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} A$ *alss* $\Gamma \vDash_{\mathbf{CLuN}} A$.

Omdat **CLuN** zo een zwakke paraconsistente logica is, is het een zeer aantrekkelijke onderlimiet-logica voor een inconsistentie-adaptieve logica. **CLuN** isoleert de inconsistenties die uit een verzameling premissen afleidbaar zijn op maximale wijze: uit een contradictie $A \wedge {\sim}A$ is met **CLuN** geen enkele andere contradictie afleidbaar, behalve natuurlijk als A zelf een contradictie is (Simplificatie is een geldige **CLuN**-regel). [19] Omdat de inconsistenties door **CLuN** niet gespreid worden, zal een adaptieve logica met **CLuN** als onderlimiet-logica over het algemeen een rijkere gevolgverzameling opleveren dan een inconsistentie-adaptieve logica met een sterkere paraconsistente logica als onderlimiet-logica. [20]

19. Uit $p \wedge {\sim}p$ is geen enkele contradictie $A \wedge {\sim}A$ afleidbaar: dus ook niet ${\sim}p \wedge {\sim}{\sim}p$, noch $(p \vee q) \wedge {\sim}(p \vee q)$, noch ... Uit $(p \wedge {\sim}p) \wedge {\sim}(p \wedge {\sim}p)$ is met **CLuN** vanzelfsprekend wel $p \wedge {\sim}p$ afleidbaar.

20. De regels van de bovenlimiet-logica (in dit geval **CL**) kunnen dankzij het maximaal isoleren van de inconsistenties immers maximaal worden toegepast.

6.5. De inconsistentie-adaptieve logica AL

We herhalen nogmaals dat we met **AL** het propositionele fragment van de inconsistentie-adaptieve logica **ACLuN1** bedoelen. [21] We volgen de karakterisering van een adaptieve logica, zoals gegeven in hoofdstuk 3. Dan wordt de inconsistentie-adaptieve logica **AL** bepaald door:

(1) de onderlimiet-logica **CLuN**

(2) de verzameling van abnormaliteiten $\Omega = \{A \wedge {\sim}A \mid A \in \mathcal{W}\}$

(3) de strategie Betrouwbaarheid.

Een *abnormaliteit* is dus een contradictie $A \wedge {\sim}A$. Zij $!A$ een afkorting voor $A \wedge {\sim}A$. [22] De verzameling van alle abnormaliteiten is Ω.

Als we de onderlimiet-logica **CLuN** uitbreiden met het axiomaschema $(A \wedge {\sim}A) \supset \bot$ (dit axiomaschema drukt uit dat elke abnormaliteit vals is), dan bekomen we de bovenlimiet-logica **CL**. De inconsistentie-adaptieve logica **AL** 'oscilleert' als het ware tussen de onderlimiet-logica **CLuN** en de bovenlimiet-logica **CL**: **AL** lokaliseert de inconsistenties die volgen uit een verzameling premissen Γ, valt *lokaal* terug op de paraconsistente afleidingsregels van **CLuN** als het toepassen van de regels van de bovenlimiet-logica **CL** trivialiteit dreigt te veroorzaken, maar past overal elders de afleidingsregels van **CL** in hun volle kracht toe. [23] In tegenstelling tot **CLuN** en om het even welke andere *monotone* paraconsistente logica, waarin een of meerdere afleidingsregels van **CL** *globaal* ongeldig

21. Zowel **ACLuN1** als **ACLuN2** (uiteraard volledig predikatief) worden uitgebreid bestudeerd in [Bat99a]. Daar worden ook een aantal meta-theoretische eigenschappen bewezen. Voor de presentatie hieronder steunen we op de (vernieuwde) presentatie van de generieke afleidingsregels uit [Bat01b].

22. In de eerste artikels over inconsistentie-adaptieve logica's werd A een abnormaliteit genoemd alss A samen met zijn negatie ${\sim}A$ waar is. Dat een formule zich abnormaal gedraagt, kwam intuïtief (maar niet helemaal correct) neer op het feit dat A zich inconsistent gedroeg. Toen later andere (ampliatieve) adaptieve logica's ontwikkeld werden, werd om redenen van uniformiteit overgeschakeld naar de huidige formulering van abnormaliteiten.

23. Zo worden (alle) inconsistentie-adaptieve logica's min of meer metaforisch beschreven in [Bat99a].

zijn, beperkt **AL** enkel *lokaal* de *toepassing* van bepaalde afleidingsregels van **CL**. [24]

Zoals voor de meeste adaptieve logica, spelen *disjuncties van abnormaliteiten* ook voor het functioneren van **AL** een belangrijke rol. Als $\Delta = \{!A_1, \ldots, !A_n\}$, dan is $Dab(\Delta)$ een afkorting voor $!A_1 \vee \ldots \vee !A_n$. Als $\Delta = \varnothing$, dan komt $A \vee Dab(\Delta)$ neer op A. Aangezien $Dab(\Delta)$ een formule is, is Δ steeds eindig. Als we $Dab(\Delta)$ gebruiken, is Δ steeds een eindige deelverzameling van Ω (want $Dab(\Delta)$ is een wff).

De zogenaamde motor voor de inconsistentie-adaptieve logica **AL** is het volgende theorema: [25]

Theorema 24 (Theorem Adjustment Theorem). $\vdash_{\mathbf{CL}} A$ *alss voor bepaalde* $C_1, \ldots, C_n (n \geqslant 0)$ *geldt dat* $\vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee !C_1 \vee \ldots \vee !C_n$.

Veronderstel dat A van de vorm $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \supset B$ is, en dat alle A_i **CLuN**-afleidbaar zijn uit Γ. De **CLuN**-stelling $!C_1 \vee \ldots \vee !C_n \vee ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \supset B)$ kan dan als volgt geïnterpreteerd worden: tenzij een van de C_i zich abnormaal gedraagt, is B afleidbaar uit Γ.

Verder geven we nog de volgende definities:

Definitie 72. $Dab(\Delta)$ *is een* minimaal *Dab-gevolg van* Γ *alss* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$, *terwijl* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Theta)$ *voor alle* $\Theta \subset \Delta$.

De verzameling van Γ-onbetrouwbare formules, $U(\Gamma)$, wordt als volgt bepaald:

Definitie 73. $U(\Gamma) = \{A \mid A \in Dab(\Delta)$, *waarbij* $Dab(\Delta)$ *een minimaal Dab-gevolg is van* $\Gamma\}$.

24. Wat bedoeld wordt, is het volgende: als gewerkt wordt met **CLuN**, kan Disjunctief Syllogisme nooit worden toegepast, want het is een *globaal* ongeldige afleidingsregel. Als gewerkt wordt met **AL**, zal Disjunctief Syllogisme soms (dit hangt af van de verzameling premissen Γ) kunnen worden toegepast op bepaalde formules, en op andere dan weer niet (voor dezelfde verzameling premissen Γ). De toepassing ervan zal steeds voorwaardelijk gebeuren, namelijk op voorwaarde dat een formule betrouwbaar is. Dit geldt voor alle afleidingsregels van **CL** die geen geldige afleidingsregels zijn van **CLuN**.

25. In [Bat99a] werd dit theorema bewezen voor zowel **ACLuN1** als **ACLuN2**.

6.5.1. Bewijstheorie

De lijnen van een geannoteerd dynamisch bewijs bevatten 5 elementen (zoals bepaald in hoofdstuk 3). Het vijfde element bevat de voorwaarde Δ, waarbij elk element van Δ van de vorm $A \wedge {\sim}A$ is.

We geven nu de generieke regels voor **AL**:

PREM Als $A \in \Gamma$:

$$\begin{array}{cc} \ldots & \ldots \\ \hline A & \varnothing \end{array}$$

RU Als $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{CLuN}} B$:

$$\begin{array}{cl} A_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array}$$

RC Als $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{CLuN}} B \vee Dab(\Theta)$:

$$\begin{array}{cl} A_1 & \Delta_1 \\ \ldots & \ldots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Theta \end{array}$$

De markeringsregel is die voor de strategie Betrouwbaarheid (zie hoofdstuk 3).

6.5.2. Semantiek

De verzameling van abnormaliteiten die door een **CLuN**-model M geverifieerd worden, wordt als volgt bepaald:

Definitie 74. $Ab(M) = \{A \wedge {\sim}A \mid A \in \mathcal{W}; M \models A \wedge {\sim}A\}$.

Een **CLuN**-model van Γ is *betrouwbaar* alss dat model geen 'overbodige' abnormaliteiten verifieert:

Definitie 75.
Een **CLuN***-model M van Γ is* betrouwbaar *alss $Ab(M) \subseteq U(\Gamma)$.*

De betrouwbare **CLuN**-modellen van Γ zijn de **AL**-modellen van Γ. Elke wff die door alle betrouwbare **CLuN**-modellen van Γ geverifieerd wordt, is een **AL**-gevolg van de premissen:

Definitie 76.
$\Gamma \vDash_{\mathbf{AL}} A$ *alss A geverifieerd wordt door alle* **AL***-modellen van Γ.*

6.5.3. Definities en nuttige theorema's voor AL

In deze afdeling presenteren we een lijst van definities en theorema's waarop in de rest van dit hoofdstuk herhaaldelijk zal worden gesteund. [26]

Theorema 25 (Monotone karakterisering). $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ *alss er een eindige verzameling abnormaliteiten Δ bestaat zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$ en $\Delta \cap U(\Gamma) = \varnothing$.*

Definitie 77. *Een formule $A \wedge \sim A$ is Γ-betrouwbaar alss $A \wedge \sim A \notin U(\Gamma)$.*

Definitie 78. *Een verzameling abnormaliteiten Δ is Γ-betrouwbaar alss $\Delta \cap U(\Gamma) = \varnothing$.*

We definiëren nu ook de tegenhangers van bovenstaande begrippen, enkel en alleen om straks een aantal bewijzen iets vlotter te kunnen laten verlopen.

Definitie 79. *Een verzameling Γ is* safe *met betrekking tot een abnormaliteit $A \wedge \sim A$ alss $A \wedge \sim A \notin U(\Gamma)$.*

Definitie 80. *Waar Δ een verzameling abnormaliteiten is, is een verzameling Γ* safe *met betrekking tot Δ alss $\Delta \cap U(\Gamma) = \varnothing$.*

26. Het overgrote deel van de definities en theorema's is afkomstig uit diverse artikels over inconsistentie-adaptieve logica's: zie [Bat99a] en [Bat00b], waarin de bewijzen van de theorema's terug te vinden zijn (of vermeld wordt in welk artikel het desbetreffende theorema bewezen wordt). Ook hier zijn de theorema's bewezen voor **ACLuN1**, maar geven wij ze enkel voor **AL**.

Theorema 26 (Cautious Monotonicity).
Als $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ *en* $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} B$, *dan* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{AL}} B$.

Theorema 27 (Cautious Cut).
Als $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$ *en* $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{AL}} B$, *dan* $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} B$.

Theorema 28 (Fixed Point)).
$Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) = Cn_{\mathbf{AL}}(Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma))$.

Theorema 29 (Reliability Extension).
Als $B \notin U(\Gamma)$ *en* $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$, *dan* $B \notin U(\Gamma \cup \{A\})$.

Theorema 30 (Normality Warrant).
Als Γ *consistent is, dan* $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) = Cn_{\mathbf{CL}}(\Gamma)$.

Theorema 31 (Immuniteit).
Als $A \wedge {\sim}A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$, *dan* $A \wedge {\sim}A \in Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$.

De eigenschap Immuniteit kan gemakkelijk worden uitgebreid naar alle Dab-formules:

Theorema 32 (Uitgebreide Immuniteit). *Voor alle eindige verzamelingen van abnormaliteiten* Δ *geldt:* $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} Dab(\Delta)$ *alss* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$.

BEWIJS. — **Links-rechts richting.** Uit $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} Dab(\Delta)$ volgt met theorema 25 dat er een eindige verzameling abnormaliteiten Θ bestaat, zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta) \vee Dab(\Theta)$ en $\Theta \cap U(\Gamma) = \varnothing$. Hieruit volgt dat voor alle minimale Dab-gevolgen $Dab(\Lambda)$ van Γ geldt dat $\Lambda \cap \Theta = \varnothing$. Dus is $Dab(\Delta) \vee Dab(\Theta)$ geen minimaal Dab-gevolg van Γ. Daaruit volgt dat er een $\Delta' \subset \Delta \cup \Theta$ bestaat zodanig dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta')$, en $Dab(\Delta')$ is een minimaal Dab-gevolg van Γ. Uit dit laatste volgt dat $\Delta' \cap \Theta = \varnothing$, en dus dat $\Delta' \subseteq \Delta$. Daaruit volgt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$.

Rechts-links richting.
Deze volgt onmiddellijk uit het feit dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$. □

Theorema 33 (Strong Reassurance). *Als een* **CLuN**-*model* M *van* Γ *geen* **AL**-*model van* Γ *is, dan bestaat er een* **AL**-*model* M' *van* Γ *zodanig dat* $Ab(M') \subset Ab(M)$.

Theorema 34 (Reassurance).
$Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ is triviaal alss $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$ triviaal is.

Merk op dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$ triviaal is alss Γ geen **CLuN**-modellen heeft. Aangezien enkel de paraconsistente negatie '$\sim$' bepaald is (in de hier gepresenteerde versie van **CLuN**), heeft elke verzameling Γ minstens één **CLuN**-model, en dus is $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$ nooit triviaal. Merk ook op dat Reassurance onmiddellijk volgt uit Strong Reassurance.

Theorema 35 (Strengthening Condition).
$Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subset Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ alss er een A bestaat zodanig dat

(1) $A \wedge {\sim}A \notin U(\Gamma)$ en

(2) $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \cup \{A \wedge {\sim}A\})$ niet triviaal is.

6.6. Over het gebruik van deductief gesloten verzamelingen

Het werken met deductief gesloten verzamelingen werd reeds vaak bekritiseerd, vooral door auteurs die werken binnen het veld van de artificiële intelligentie. Zo wijst Nebel (zie bijv. [Neb91]) op twee problemen:

(1) 'belief sets' kunnen doorgaans niet op een eindige wijze gerepresenteerd (en zijn dus vanuit computationeel oogpunt onbruikbaar), en

(2) als gewerkt wordt met 'belief sets' kan geen onderscheid worden gemaakt tussen fundamentele opvattingen of overtuigingen en opvattingen die louter gevolgen zijn van fundamentele opvattingen. [27]

Verschillende auteurs (uit verschillende onderzoeksdomeinen) hebben voorstellen geformuleerd om met 'belief bases' te werken (de term 'belief base' wordt door verschillende auteurs lichtjes anders ingevuld). We sluiten ons aan bij de benadering die gevolgd wordt door, onder meer, Fuhrmann ([Fuh91]) en Hansson ([Han99]): een 'belief base' is een verzameling formules die die opvattingen van een actor representeren die een onafhankelijke

27. Dit hoeft niet in te houden dat het onderscheid tussen fundamentele opvattingen en niet-fundamentele opvattingen altijd kan gemaakt worden.

status hebben. Opvattingen die afleidbaar zijn uit de opvattingen in de 'belief base', maar er geen deel van uitmaken, hebben een andere status, het zijn namelijk (enkel) afgeleide opvattingen. Mijn geboortedatum zou ik bijv. kunnen opvatten als een expliciete opvatting, hoe oud ik momenteel ben als een (daaruit) afgeleide opvatting. De verzameling formules waartoe een actor 'committed' is, bekomt men door de logische sluiting te nemen van de 'belief base' van de actor. [28]

In het klassieke AGM-paradigma wordt geen onderscheid gemaakt tussen fundamentele opvattingen en afgeleide opvattingen, en wordt evenmin bijgehouden op welke opvattingen gesteund werd om tot een afgeleide opvatting te komen. Als nieuwe informatie er ons toe dwingt een bepaalde opvatting op te geven, zullen een aantal daaruit afgeleide opvattingen toch worden behouden. Dit staat bekend als de zogenaamde *coherentie*-aanpak binnen 'belief revision': er wordt zoveel mogelijk informatie behouden, ongeacht hoe die informatie oorspronkelijk bekomen of afgeleid werd, en ongeacht of die informatie nog steeds afleidbaar zou zijn uit de gewijzigde verzameling opvattingen. [29]

Daartegenover staat de zogenaamde *grondslagen*-benadering, waarin gewerkt wordt met een 'belief base': een eindige, niet deductief gesloten verzameling formules. Veranderingen in de verzameling van fundamentele en afgeleide opvattingen worden steeds veroorzaakt door veranderingen in de 'belief base' (verzameling van fundamentele opvattingen). In deze aanpak wordt steeds gewerkt met eindige verzamelingen van formules, in tegenstelling tot de coherentie-aanpak, waar bij elke verandering steeds een oneindig aantal formules betrokken zijn.

Verschillende basissen kunnen dezelfde deductief gesloten theorie representeren, maar zullen doorgaans verschillend op veranderingen reageren, afhankelijk van welke opvattingen van de 'belief base' precies betrokken zijn. Zij $\Gamma_1 = \{p, p \supset q\}$ en $\Gamma_2 = \{p, q\}$ twee basissen. Beide basissen hebben dezelfde deductieve sluiting onder **CL**, die onder andere de volgende formules bevat: $p, q, p \supset q, p \wedge q$. Als nu uit beide basissen de formule p verwijderd moet worden (via een contractie-operatie), krijgen

28. Het onderscheid tussen een 'belief base' en de logische sluiting ervan is analoog aan dat tussen expliciete en impliciete opvattingen.

29. Dit laatste is wat ongelukkig uitgedrukt (aangezien de opvatting net deel uitmaakt van de gewijzigde verzameling opvattingen), maar dient begrepen te worden vanuit het perspectief van een (niet deductief gesloten) 'belief base'.

we: $\Gamma_1' = \{p \supset q\}$ en $\Gamma_2' = \{q\}$. De formule q behoort tot de deductieve sluiting van de gecontracteerde basis Γ_2', maar niet tot die van Γ_1' (omdat p verwijderd werd, en p nodig was om q af te leiden).

Als een monotone logica als onderliggende logica wordt gebruikt, heeft men de keuze om, afhankelijk van zijn filosofische intuïties en de toepassing in kwestie, te werken met 'belief sets' (deductief gesloten verzamelingen) dan wel met 'belief bases' (niet deductief gesloten verzamelingen). [30] We zullen onmiddellijk aantonen dat, als we werken met een inconsistentie-adaptieve logica, we deze keuze niet hebben.

Veronderstel dat we werken met de inconsistentie-adaptieve logica **AL** en met deductief gesloten verzamelingen. Met een voorbeeld kunnen we aantonen dat dit problematisch is. Veronderstel dat $\Gamma_0 = \{p, r, r \supset t\}$. Dan is $\Gamma = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma_0)$ een (deductief gesloten) verzameling opvattingen (een 'belief set'). Dan bevat Γ onder meer t en $(p \wedge {\sim}p) \supset q$, en meer algemeen ook $(p \wedge {\sim}p) \supset A$, voor om het even welke wff A. Al deze wffs zijn finaal afleidbaar uit Γ_0. Toch is er een belangrijk onderscheid tussen bijv. het gevolg t en gevolgen van de vorm $(p \wedge {\sim}p) \supset A$. De eerste wff is *onvoorwaardelijk* afleidbaar uit Γ_0 (t is met andere woorden een **CLuN**-gevolg van Γ_0, en aangezien **CLuN** een monotone logica is, zal t ook onvoorwaardelijk afleidbaar zijn uit elke verzameling $\Gamma' \supset \Gamma_0$), terwijl wffs van de vorm $(p \wedge {\sim}p) \supset A$ *voorwaardelijk* (finaal) afleidbaar zijn uit Γ_0 (steeds onder de voorwaarde $\{p \wedge {\sim}p\}$; aangezien Γ_0 consistent is, is p betrouwbaar en is aan de voorwaarde voldaan). Omdat de wffs 'slechts' voorwaardelijk afleidbaar zijn uit Γ_0, is het mogelijk dat (een aantal) wffs van de vorm $(p \wedge {\sim}p) \supset A$ niet langer afleidbaar zijn uit een uitbreiding van Γ_0, bijv. uit $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{{\sim}p\}$. Als we werken met 'belief sets' dan levert een eenvoudige expansie van Γ met ${\sim}p$ de verzameling $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \cup \{{\sim}p\})$ op, en dit is de triviale [31] verzameling! Dus ondanks het gebruik van een

30. Wat bedoeld wordt is het volgende. De keuze die men moet maken is het niveau waarop de wijzigingen plaatsvinden: op het niveau van de (oneindige) 'belief set' of op het niveau van de (eindige) 'belief base'. Ook als men kiest voor 'belief bases' kan men immers nog steeds werken met 'belief sets', die dan elk door een eindige 'belief base' kunnen worden gerepresenteerd. Maar dan worden de wijzigingen steeds aangebracht op het niveau van de 'belief base' (waardoor de op de 'belief base' gebaseerde 'belief set' natuurlijk ook wijzigingen zal ondergaan).

31. Aangezien $\Gamma \cup \{{\sim}p\}$ alle wffs van de vorm $(p \wedge {\sim}p) \supset A$ en p en ${\sim}p$ bevat (voor alle (willekeurige) wffs A), kunnen we met de onvoorwaardelijke afleidingsregels Conjunctie en Modus Ponens alle wffs afleiden uit $\Gamma \cup \{{\sim}p\}$ en dus is $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \cup \{{\sim}p\})$ de triviale verzameling.

inconsistentie-adaptieve logica riskeren we, bij het gebruik van 'belief sets' toch trivialiteit, wat natuurlijk niet de bedoeling kan zijn.

De oorzaak van het probleem is duidelijk. In Γ, de gevolgverzameling van Γ_0, wordt geen onderscheid gemaakt tussen formules die (finaal) *onvoorwaardelijk* zijn afgeleid uit Γ_0 en formules die (finaal) *voorwaardelijk* zijn afgeleid uit Γ_0. Er zijn nu twee opties: ofwel moeten we binnen de gevolgverzameling het onderscheid tussen voorwaardelijk afgeleide formules en onvoorwaardelijk afgeleide formules behouden; ofwel kiezen we voor het werken met niet deductief gesloten verzamelingen ('belief bases'). In de literatuur rond adaptieve logica's kiest men steeds voor het laatste, en we zullen ook hier voor deze aanpak kiezen. [32]

Inconsistentie-adaptieve logica's bereiden enkel het uiteindelijke doel voor, namelijk het elimineren van de inconsistenties, waar dit mogelijk is, en op een verantwoorde manier. Een inconsistentie-adaptieve logica laat ons toe de (inconsistente) premissen te analyseren, waarbij aan die premissen een maximaal consistente interpretatie wordt gegeven (en dus zo dicht mogelijk bij de oorspronkelijke intentie, namelijk consistentie, aanleunt). Het eigenlijke elimineren van de gelokaliseerde inconsistenties moet gebeuren op basis van een niet-logisch mechanisme, namelijk op basis van preferenties.

6.7. Postulaten van rationaliteit voor operaties op basissen

We zullen ons voornamelijk concentreren op operaties op basissen ('belief bases'). We zullen de operaties expansie, contractie en revisie van een basis Γ met een formule A bepalen voor de onderliggende inconsistentie-

32. Nochtans lijkt de eerste piste me zeker de moeite van het onderzoeken waard. Met het negeren van het onderscheid tussen voorwaardelijk en onvoorwaardelijk afgeleide formules, en van het onderscheid tussen voorwaardelijk afleidbaar zijn op een voorwaarde Δ_1 en voorwaardelijk afleidbaar zijn op een voorwaarde Δ_2, verliest men veel nuttige informatie. Het kan bijvoorbeeld belangrijk zijn om te weten dat A op twee verschillende manieren finaal afleidbaar is uit Γ: bijv. eens op voorwaarde Δ_1, en eens op voorwaarde Δ_2. Dan zal men in een aantal gevallen kunnen besluiten dat er in Γ (minstens) twee argumenten voor A te vinden zijn, waarvoor, in Γ, geen tegenargumenten te vinden zijn (want A is finaal afleidbaar). De link tussen finale afleidbaarheid en argumentatie lijkt me de moeite van het onderzoeken waard.

adaptieve logica **AL**. Er zal vooral aandacht besteed worden aan de contractie-operatie. [33] Met Γ wordt voortaan steeds een niet-deductief gesloten verzameling (een basis of 'belief base') bedoeld, tenzij expliciet anders vermeld.

6.7.1. Expansie

De expansie-operatie is heel eenvoudig, en de bepaling ervan is dezelfde als voor **CL**.

Definitie 81. *De* expansie *van Γ met A, $\Gamma + A$, wordt bepaald als:*
$\Gamma + A = \Gamma \cup \{A\}$.

Omdat **AL** een niet-monotone logica is, zal de deductieve sluiting van $\Gamma \cup \{A\}$ onder **AL** (bijv. om de verzameling opvattingen te bepalen waartoe een actor 'committed' is), in het algemeen een aantal van de traditionele eigenschappen missen. Dit zal enkel het geval zijn als $\Gamma \cup \{A\}$ inconsistent is (als $\Gamma \cup \{A\}$ consistent is, dan $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \cup \{A\}) = Cn_{\mathbf{CL}}(\Gamma \cup \{A\})$). Stel bijv. dat $\Gamma = \{p \vee q, \sim q\}$. Dan $p \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$. Maar $p \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \cup \{q\})$. [34] Omdat **AL** een niet-monotone logica is, zal de dynamiek die veroorzaakt wordt door een revisie-operatie (en zeker voor basis-gegenereerde revisie, waarbij de basis deductief gesloten wordt) vrij complex worden (cf. infra).

Net zoals voor deductief gesloten verzamelingen, zijn de operaties van contractie en revisie voor basissen niet uniek te bepalen. Ook hier kan immers, op basis van zuiver logische redenen, niet worden uitgemaakt of deze dan wel gene formule uit de basis moet worden verwijderd.

33. Dat we vooral aandacht zullen besteden aan de contractie-operatie heeft twee verschillende redenen. Enerzijds is de expansie-operatie, ook voor **AL**, een zeer eenvoudige operatie. Anderzijds is de contractie-operatie voor de onderliggende logica **AL**, vrij complex. Ondanks het feit dat een revisie-operatie niks meer is dan het combineren van een expansie- en een contractie-operatie, neemt de complexiteit — bij het gebruiken van **AL**, omdat nu twee verschillende soorten dynamiek op elkaar kunnen inwerken — sterk toe. De lezer zal ongetwijfeld merken dat het onder controle krijgen, in de meta-theorie, van die dubbele dynamiek niet evident is.
34. Omdat q $\Gamma \cup \{q\}$-onbetrouwbaar is, kan Disjunctief Syllogisme niet langer op $p \vee q$ en $\sim q$ worden toegepast.

6.7.2. Contractie

In deze afdeling voeren we de logische machinerie in die nodig is om de postulaten voor contractie te kunnen opstellen, en een aantal representatietheorema's te bewijzen. We volgen hierbij zoveel mogelijk de AGM-benadering voor basissen. [35] Waar dit niet mogelijk is, ontwikkelen we alternatieve definities en theorema's.

'Partial meet' contractie en bijzonderheden van AL

We gaan van start met de bepaling van een *restverzameling.* [36]

Definitie 82. *Laat Γ een verzameling wffs zijn en A een wff. De* restverzameling $\Gamma \perp A$ *van Γ en A wordt als volgt gedefinieerd. Voor elke verzameling Θ, $\Theta \in \Gamma \perp A$ alss*

(*1*) $\Theta \subseteq \Gamma$

(*2*) $\Theta \nvdash_{\mathbf{AL}} A$

(*3*) *voor alle Θ' zodanig dat $\Theta \subset \Theta' \subseteq \Gamma$: $\Theta' \vdash_{\mathbf{AL}} A$.*

De restverzameling $\Gamma \perp A$ is dus een verzameling van verzamelingen. De leden van $\Gamma \perp A$ zullen we *restanten* noemen.

Merk op dat het mogelijk is dat, aangezien **AL** een niet-monotone logica is, er een deelverzameling Θ van Γ bestaat, zodanig dat $\Theta \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ en voor alle $B \in \Gamma - \Theta$, $\Theta \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$ en toch $\Theta \notin \Gamma \perp A$. In tegenstelling tot wat geldt voor **CL**, is het met **AL** als onderliggende logica inderdaad mogelijk dat er een verzameling Σ bestaat zodanig dat $\Sigma \subseteq (\Gamma - \Theta)$ en $\Theta \cup \Sigma \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. Als eenvoudig voorbeeld, laat $\Gamma = \{r, t, (r\vee!q)\wedge!p, (r\vee!p)\wedge!q\}$. Dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} r$. Er kan gemakkelijk worden nagegaan dat $\{t\} \nvdash_{\mathbf{AL}} r$, en dat $\{t\} \cup \{r\} \vdash_{\mathbf{AL}} r$, $\{t\} \cup \{(r\vee!q)\wedge!p\} \vdash_{\mathbf{AL}} r$ en $\{t\} \cup \{(r\vee!p)\wedge!q\} \vdash_{\mathbf{AL}} r$. Maar toch is er een een Θ', zodanig dat $\{t\} \subset \Theta' \subseteq \Gamma$, namelijk $\Theta' = \{t, (r\vee!q)\wedge!p, (r\vee!p)\wedge!q\}$, zodanig dat $\Theta' \nvdash_{\mathbf{AL}} r$.

35. Zoals reeds vermeld steunen we hiervoor hoofdzakelijk op [Han99].
36. Dit is een aanpassing van de definitie van een 'remainder set' (in [AGM85]) voor het gebruik van een inconsistentie-adaptieve logica als onderliggende logica. Zowat alle definities moeten vanzelfsprekend worden aangepast.

In de AGM-aanpak wordt verondersteld dat er een manier bestaat om de 'beste' (in een of andere betekenis) elementen van een restverzameling te selecteren. Dit wordt geformaliseerd door middel van een selectiefunctie. [37] Laat ons voorlopig de definitie van een *selectiefunctie* overnemen uit [AGM85].

Definitie 83.
Een AGM-selectiefunctie *voor* Γ *is een functie* γ *zodanig dat:*

- *Als* $\Gamma \perp A \neq \varnothing$ *, dan* $\varnothing \neq \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq \Gamma \perp A$.
- *In het andere geval,* $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$.

$\gamma(\Gamma \perp A)$ levert dus steeds een verzameling van (een of meerdere) verzamelingen op.

Als **CL** de onderliggende logica is, dan wordt $\Gamma \perp A = \varnothing$ enkel bekomen als A een **CL**-stelling is: $\vdash_{\mathbf{CL}} A$. [38] Als **AL** de onderliggende logica is, worden we geconfronteerd met de dubbelzinnige betekenis van "een stelling zijn van **AL**", zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. [39]

Voorbeeld 1. Laat $\Gamma = \{p, {\sim}p, {\sim}p \vee q, {\sim}q\}$. Omdat enkel $!p$ een minimaal *Dab*-gevolg is van Γ, geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} !q \supset r$. Er geldt natuurlijk ook dat $\varnothing \vdash_{\mathbf{AL}} !q \supset r$ (in alle **AL**-modellen van $\varnothing$ is $!q$ vals). Maar $\Gamma \perp (!q \supset r) = \{\{p, {\sim}p \vee q, {\sim}q\}\}$ (en dus niet $\{\Gamma\}$, ondanks het feit dat $!q \supset r$ een 'stelling' is), aangezien $\{p, {\sim}p \vee q, {\sim}q\} \nvdash_{\mathbf{AL}} !q \supset r$. Merk ook op dat, hoewel $\varnothing \vdash_{\mathbf{AL}} !p \supset q$, $\Gamma \nvdash_{\mathbf{AL}} !p \supset q$. Bijgevolg $\Gamma \perp (!p \supset q) = \{\Gamma\}$ (maar dus niet omwille van het feit, zoals voor **CL**, dat we niet kunnen vermijden dat $!p \supset q$ uit Γ volgt). [40]

37. De definitie van een selectiefunctie wordt traditioneel zo algemeen mogelijk gehouden. In de literatuur wordt heel wat aandacht besteed aan het concreter invullen van deze selectiefunctie, en is een ganse classificatie ontwikkeld. Hoe de abstracte selectiefunctie wordt ingevuld, is echter niet zo centraal (voor bepaalde klassen van selectiefuncties zal bijv. de contractie-operatie aan een aantal bijkomende eigenschappen voldoen, andere klassen van selectiefuncties leveren dan weer andere bijkomende eigenschappen op). In dit hoofdstuk houden we de selectiefunctie zo algemeen mogelijk.
38. Let wel: $\Gamma \perp A = \varnothing$ is niet hetzelfde als $\Gamma \perp A = \{\varnothing\}$.
39. Dat "stelling zijn van een adaptieve logica" op zich ambigu is, is een gekende vaststelling voor alle adaptieve logica's (zie bijv. [Bat00b]). Dit is natuurlijk geen probleem voor de adaptieve logica op zich, maar wijst er enkel op dat we voorzichtig moeten zijn in adaptieve wateren.
40. Als A een **CLuN**-stelling is, verloopt alles wel analoog met de bepalingen voor **CL**.

Om de dubbelzinnigheid weg te werken, moeten we een onderscheid maken tussen de volgende situaties. Aan de ene kant, kunnen we met "A is een **AL**-stelling" bedoelen dat $\varnothing \vdash_{\mathbf{AL}} A$ (A is **AL**-afleidbaar uit de lege verzameling), en dan valt de verzameling **AL**-stellingen samen met de verzameling **CL**-stellingen. Aan de andere kant, als we met "A is een **AL**-stelling" bedoelen dat, voor alle verzamelingen Γ, $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} A$, dan valt de verzameling **AL**-stellingen samen met de verzameling **CLuN**-stellingen.

We bepalen nu $\mathcal{T}(\Gamma)$, de verzameling van **AL**-gevolgen die afleidbaar zijn uit alle deelverzamelingen (inclusief $\varnothing$) van een eindige verzameling Γ:

Definitie 84. *Waar Γ een eindige verzameling is, laat*

$$\mathcal{T}(\Gamma) = \bigcap \{ Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma') \mid \varnothing \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma \}.$$

De verzameling $\mathcal{T}(\Gamma)$ bevat die **CL**-stellingen die **AL**-afleidbaar zijn uit elke deelverzameling van Γ (inclusief de lege verzameling). Als Γ consistent is, dan is $\mathcal{T}(\Gamma) = Cn_{\mathbf{AL}}(\varnothing)$ de verzameling **CL**-stellingen. Het is duidelijk dat, voor elke eindige niet-lege verzameling Γ, $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\varnothing) \subset \mathcal{T}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\varnothing) = Cn_{\mathbf{CL}}(\varnothing)$.[41] Als Γ inconsistent is, dan $\mathcal{T}(\Gamma) \subset Cn_{\mathbf{AL}}(\varnothing)$. Uit definitie 82 (p. 179) volgt dat, als $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $\Gamma \perp A \neq \varnothing$ (ook als A afleidbaar is uit elke deelverzameling van Γ, behalve uit $\varnothing$, dan is $\Gamma \perp A = \{\varnothing\} \neq \varnothing$).

In de AGM-aanpak kan een contractie bekomen worden door het nemen van de doorsnede van alle 'beste' (of geprefereerde) deelverzamelingen van Γ waaruit A niet afleidbaar is:

Definitie 85. *[AGM85] Voor elke wff A, wordt de operatie van* 'partial meet' contractie *op een 'belief base' Γ, en bepaald door de selectiefunctie γ, gegeven door:*

$$\Gamma \sim_{\gamma} A = \bigcap \gamma(\Gamma \perp A).$$

Mochten we deze definitie gewoon overnemen, zouden we – omdat **AL** een niet-monotone logica is – vrij snel in de problemen komen. Veronderstel immers dat $\Gamma = \{q \vee !p \vee !r, !p, !r, q \vee !s \vee !t, !p \supset q, !r \supset q\}$. Dan zijn $!p$ en $!r$ de minimale Dab-gevolgen van Γ, en geldt dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} q$. De restverzameling $\Gamma \perp q$ bevat $\Theta_1 = \{q \vee !p \vee !r, !p, !r\}$, $\Theta_2 = \{q \vee !p \vee !r, !r, !p \supset q\}$,

41. We veronderstellen dat Γ niet-triviaal is, i.e. **CLuN**-modellen heeft ($\perp$ en $\neg$ komen niet voor in Γ).

$\Theta_3 = \{q \vee !p \vee !r, !p, !r \supset q\}$ en $\Theta_4 = \{!p \supset q, !r \supset q\}$. Veronderstel dat onze selectiefunctie γ ons $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$ oplevert. Dan $\bigcap \gamma(\Gamma \perp q) = \{q \vee !p \vee !r\}$, waaruit q **AL**-afleidbaar is!

De oorzaak van het probleem ligt in het feit dat, hoewel A uit geen enkel element van de restverzameling $\Gamma \perp A$ afleidbaar is, het toch mogelijk is – aangezien **AL** een niet-monotone logica is – dat A afleidbaar is uit een deelverzameling van een element van $\Gamma \perp A$ (die bekomen wordt door het nemen van de doorsnede met een of meerdere elementen van de restverzameling). Daarom moet de definitie van de selectiefunctie γ aangepast worden, wil men ze zinnig kunnen toepassen in de context van een inconsistentie-adaptieve logica: er moet immers rekening worden gehouden met de minimale *Dab*-gevolgen van Γ. De verzameling van minimale *Dab*-gevolgen van een verzameling Γ kan als volgt bepaald worden:

Definitie 86. *$MDab(\Gamma)$ is de verzameling* minimale *Dab-gevolgen van een verzameling Γ: $MDab(\Gamma) = \{Dab(\Delta) \mid Dab(\Delta)$ is een minimaal Dab-gevolg van $\Gamma\}$.*

Nu kunnen we $C(\Sigma)$, de verzameling van minimale *Dab*-gevolgen die alle elementen van een verzameling van verzamelingen, Σ, gemeenschappelijk hebben, als volgt bepalen:

Definitie 87.
Laat $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ verzamelingen wffs zijn, en laat $\Sigma = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$. De verzameling $C(\Sigma)$ bevat de Dab-formules die een minimaal *Dab-gevolg zijn van* elk *element van Σ:*

$$C(\Sigma) = \bigcap \{MDab(\Psi_i) \mid \Psi_i \in \Sigma\}.$$

Nu kunnen we een aangepaste definitie van de selectiefunctie γ geven, die wel geschikt is voor het gebruiken van **AL** als onderliggende logica:

Definitie 88. *Een* selectiefunctie *voor Γ is een functie γ zodanig dat:*

- *Als $\Gamma \perp A \neq \emptyset$, dan is $\gamma(\Gamma \perp A)$ een niet-lege deelverzameling $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ van $\Gamma \perp A$, zodanig dat, voor een of andere $\Psi_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$, $MDab(\Psi_i) = C(\gamma(\Gamma \perp A))$ het geval is.*

- *Als $\Gamma \perp A = \emptyset$, dan $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$.*

De door een selectiefunctie γ geselecteerde verzameling $\gamma(\Gamma \perp A)$ moet, als $\Gamma \perp A \neq \emptyset$, steeds een element Ψ_i van $\Gamma \perp A$ bevatten zodanig dat $MDab(\Psi_i)$ gelijk is aan de verzameling van *Dab*-formules die een minimaal *Dab*-gevolg zijn van elk element van $\gamma(\Gamma \perp A)$. Aan de eis kan steeds voldaan worden, desnoods door slechts één lid van $\Gamma \perp A$ te selecteren. Als Γ consistent is, dan is de eis vanzelfsprekend voldaan, en komt de selectiefunctie neer op een AGM-selectiefunctie.

Ondanks de gewijzigde bepaling van een selectiefunctie kan de AGM-aanpak niet zomaar gevolgd worden: 'partial meet' contractie van Γ met de formule A, $\Gamma \sim_\gamma A$, kan niet eenvoudigweg bepaald worden als in definitie 85 (aangepast voor de nieuwe selectiefunctie). Hieronder wordt met een eenvoudig voorbeeld aangetoond dat 'partial meet' contractie, bepaald door definitie 85 (op basis van de gewijzigde selectiefunctie), zelfs niet voldoet aan het succes-postulaat. Dit houdt in dat niet kan worden gegarandeerd dat, als we de contractie-operatie voor een formule A op een verzameling Γ uitvoeren (hierbij is de intentie is dat A niet afleidbaar zal zijn uit de bekomen verzameling), dan A ook effectief niet afleidbaar zal zijn uit de bekomen verzameling. [42] Het spreekt voor zich dat dit soort van contractie-operatie geen zinnige operatie is, en het bevestigt dat het werken met een niet-monotone logica een aantal complicaties met zich meebrengt (zoals natuurlijk te verwachten viel). We geven eerst het beloofde voorbeeld:

Voorbeeld 2. 'Partial meet' contractie voldoet niet aan het succes-postulaat (het is mogelijk dat $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \div A)$).

Laat

$$\Gamma = \{p \wedge r, p \wedge s, {\sim}p \wedge r, {\sim}p \wedge s, r \supset t, s \supset t, t \vee (p \wedge {\sim}p)\}.$$

Dan

$$\begin{aligned}\Gamma \perp t = \{ & \{p \wedge r, p \wedge s, {\sim}p \wedge r, {\sim}p \wedge s, t \vee (p \wedge {\sim}p)\},\\ & \{p \wedge r, {\sim}p \wedge r, s \supset t, t \vee (p \wedge {\sim}p)\},\\ & \{p \wedge s, {\sim}p \wedge s, r \supset t, t \vee (p \wedge {\sim}p)\},\\ & \{r \supset t, s \supset t\}\}.\end{aligned}$$

42. Het geval dat A een stelling is, laten we even buiten beschouwing.

Veronderstel nu dat de volgende geprefereerde leden door γ geselecteerd worden:

$$\begin{aligned}\gamma(\Gamma \perp t) \quad = \quad & \{\{p \wedge r, {\sim}p \wedge r, s \supset t, t \vee (p \wedge {\sim}p)\}, \\ & \{p \wedge s, {\sim}p \wedge s, r \supset t, t \vee (p \wedge {\sim}p)\}\}.\end{aligned}$$

Dan

$$\bigcap \gamma(\Gamma \perp t) \quad = \quad \{t \vee (p \wedge {\sim}p)\}$$

waaruit t **AL**-afleidbaar is!

Het probleem is dat, hoewel uit elk lid van $\gamma(\Gamma \perp t)$ op zich hetzelfde minimale *Dab*-gevolg $p \wedge {\sim}p$ afleidbaar is, $p \wedge {\sim}p$ niet afleidbaar is uit hun doorsnede. Het voorbeeld suggereert dat we de minimale *Dab*-gevolgen die alle geprefereerde leden van $\Gamma \perp A$ gemeen hebben, moeten toevoegen aan de doorsnede van die geprefereerde leden. Dit is precies wat we zullen doen in de volgende afdeling.

'Partial Meet and Join' Contractie

Dat 'partial meet' contractie, zoals hierboven gedefinieerd, niet voldoet aan het succes-postulaat, ligt aan het feit dat het mogelijk is dat een *Dab*-formule een minimaal *Dab*-gevolg is van elke geprefereerde restant (waardoor bijv. het finaal afleidbaar zijn van A geblokkeerd wordt), maar dat deze *Dab*-formule geen minimaal *Dab*-gevolg is van de doorsnede van de geprefereerde restanten (waardoor het mogelijk is dat A finaal afleidbaar is uit die doorsnede). Het werken met deductief gesloten verzamelingen zou dit euvel kunnen verhelpen, maar veroorzaakt dan weer andere problemen (cf. supra).

We definiëren eerst $N(\gamma(\Gamma \perp A))$, de verzameling van *noodzakelijke* minimale *Dab*-formules voor de verzameling $\gamma(\Gamma \perp A)$. $N(\gamma(\Gamma \perp A))$ is de verzameling van die minimale *Dab*-gevolgen van alle leden van $\gamma(\Gamma \perp A)$ die geen minimale *Dab*-gevolgen zijn van $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$.

Definitie 89. $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$.

De reden waarom we zullen werken met $N(\gamma(\Gamma \perp A))$ in plaats van met $C(\gamma(\Gamma \perp A))$, is dat we werken in de geest van de AGM-credo's, en dus zo weinig mogelijk willen wijzigen aan een oorspronkelijke 'belief base' (principe van 'minimum mutilation'). Dit impliceert dat we ervoor kiezen om enkel die *Dab*-formules toe te voegen die echt 'noodzakelijk' zijn.

Definitie 90. *Laat Γ een verzameling zinnen zijn en γ een selectiefunctie voor Γ. De* 'partial meet and join' *contractie van Γ met A, die gegenereerd wordt door γ, is de operatie $\sim_\gamma$ zodanig dat voor alle zinnen A:*

$$\Gamma \sim_\gamma A = (\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A)).$$

Een operatie $\div$ op Γ is een 'partial meet and join' contractie als en alleen als er een selectiefunctie γ voor Γ bestaat zodanig dat voor alle zinnen A: $\Gamma \div A = \Gamma \sim_\gamma A$.

Merk op dat als $\gamma(\Gamma \perp A)$ een singleton is, bijv. $\{\Gamma'\}$, dan $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = \emptyset$, en dus $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma'$.

Voor elke *eindige* 'belief base' Γ geldt de volgende eigenschap: [43]

Eigenschap 36 (Bovengrens eigenschap). *Als $\Theta \subseteq \Gamma$, en $\Theta \nvdash_{\mathbf{AL}} A$, dan is er een Θ' zodanig dat $\Theta \subseteq \Theta'$ en $\Theta' \in \Gamma \perp A$.*

Mochten we, in de observatie hieronder, **AL** vervangen door **CL**, dan zouden we kunnen bewijzen (zie bijv. [Han99, p. 39]) dat de twee voorwaarden equivalent zijn. Maar met **AL** als onderliggende logica krijgen we:

Observatie 1. *De volgende twee voorwaarden zijn niet equivalent:*

(*1*) $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$

(*2*) *Voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ: $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ alss $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B$.*

Veronderstel dat $\Gamma = \{!p, !p \vee r, !p \vee t\}$. Dan $\Gamma \perp r = \Gamma \perp t = \{\Gamma\}$. Maar er is een deelverzameling Γ' van Γ, bijv. $\Gamma' = \{!p \vee r\}$ waarvoor $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} r$

43. De 'upper bound property' voor oneindige verzamelingen en een (supra-)klassieke gevolg-relatie wordt (voor het eerst) als postulaat vermeld in [AM82]. De eigenschap volgt (voor dergelijke gevolgrelaties) uit compactheid en het keuze-axioma. Omdat we werken met (eindige) 'belief bases', is de eigenschap vanzelfsprekend. Omdat **AL** niet (afleidbaarheids-) compact is (zie bijv. [Bat00b]), zouden we, mochten we toch werken met 'belief sets', hier in de problemen kunnen komen.

maar $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} t$. Bijgevolg zijn beide voorwaarden (als de onderliggende logica **AL** is) niet equivalent. [44]

Er kan wel gemakkelijk aangetoond worden dat de tweede voorwaarde de eerste impliceert:

Observatie 2. *Als voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt dat $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ alss $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B$, dan $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$.*

Bovenstaande observatie volgt onmiddellijk uit onderstaande equivalentie.

Observatie 3. *De volgende beweringen zijn equivalent:*

(*1*) $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$

(*2*) *Voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt dat:*
$\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ *en voor alle* Γ'' *zodanig dat* $\Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma$, $\Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} A$
als en alleen als
$\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B$ *en voor alle* Γ'' *zodanig dat* $\Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma$, $\Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} B$.

Om bovenstaande te bewijzen volstaat het op te merken dat de tweede bewering equivalent is met de volgende bewering: voor alle $\Gamma' \subseteq \Gamma$ geldt dat $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ alss $\Gamma' \in \Gamma \perp B$.

Lemma 37. *Als $Dab(\Delta) \in MDab(\Gamma)$, dan geldt voor alle verzamelingen Γ' waarvoor $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma') \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$: $Dab(\Delta) \in MDab(\Gamma')$ of $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$.*

BEWIJS. — Veronderstel dat er een verzameling Γ' bestaat zodanig dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma') \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$, $Dab(\Delta) \notin MDab(\Gamma')$ en $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$. Dan moet er een verzameling abnormaliteiten Δ' bestaan, waarbij $\Delta' \subset \Delta$, zodanig dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta')$. Aangezien **CLuN** monotoon is, volgt hieruit dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta')$, waarbij $\Delta' \subset \Delta$. Bijgevolg, $Dab(\Delta) \notin MDab(\Gamma)$. □

We zijn nu gewapend om het bewijs van de 'klassieke' postulaten van rationaliteit aan te vatten (we zullen onmiddellijk zien dat een aantal wijzigingen moeten worden aangebracht). Daarna zal ook een representatie-

44. Zoals reeds opgemerkt werd, zijn de eigenschappen wel equivalent als de onderliggende logica **CL** is. Dit levert dan een bijzonder krachtig theorema op, waarmee heel wat verdere eigenschappen gemakkelijk kunnen worden bewezen.

theorema worden bewezen. Pas daarna besteden we enige aandacht aan de revisie-operatie.

6.8. Postulaten voor contractie

De interpretatie van onderstaande postulaten is volkomen analoog aan de hoger gegeven interpretatie van de contractie-postulaten (voor deductief gesloten verzamelingen).

Postulaat 1 (Succes). *Als* $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, *dan* $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \div A)$.

Het resultaat van de contractie van een basis Γ met A moet een nieuwe basis zijn waaruit A niet afleidbaar is.

Theorema 38.
'Partial meet and join' contractie voldoet aan het Succes-*postulaat.*

BEWIJS. — Laat γ een selectiefunctie voor Γ zijn, en veronderstel dat $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. We moeten aantonen dat $\Gamma \sim_\gamma A \nvdash_{\mathbf{AL}} A$.

Omdat $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, is $\Gamma \perp A$ niet leeg. Dan volgt hieruit, via de definitie van een selectiefunctie, dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ een niet-lege deelverzameling is van $\Gamma \perp A$. Laat $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$, $n \geqslant 1$. Via de definitie van een selectiefunctie volgt dat er een $\Theta_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$ bestaat zodanig dat $MDab(\Theta_i) = C(\gamma(\Gamma \perp A))$. Dan weten we ook dat $\Theta_i \in \Gamma \perp A$, en dus dat $\Theta_i \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. Uit $\Theta_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$ volgt met de verzamelingenleer dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq \Theta_i$. Nu moeten we bewijzen dat uit $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq \Theta_i$ en $\Theta_i \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ volgt dat $(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup (MDab(\Theta_i) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))) \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. Om het bewijs leesbaar te houden, voeren we de verzamelingen Ψ_1 en Ψ_2 in: laat $\Psi_1 = \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$ en $\Psi_2 = \Psi_1 \cup (MDab(\Theta_i) \setminus MDab(\Psi_1))$.

We weten dat $\Psi_1 \subseteq \Theta_i$ en dat

$$(\Theta_i \cup (MDab(\Theta_i) \setminus MDab(\Psi_1))) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i).$$

Bijgevolg, $\Psi_2 \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i)$. Aangezien **CLuN** een monotone logica is, geldt dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i))$. Aangezien **CLuN** idempotent is, geldt dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i)$.

Veronderstel nu dat $\Psi_2 \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Dan volgt hieruit dat er een (mogelijk lege) verzameling abnormaliteiten Δ bestaat, zodanig dat $\Psi_2 \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$, en Ψ_2 is 'safe' m.b.t. Δ (definitie 80 en theorema 25 (p. 172)). Samen met $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i)$ volgt hieruit dat $\Theta_i \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$. Aangezien $\Theta_i \nvdash_{\mathbf{AL}} A$, is Θ_i niet 'safe' m.b.t. Δ: er moet een verzameling abnormaliteiten Ξ bestaan, zodanig dat $Dab(\Xi) \in MDab(\Theta_i)$ en $\Delta \cap \Xi \neq \varnothing$.

Uit $Dab(\Xi) \in MDab(\Theta_i)$ volgt dat $Dab(\Xi) \in MDab(Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i))$. Hieruit volgt, samen met het feit dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i)$, met lemma 37 dat $Dab(\Xi) \in MDab(\Psi_2)$ of $\Psi_2 \nvdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Xi)$. Aangezien Ψ_2 safe is m.b.t. Δ en aangezien $\Delta \cap \Xi \neq \varnothing$, kunnen we afleiden dat $Dab(\Xi) \notin MDab(\Psi_2)$ (en dus ook dat $\Psi_2 \nvdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Xi)$).

Veronderstel nu dat $MDab(\Theta_i) \subseteq MDab(\Psi_2)$ niet het geval is. Dan moet er een verzameling van abnormaliteiten Υ bestaan zodanig dat $Dab(\Upsilon) \in MDab(\Theta_i)$, maar $Dab(\Upsilon) \notin MDab(\Psi_2)$. Uit $Dab(\Upsilon) \in MDab(\Theta_i)$ volgt, gegeven de definitie van Ψ_2 hierboven, dat $Dab(\Upsilon) \in \Psi_2$, of $Dab(\Upsilon) \in MDab(\Psi_1)$. In beide gevallen geldt dat $Dab(\Upsilon) \in Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2)$. Bijgevolg, als $Dab(\Upsilon) \notin MDab(\Psi_2)$, moet er een niet-lege deelverzameling Υ' van Υ bestaan zodanig dat $\Psi_2 \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Upsilon')$. Maar dan, aangezien $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Psi_2) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Theta_i)$, volgt ook dat $\Theta_i \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Upsilon')$ en $Dab(\Upsilon) \notin MDab(\Theta_i)$, wat onze veronderstelling tegenspreekt. Bijgevolg kunnen we besluiten dat $MDab(\Theta_i) \subseteq MDab(\Psi_2)$, en dus dat $Dab(\Xi) \in MDab(\Psi_2)$.

Maar nu hebben we dat zowel $Dab(\Xi) \in MDab(\Psi_2)$ als $Dab(\Xi) \notin MDab(\Psi_2)$, wat onmogelijk is. We mogen dus besluiten dat

$$\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \ \cup \ N(\gamma(\Gamma \perp A)) \nvdash_{\mathbf{AL}} A,$$

en dus $\Gamma \sim_\gamma A \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. $\square$

Postulaat 2 (Insluiting). $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$

Het idee hierachter is dat een contractie-operatie op Γ steeds een basis oplevert die een deelverzameling is van de oorspronkelijke basis Γ. We tonen onmiddellijk aan dat dit voor 'partial meet and join' contractie niet steeds het geval is.

Observatie 4.
'Partial meet and join' contractie voldoet niet aan het Insluiting-*postulaat.*

Het is inderdaad mogelijk dat $(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A)) \nsubseteq \Gamma$. Voor een eenvoudig voorbeeld grijpen we terug naar het eerder gegeven voorbeeld 2 (p. 183). Daar is $\bigcap \gamma(\Gamma \perp t) = \{t \vee (p \wedge {\sim} p)\}$ en $C(\gamma(\Gamma \perp t)) = \{p \wedge {\sim} p\} = N(\gamma(\Gamma \perp t))$. Bijgevolg $\Gamma \sim_\gamma t = \{t \vee (p \wedge {\sim} p), p \wedge {\sim} p\} \nsubseteq \Gamma$.

Het is ook gemakkelijk aan te tonen dat 'partial meet and join' contractie ook niet aan een eigenschap voldoet die zwakker is dan *Insluiting*, namelijk *Logische Insluiting*. [45]

Postulaat 3 (Logische Insluiting). $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \div A) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$.

Observatie 5. *'Partial meet and join' contractie voldoet niet aan het* Logische Insluiting-*postulaat.*

Dat logische insluiting niet geldt heeft vanzelfsprekend alles te maken met het niet-monotone karakter van **AL**. We geven een eenvoudig voorbeeld: laat $\Gamma = \{p, {\sim} p, p \vee q\}$. Dan $\Gamma \nvdash_{\mathbf{AL}} q$. Dan is $\Gamma \perp p = \{\{{\sim} p, p \vee q\}\} = \gamma(\Gamma \perp p)$. Aangezien $C(\gamma(\Gamma \perp p) = N(\gamma(\Gamma \perp p) = \emptyset$, bekomen we dat $\Gamma \sim_\gamma p = \{{\sim} p, p \vee q\}$, en dus $\Gamma \sim_\gamma p \vdash_{\mathbf{AL}} q$. Bijgevolg is niet algemeen geldig dat $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$.

Vanzelfsprekend zijn het niet zomaar om het even welke formules die 'plots' **AL**-afleidbaar worden uit $\Gamma \sim_\gamma A$, terwijl ze niet **AL**-afleidbaar waren uit Γ. Het zijn namelijk die formules die al 'afleidbaar' waren uit Γ, op een eindige disjunctie van abnormaliteiten na. De afleiding werd geblokkeerd door een *Dab*-formule die **CLuN**-afleidbaar was uit Γ. Door over te gaan naar $\Gamma \sim_\gamma A$ worden een of meerdere elementen van Γ 'weggegooid' en zijn één of meerdere *Dab*-formules niet langer afleidbaar. Dat zorgt er dan voor dat de afleiding van een of meerdere formules 'gedeblokkeerd' wordt. [46]

45. Deze eigenschap voor de contractie-operator wordt voor het eerst vermeld in [Han89] (vanzelfsprekend niet voor **AL**).
46. Het zou interessant zijn om deze formules precies in kaart te brengen, bijv. omdat een 'belief base' dan zou kunnen opgedeeld worden in een 'stabiel' gedeelte en een 'volatiel' gedeelte, waardoor ook in de meta-theorie een grotere controle zou kunnen verkregen worden. Dit is vooral belangrijk voor de revisie-operatie, omdat dan nog een bijkomende dynamiek ontstaat (ditmaal veroorzaakt door de nieuw binnengekomen

Maar we kunnen wel bewijzen dat 'partial meet and join' contractie voldoet aan de eigenschap *quasi-A-insluiting*. We introduceren eerst de notie *quasi-A-deelverzameling*:

Definitie 91. *Een verzameling* Θ *is een* quasi-A-deelverzameling *van een eindige verzameling* Γ, $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma$ *(waarbij* $A \in \mathcal{W}$*), alss*

- $\Theta \subseteq \Gamma$*; of*
- *er is een* $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ *zodanig dat* $\Theta \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$ *en* $\Theta \setminus \Gamma = MDab(\Gamma') \setminus MDab(\Theta \cap \Gamma)$.

Dat $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma$ komt er intuïtief op neer dat Θ een deelverzameling is van Γ, op een eindig aantal specifieke (namelijk bepaald door Γ en A) *Dab*-formules na. Als $\Gamma \nvdash_{\mathbf{AL}} A$, of als Γ consistent is, dan is Θ een quasi-A-deelverzameling van Γ alss Θ een deelverzameling is van Γ.

Observatie 6. *Als* $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma$ *en* $\Theta \nvdash_{\mathbf{AL}} A$*, dan is er een deelverzameling* Γ' *van* Γ *zodanig dat* $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma'$ *en* $\Gamma' \in \Gamma \perp A$.

BEWIJS. — Laat $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma$ en $\Theta \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. Uit definitie 91 volgt dat $\Theta \subseteq \Gamma$, of dat er een $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ bestaat zodanig dat $(\Theta \cap \Gamma) \subseteq \Gamma'$, en $\Theta \setminus \Gamma = MDab(\Gamma') \setminus MDab(\Theta \cap \Gamma)$. Als $\Theta \subseteq \Gamma$, dan is er een deelverzameling Γ' van Γ, $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ en $\Theta \subseteq \Gamma'$, en dus $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma'$, en we zijn klaar. Voor het andere geval volstaat het vast te stellen dat we, wanneer $\Gamma' \in \Gamma \perp A$, bekomen dat $\Gamma' \perp A = \{\Gamma'\}$, en uit $\Gamma' \subseteq \Gamma$ en $(\Theta \cap \Gamma) \subseteq \Gamma'$ kunnen afleiden dat $\Theta \cap \Gamma = \Theta \cap \Gamma'$ en dat $\Theta \setminus \Gamma = \Theta \setminus \Gamma'$. Daaruit volgt dat $\Theta \subseteq^A_Q \Gamma'$. □

Het onderstaande lemma zal erg nuttig zijn voor een aantal bewijzen die volgen.

Lemma 39. *Voor elke zin* A *en voor elke eindige verzameling* Γ*:*

$$\Gamma \cap N(\gamma(\Gamma \perp A)) = \varnothing.$$

BEWIJS. — Veronderstel dat $\Gamma \cap N(\gamma(\Gamma \perp A)) \neq \varnothing$. We weten dat een niet-lege verzameling $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$ enkel *Dab*-formules bevat. Daarom bestaat er een niet-lege verzameling abnormaliteiten Δ ($\Delta \neq \varnothing$) zodanig dat $Dab(\Delta) \in \Gamma$, $Dab(\Delta) \in C(\gamma(\Gamma \perp$

formule).

$A)$) en $Dab(\Delta) \notin MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$. Uit de definitie van $\gamma(\Gamma \perp A)$ weten we dat er een $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ bestaat zodanig dat $MDab(\Gamma') = C(\gamma(\Gamma \perp A))$. Dus $Dab(\Delta) \in MDab(\Gamma')$. Er volgt ook uit dat voor elke $\Theta \in \gamma(\Gamma \perp A)$ geldt dat $\Theta \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$.

Er volgt bovendien dat $Dab(\Delta) \in \Theta$, voor elke $\Theta \in \gamma(\Gamma \perp A)$. Veronderstel immers dat dit niet zo was. Dan zou er een $\Theta \in \gamma(\Gamma \perp A)$ en $Dab(\Delta) \notin \Theta$. Als $\Theta \in \gamma(\Gamma \perp A)$, dan ook $\Theta \in \Gamma \perp A$. Uit de definitie van een restverzameling volgt dat voor elke Θ' zodanig dat $\Theta \subset \Theta' \subseteq \Gamma$, geldt dat $\Theta' \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Aangezien $Dab(\Delta) \in \Gamma$ en $Dab(\Delta) \notin \Theta$, moet gelden dat $\Theta \cup \{Dab(\Delta)\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Uit $\Theta \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta)$ en $\Theta \cup \{Dab(\Delta)\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$ volgt met Cautious Cut dat $\Theta \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Dit is onmogelijk, want $\Theta \in \Gamma \perp A$. Daarom kunnen we besluiten dat $Dab(\Delta) \in \Theta$, voor alle $\Theta \in \gamma(\Gamma \perp A)$.

Hieruit volgt dat $Dab(\Delta) \in \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$. Aangezien we weten dat $Dab(\Delta) \notin MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$, moet er een verzameling van abnormaliteiten $\Delta' \subset \Delta$ zijn zodanig dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta')$. Aangezien **CLuN** een monotone logica is, volgt hieruit dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} Dab(\Delta')$. Dit is strijdig met onze vaststelling dat $Dab(\Delta) \in MDab(\Gamma')$. Bijgevolg kunnen we besluiten dat $\Gamma \cap N(\gamma(\Gamma \perp A)) = \varnothing$. □

We kunnen nu de eigenschap *quasi-A-insluiting* voor "belief bases" definiëren:

Postulaat 4 (Quasi-A-insluiting). $\Gamma \div A \subseteq^A_Q \Gamma$.

Het idee hierachter is dat een contractie-operatie op Γ steeds een basis oplevert die, op een eindig aantal abnormaliteiten na, een deelverzameling is van de oorspronkelijke basis Γ. De abnormaliteiten zijn bovendien *Dab*-gevolgen van de oorspronkelijke basis Γ.

Theorema 40. *'Partial meet and join' contractie voldoet aan het* quasi-A-insluiting-*postulaat.*

BEWIJS. — Laat γ een selectiefunctie voor Γ zijn. We moeten aantonen dat, voor alle A, geldt dat $(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A)) \subseteq^A_Q \Gamma$. Er zijn twee gevallen.

Geval 1: $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Dan is $\Gamma \perp A$ de lege verzameling. Uit de definitie van een selectiefunctie volgt dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$, zodat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma$. Bijgevolg, $\Gamma \sim_\gamma A \subseteq^A_Q \Gamma$.

Geval 2: $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Dan is $\gamma(\Gamma \perp A)$ een niet-lege deelverzameling van $\Gamma \perp A$. Laat $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$, $n \geqslant 1$. We weten dat voor een of andere $\Theta_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$, $MDab(\Theta_i) = C(\gamma(\Gamma \perp A))$. Aangezien $\Theta_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$, volgt uit de verzamelingenleer dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq \Theta_i$. Dan bekomen we, via de verzamelingenleer en lemma 39, dat $[\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))] \cap \Gamma \subseteq \Theta_i$.

We moeten nu bewijzen dat

$$(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma = MDab(\Theta_i) \setminus MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma).$$

Uit de definitie van $\Gamma \sim_\gamma A$ en lemma 39 volgt dat

$$\begin{aligned}(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma &= N(\gamma(\Gamma \perp A)) \\ &= C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \\ &= MDab(\Theta_i) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)).\end{aligned}$$

Er volgt ook dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma = \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$, en bijgevolg

$$MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma) = MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)).$$

Hieruit volgt dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma = MDab(\Theta_i) \setminus MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma)$. Aangezien ook $[\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))] \cap \Gamma \subseteq \Theta_i$ en $\Theta_i \in \Gamma \perp A$, kunnen we afleiden dat $\Gamma \sim_\gamma A \subseteq_Q^A \Gamma$. □

Postulaat 5 (Relevantie).
Als $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma \div A$, dan is er een verzameling $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ zodanig dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$, $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$ en $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$ maar $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma' \cup \{B\})$.

Het idee hierachter is dat bij een contractie-operatie op de basis Γ niks zomaar (i.e. zonder specifieke reden) uit Γ mag worden verwijderd. Met andere woorden, als een contractie-operatie op Γ met A de basis Γ' oplevert en B tot Γ behoorde maar niet tot Γ', dan is er minstens één restant ($\in \Gamma \perp A$) waaruit, mocht B er aan worden toegevoegd, A afleidbaar zou zijn.

Theorema 41.
'Partial meet and join' contractie voldoet aan het Relevantie-*postulaat.*

BEWIJS. — Laat γ een selectiefunctie voor Γ zijn. We moeten aantonen dat voor alle A, als $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma \sim_\gamma A$, dan is er een verzameling

$\Gamma' \in \Gamma \perp A$ zodanig dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$ en $((\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma) \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma)$ en $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$ maar $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma' \cup \{B\})$. Er zijn opnieuw twee gevallen, naargelang al of niet geldt dat $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$.

Geval 1: $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Dan $\Gamma \perp A = \varnothing$. Hieruit volgt dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$ en $\Gamma \sim_\gamma A = (\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup [C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))] = \Gamma$. Hieruit kan afgeleid worden dat er geen B kan zijn zodanig dat $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma \sim_\gamma A$, en dus is het Relevantie-postulaat voldaan.

Geval 2: $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Dan volgt hieruit dat $\Gamma \perp A \neq \varnothing$, en dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ een niet-lege deelverzameling is van $\Gamma \perp A$. We weten dat

$$\Gamma \sim_\gamma A = (\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup [C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))].$$

Uit $B \notin \Gamma \sim_\gamma A$ volgt dat $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$. Bijgevolg is er een of andere $\Gamma' \in \gamma(\Gamma \perp A)$ zodanig dat $B \notin \Gamma'$. Uit $\Gamma' \in \gamma(\Gamma \perp A)$ volgt dat $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$. Verder volgt er, omdat $\Gamma' \in \gamma(\Gamma \perp A)$ en $B \in \Gamma$, dat $\Gamma' \subset \Gamma' \cup \{B\} \subseteq \Gamma$ en, uit de definitie van een restverzameling, dat $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Uit $\Gamma' \in \gamma(\Gamma \perp A)$, volgt ook dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq \Gamma' \subseteq \Gamma$. Met lemma 39 (p. 190) volgt dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma = \bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \cap \Gamma$. We kunnen dus besluiten dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$.

Is $(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma$ het geval? Uit definitie 90 (p. 185) en lemma 39 (p. 190) kunnen we afleiden dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma = N(\gamma(\Gamma \perp A))$ en $MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma) = MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$. Uit het feit dat $C(\gamma(\Gamma \perp A)) \subseteq MDab(\Gamma')$, de definitie van $N(\gamma(\Gamma \perp A))$ en de verzamelingenleer, volgt dan dat $N(\gamma(\Gamma \perp A)) \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$. Dus geldt er, wegens de hoger afgeleide identiteiten, dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma)$, en dus is ook in dit geval aan het Relevantie-postulaat voldaan. □

Postulaat 6 (Uniformiteit).

Als voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt dat:

$$\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A \text{ en voor alle } \Gamma'' \text{ zodanig dat } \Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} A$$
$$\text{alss}$$
$$\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B \text{ en voor alle } \Gamma'' \text{ zodanig dat } \Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma, \Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} B,$$

dan $\Gamma \div A = \Gamma \div B$.

Theorema 42.

'Partial meet and join' contractie voldoet aan het Uniformiteit-*postulaat.*

BEWIJS. — Laat γ een selectiefunctie zijn voor Γ. Laat A en B twee zinnen zijn zodanig dat er voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt dat: $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ en, voor alle Γ'' zodanig dat $\Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma$, $\Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} A$ alss $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B$ en voor alle Γ'' zodanig dat $\Gamma' \subset \Gamma'' \subseteq \Gamma$, $\Gamma'' \vdash_{\mathbf{AL}} B$. Dan volgt uit observatie 3 (p. 186) dat $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$. Hieruit kunnen we, samen met het feit dat γ gedefinieerd werd voor restverzamelingen van de vorm $\Gamma \perp A$, besluiten dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$, en dus dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) = \bigcap \gamma(\Gamma \perp B)$. Aangezien ook geldt dat $C(\gamma(\Gamma \perp A)) = C(\gamma(\Gamma \perp B))$, volgt er dat $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = N(\gamma(\Gamma \perp B))$. Bijgevolg kunnen we besluiten dat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma \sim_\gamma B$. □

We kunnen ook aantonen dat de AGM-versie van *Uniformiteit* geldt voor onze constructie. Laten we die eigenschap *AGM-Uniformiteit* noemen.

Postulaat 7 (AGM-Uniformiteit). *Als voor alle deelverzamelingen* Γ' *van* Γ *geldt dat* $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$ *alss* $B \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$*, dan* $\Gamma \div A = \Gamma \div B$.

Als twee zinnen A en B uit exact dezelfde deelverzamelingen van Γ afleidbaar zijn, dan moeten contractie van Γ met A en contractie van Γ met B hetzelfde resultaat opleveren.

Theorema 43. *'Partial meet and join' contractie voldoet aan het* AGM-Uniformiteit-*postulaat.*

BEWIJS. — Laat γ een selectiefunctie voor Γ zijn. Laat A en B twee zinnen zijn zodanig dat voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt dat $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$ alss $B \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$. Dan volgt uit observatie 2 (p. 186) dat $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$. Samen met het feit dat γ gedefinieerd werd voor restverzamelingen van de vorm $\Gamma \perp A$, kunnen we hieruit besluiten dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$ en dus dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) = \bigcap \gamma(\Gamma \perp B)$. Dus als $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$ een singleton is, dan is $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma \sim_\gamma B$. Indien niet, dan volgt uit $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$ dat $C(\gamma(\Gamma \perp A)) = C(\gamma(\Gamma \perp B))$, waaruit afgeleid kan worden dat $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = N(\gamma(\Gamma \perp B))$. Bijgevolg is $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma \sim_\gamma B$. □

Merk op dat *AGM-Uniformiteit* ook rechtstreeks kan afgeleid worden uit *Uniformiteit*.

Er kan gemakkelijk worden nagegaan [47] dat, voor consistente Γ, 'partial meet and join'-contractie van Γ met A (op basis van **AL**) samenvalt met 'partial meet'-contractie van Γ met A (op basis van **CL**).

We hebben nu aangetoond dat 'partial meet and join' contractie voldoet aan de (**AL**-versie van de) postulaten van rationaliteit. In de volgende afdeling tonen we aan dat, als een operator voldoet aan de postulaten van rationaliteit, deze operator een 'partial meet and join' contractie-operator is.

6.9. Van de postulaten naar de constructie

Om het bewijs van het volgende theorema te vereenvoudigen, wordt eerst een nieuwe eigenschap geïntroduceerd:

Postulaat 8 (Faling). *Als* $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$, *dan* $\Gamma \div A = \Gamma$.

Faling drukt de volgende maxime uit: als je gevraagd wordt om het onmogelijke te doen, doe dan niets. Met andere woorden, als je gedwongen wordt iets uit een basis te verwijderen wat eigenlijk niet kan worden verwijderd, laat de basis dan ongewijzigd.

Observatie 7. *Als* $\div$ *aan de postulaten* Quasi-A-insluiting *en* Relevantie *voldoet , dan voldoet* $\div$ *ook aan het* Faling-*postulaat.*

Bewijs. — Laat $\div$ een operator voor Γ zijn die aan de postulaten *Quasi-A-insluiting* en *Relevantie* voldoet, en laat $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. We moeten dan aantonen dat $\Gamma \div A = \Gamma$.

Uit $\Gamma \div A \subseteq_Q^A \Gamma$ volgt dat $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$ of dat er een $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ bestaat zodanig dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$, en $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = MDab(\Gamma') \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Aangezien $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$, volgt er dat $\Gamma \perp A = \varnothing$, en bijgevolg is er geen $\Gamma' \in \Gamma \perp A$. Dus $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$. Hieruit volgt dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma = \Gamma \div A$. Dan bekomen we via *Relevantie*: als er geen Γ' is zodanig dat $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ en $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$ en $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Gamma') \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$ en $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$ maar $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma' \cup \{B\})$, dan is er geen enkele B zodanig

47. We laten de oefening aan de lezer.

dat $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma \div A$. Dus $\Gamma \subseteq \Gamma \div A$. Aangezien ook $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$, kunnen we besluiten dat $\Gamma \div A = \Gamma$. □

Theorema 44. *Als de operator $\div$ voor Γ voldoet aan de postulaten van* Succes, Quasi-A-insluiting, Relevantie *en* Uniformiteit, *dan is $\div$ een operator van 'partial meet and join' contractie voor Γ.*

BEWIJS. — Zij $\div$ een operator voor Γ die voldoet aan de postulaten *Succes*, *Quasi-A-insluiting*, *Relevantie* en *Uniformiteit.* Zij γ zodanig dat:

(1) Als $\Gamma \perp A \neq \varnothing$, dan:
$$\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Psi \mid \Psi \in \Gamma \perp A \text{ en } (\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi \text{ en } (\Gamma \div A) \setminus \Gamma \subseteq \mathit{MDab}(\Psi) \setminus \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)\}.$$

(2) Als $\Gamma \perp A = \varnothing$, dan $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$.

We moeten aantonen dat

(1) γ een goed-bepaalde functie is,

(2) γ een selectiefunctie is, en

(3) voor alle A: $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A)) = \Gamma \div A$.

Deel 1: opdat γ een functie zou zijn, moet voor alle A en B het geval zijn dat, als $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$, dan $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$. Veronderstel dat $\Gamma \perp A = \Gamma \perp B$. Dan volgt uit observatie 3 (p. 186) en *Uniformiteit* dat $\Gamma \div A = \Gamma \div B$. Uit de definitie van γ volgt dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \gamma(\Gamma \perp B)$.

Deel 2: opdat γ een selectiefunctie zou zijn, volstaat het om aan te tonen dat, als $\Gamma \perp A$ niet leeg is, $\gamma(\Gamma \perp A)$ dan een niet lege deelverzameling $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_n\}$ ($n \geqslant 1$) van $\Gamma \perp A$ is, zodanig dat er voor een of andere $\Psi_i \in \gamma(\Gamma \perp A)$ geldt dat $\mathit{MDab}(\Psi_i) = C(\gamma(\Gamma \perp A))$ (zie definitie 88, p. 182). Veronderstel dat $\Gamma \perp A$ niet leeg is. Dan volgt dat $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, en, via *Succes*, dat $A \notin \mathit{Cn}_{\mathbf{AL}}(\Gamma \div A)$. Uit *Quasi-A-insluiting* volgt dat $\Gamma \div A \subseteq^A_Q \Gamma$. Dan zijn er twee gevallen mogelijk (definitie van quasi-insluiting).

- **Geval 1:** $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$. Uit $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$ en $\Gamma \div A \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ volgt met de Bovengrens-eigenschap dat er een Ψ bestaat zodanig dat $\Gamma \div A \subseteq \Psi \subseteq \Gamma$ en $\Psi \in \Gamma \perp A$. Dan volgt dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi \cap \Gamma$, en dus dat

$(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi$. Aangezien $\Gamma \div A \subseteq \Gamma$, is $\Gamma \div A \setminus \Gamma = \varnothing$. En dus $\Gamma \div A \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Psi) \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Uit de constructie van $\gamma(\Gamma \perp A)$ volgt dat $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$, en dus is $\gamma(\Gamma \perp A)$ niet leeg. We zullen nu aantonen dat dit ook voor het andere geval geldt.

- **Geval 2:** er bestaat een $\Psi \in \Gamma \perp A$ zodanig dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi$, en $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = MDab(\Psi) \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Bijgevolg weten we, uit de constructie van γ, dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ Ψ bevat, en dus dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ niet leeg is.

We mogen dus besluiten dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ niet leeg is. Gezien voor alle leden Ψ_i van $\gamma(\Gamma \perp A)$ geldt dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Psi_i) \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$, volgt hieruit dat $MDab(\Psi) \subseteq MDab(\Psi_i)$, voor alle Ψ_i. Hieruit kunnen we afleiden dat $C(\gamma(\Gamma \perp A)) = MDab(\Psi)$.

Deel 3: er zijn twee gevallen, naargelang al dan niet $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$.

- **Het eerste geval:** $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Daaruit volgt dat $\Gamma \perp A = \varnothing$. Onze definite van γ levert op dat $\gamma(\Gamma \perp A) = \{\Gamma\}$, en dus $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) = \Gamma$. Aangezien $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus MDab(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) = MDab(\Gamma) \setminus MDab(\Gamma) = \varnothing$, hebben we dat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma$. Aangezien *Quasi-A-insluiting* en *Relevantie* voldaan zijn, volgt uit observatie 7 dat *Faling* voldaan is, zodat $\Gamma \div A = \Gamma$. Bijgevolg $\Gamma \div A = \Gamma \sim_\gamma A$.

- **Het tweede geval:** $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. In dit geval is $\Gamma \perp A$ niet leeg, en uit deel twee van dit bewijs weten we dat $\gamma(\Gamma \perp A)$ eveneens niet leeg is. Uit de definitie van γ weten we dat voor alle $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$ geldt dat $\Psi \in \Gamma \perp A$ en $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi$ en $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma \subseteq MDab(\Psi) \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Bovendien weten we uit deel 2 dat voor minstens een $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$ geldt dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = MDab(\Psi) \setminus MDab((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Uit $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Psi$, voor alle $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$, volgt met verzamelingenleer dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$.

Nu gaan we bewijzen dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \subseteq (\Gamma \div A) \cap \Gamma$. Laat $B \notin (\Gamma \div A) \cap \Gamma$. We moeten dan aantonen dat $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$. We hebben opnieuw twee gevallen.

- **Geval 1:** $B \notin \Gamma$. Dan geldt voor alle $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$, aangezien $\Psi \subseteq \Gamma$, dat $B \notin \Psi$. Bijgevolg $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$, en we zijn klaar.

- **Geval 2:** $B \in \Gamma$ (en nog steeds $B \notin \Gamma \div A$). Uit Relevantie volgt dat er een verzameling $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ is zodanig dat $(\Gamma \div A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$, $(\Gamma \div A \setminus \Gamma) \subseteq \mathit{MDab}(\Gamma') \setminus \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$ en $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ maar $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$. Hieruit volgt dat $\Gamma' \in \gamma(\Gamma \perp A)$. Uit $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} A$ en $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$ volgt met *cautious cut* dat $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} B$, en dus ook $B \notin \Gamma'$. Bijgevolg bekomen we ook in dit geval dat $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp A)$.

We hebben dus bewezen dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp A) = (\Gamma \div A) \cap \Gamma$. Daaruit volgt dat $\mathit{MDab}(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) = \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Aangezien $\gamma(\Gamma \perp A) \neq \varnothing$ weten we dat (zie deel 2 van dit bewijs) er een $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$ waarvoor geldt dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = \mathit{MDab}(\Psi) \setminus \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$ en $\mathit{MDab}(\Psi) = C(\gamma(\Gamma \perp A))$. Daaruit volgt dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$. Uit $\mathit{MDab}(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) = \mathit{MDab}((\Gamma \div A) \cap \Gamma)$ volgt dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = C(\gamma(\Gamma \perp A)) \setminus \mathit{MDab}(\bigcap \gamma(\Gamma \perp A))$. Met de definitie van $N(\gamma(\Gamma \perp A))$ bekomen we dat $(\Gamma \div A) \setminus \Gamma = N(\gamma(\Gamma \perp A))$. Aangezien $\Gamma \div A = ((\Gamma \div A) \cap \Gamma) \cup ((\Gamma \div A) \setminus \Gamma) = (\bigcap \gamma(\Gamma \perp A)) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))$, hebben we ook voor dit geval bewezen dat $\Gamma \div A = \Gamma \sim_\gamma A$. □

Met dit theorema en de theorema's van de vorige afdeling hebben we het volgende representatietheorema bewezen:

Theorema 45. *De operator $\div$ is een operator van 'partial meet and join' contractie voor een basis Γ alss $\div$ voldoet aan de postulaten* Succes, Quasi-A-insluiting, Relevantie *en* Uniformiteit.

Zeggen dat een operator $\div$ de vier bovenvermelde eigenschappen heeft, is – vanuit logisch standpunt – hetzelfde als zeggen dat $\div$ een operator van 'partial meet and join' contractie is. Representatietheorema's zijn belangrijk (en staan erg centraal in de AGM-benadering), omdat ze de constructieve aanpak (het expliciet construeren van een contractie-functie) en de zogenaamde 'black box'-aanpak (waarin men enkel eigenschappen bepaalt waaraan een operator moet voldoen, los van de manier waarop die operator geconstrueerd wordt) met elkaar verbinden.

6.10. Basis-gegenereerde contractie

Door Nebel ([Neb91]) werd opgemerkt dat een contractie-operator voor een 'belief base' Γ gebruikt kan worden om een contractie-operator te bepalen voor de met Γ verbonden 'belief set'. Deze aanpak werd verder uitgewerkt door onder meer Fuhrman ([Fuh97]) en Hansson ([Han99]).

Laat Γ een 'belief base' zijn, en Σ de ermee corresponderende 'belief set', i.e. $\Sigma = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$.

Definitie 92. *Een operator $\div$ voor Σ is een door de basis gegenereerde* 'partial meet and join' contractie *alss er een 'belief base' Γ voor Σ bestaat en er een 'partial meet and join' contractie-operator $\sim_\gamma$ voor Γ bestaat zodanig dat voor alle zinnen A geldt: $\Sigma \div A = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A)$.*

In deze afdeling staat $\div$ dus voor een door de basis gegenereerde 'partial meet and join' contractie-operator. [48]

Lemma 46. *Zij Γ en Γ' eindige verzamelingen wffs.*
Als $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma')$ en $MDab(\Gamma) = MDab(\Gamma')$, dan $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma')$.

BEWIJS. — Laat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma')$ en $MDab(\Gamma) = MDab(\Gamma')$. Voor elke zin $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ geldt dat er een eindige (mogelijk lege) verzameling abnormaliteiten Δ zodat $\Gamma \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$ en Γ safe is m.b.t. Δ. Aangezien $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma')$, kunnen we afleiden dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$. Omdat $MDab(\Gamma) = MDab(\Gamma')$ is ook Γ' safe m.b.t. Δ. Bijgevolg geldt, voor alle $A \in Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$, dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} A$. $\square$

Theorema 47. *Zij Γ een eindige verzameling zinnen (een 'belief base'), en $\sim_\gamma$ een 'partial meet and join' contractie-operator voor Γ. Laat $\div$ een door Γ gegenereerde 'partial meet and join' contractie-operator zijn voor Σ. Dan voldoet $\div$ aan de volgende postulaten:*

(1) *Insluiting: $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq \Sigma$, en als $MDab(\Gamma \sim_\gamma A) = MDab(\Sigma)$ dan $\Sigma \div A \subseteq \Sigma$.*

(2) *Leegheid: Als $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma)$, dan $\Sigma \div A = \Sigma$.*

(3) *Succes: Als $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma \div A)$.*

(4) *Extensionaliteit: Als $A \equiv B \in \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $\Sigma \div A = \Sigma \div B$.*

(5) *Faling: Als $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $\Sigma \div A = \Sigma$.*

48. Het gebruik van $\div$ in deze afdeling mag dus niet verward worden met het gebruik van $\div$ als 'algemene' operator in voorgaande afdelingen van dit hoofdstuk.

BEWIJS. — **1.** We bewijzen eerst dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq \Sigma$. We weten dat $\Gamma \sim_\gamma A \subseteq^A_Q \Gamma$ (Quasi-A-insluiting). Er volgt dat

(1) $\Gamma \sim_\gamma A \subseteq \Gamma$ of

(2) er is een $\Gamma' \in \Gamma \perp A$ zodanig dat $(\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma \subseteq \Gamma'$ en $(\Gamma \sim_\gamma A) \setminus \Gamma = \mathit{MDab}(\Gamma') \setminus \mathit{MDab}((\Gamma \sim_\gamma A) \cap \Gamma)$.

Uit (1) volgt onmiddellijk dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$, en dus dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) = \Sigma$. Uit (2) volgt met de verzamelingenleer dat $\Gamma \sim_\gamma A \subseteq \Gamma' \cup \mathit{MDab}(\Gamma')$. Hieruit volgt dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$, omdat **CLuN** monotoon is en er geldt dat $\mathit{MDab}(\Gamma') \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma') \subseteq Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma)$. Omdat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma) \subseteq Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$ en omdat $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) = \Sigma$, kunnen we besluiten dat $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq \Sigma$.

Nu bewijzen we dat, als $\mathit{MDab}(\Gamma \sim_\gamma A) = \mathit{MDab}(\Sigma)$, dan $\Sigma \div A \subseteq \Sigma$. Dit volgt rechtstreeks uit $Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma A) \subseteq \Sigma$ en lemma 46.

2. We moeten bewijzen dat als $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma)$, dan $\Sigma \div A = \Sigma$. Laat $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma)$. Dan $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma))$, en dus, wegens de eigenschap Fixed Point, ook $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$. Als $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$, dan volgt uit de definitie van de restverzameling (definitie 82, p. 179) dat $\Gamma \perp A = \{\Gamma\}$. Uit de bepaling van $\Gamma \sim_\gamma A$ volgt dan dat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma$. Hieruit volgt dat $\Sigma \div A = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A) = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma) = \Sigma$.

3. We moeten bewijzen dat als $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma \div A)$. Als $A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, dan weten we dat $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A)$ (Succes). Daaruit volgt onmiddellijk, via de eigenschap Fixed Point, dat $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A))$, en dus $A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma \div A)$.

4. We moeten bewijzen dat als $A \equiv B \in \mathcal{T}(\Gamma)$, dan $\Sigma \div A = \Sigma \div B$. Laat $A \equiv B \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Dan weten we dat voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ geldt: $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} A \equiv B$. Aangezien Γ eindig is, zijn alle $\Gamma' \subseteq \Gamma$ eindig. Bijgevolg geldt voor alle deelverzamelingen Γ' van Γ dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} A$ alss $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} B$. Omdat de eigenschap AGM-Uniformiteit geldt (zie theorema 43, p. 194), volgt hieruit dat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma \sim_\gamma B$. Hieruit volgt dat $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A) = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma B)$, en dus dat $\Sigma \div A = \Sigma \div B$.

5. Laat $A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Via Faling bekomen we dat $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma$, en zo krijgen we onmiddellijk dat $Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma A) = Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma)$, en dus dat $\Sigma \div A = \Sigma$. □

Vier van de vijf eigenschappen, namelijk Insluiting, Leegheid, Succes, en Extensionaliteit, vallen samen met vier van de vijf postulaten waaraan een *'withdrawal'*-operatie moet voldoen (zie Makinson [Mak87]). [49] Het vijfde postulaat voor *withdrawals*, Sluiting ($\Sigma \div A = Cn_{\mathbf{AL}}(\Sigma \div A)$), is ook voldaan voor 'base'-gegenereerde 'partial meet and join'-contractie (wegens de eigenschap Fixed Point). Vandaar dat we mogen besluiten dat alle basis-gegenereerde 'partial meet and join' contracties 'withdrawals' zijn (in de zin van Makinson, en aangepast voor een inconsistentie-adaptieve logica). Het beruchte Herstel-postulaat (C-5, p. 162) van Gärdenfors is niet voldaan.

We hebben nu de ene richting van het representatie-theorema voor 'base'-gegenereerde 'partial meet and join' contractie bewezen. De andere richting moet nog bewezen worden (het bewijs ervoor zal wellicht geen speciale moeilijkheden opleveren).

6.11. Revisie

Traditioneel wordt een revisie-operator in de literatuur (zie bijv. [AGM85] en [Han99]) opgevat als een combinatie van expansie en contractie. Afhankelijk van de volgorde waarin deze worden toegepast, verkrijgen we twee verschillende revisie-operaties. Door het toepassen van de *Levi identiteit* bekomt men *interne* revisie:

$$\Gamma * A = (\Gamma - {\sim}A) + A.$$

Eerst is er de contractie van Γ met ${\sim}A$, gevolgd door de expansie met A. Door gebruik te maken van de *omgekeerde Levi identiteit* bekomt men *externe* revisie:

$$\Gamma * A = (\Gamma + A) - {\sim}A.$$

Hier wordt A eerst aan Γ toegevoegd, gevolgd door een contractie met ${\sim}A$.

De twee soorten revisies leveren verschillende resultaten op. Afhankelijk van de situatie lijkt de ene operatie beter geschikt dan de andere, maar

49. Uiteraard hebben we het hier over de postulaten van Makinson, aangepast voor een inconsistentie-adaptieve logica. Er kan echter gemakkelijk worden nagegaan dat de postulaten volledig samenvallen met de 'klassieke' postulaten als Γ consistent is.

geen van beide levert in alle situaties betere resultaten op. [50] Omdat de externe revisie een nieuw soort selectiefunctie vereist, gaan we ons enkel concentreren op de interne revisie-operatie. [51]

Men kan zich de vraag stellen of een revisie-operatie wel zinnig is als men toch met een paraconsistente logica werkt, en revisie enkel bedoeld is om een verzameling opvattingen op consistente wijze uit te breiden. Ik kan me best inbeelden dat een aantal paraconsistente logici deze optie zouden verdedigen. Vanuit een inconsistentie-adaptieve kijk op de zaak, lijkt het lokaal consistent houden van een verzameling opvattingen (zonder dus globale consistentie te forceren) juist zeer nuttig. Daar (in die lokaal consistente zones) kan immers de volle kracht van de afleidingsregels van **CL** spelen. Daarom is het belangrijk om, zoveel als mogelijk, formules op consistente wijze toe te voegen. Als Γ echter bepaalde *Dab*-formules bevat, zal dit niet lukken. Stel bijv. dat $\Gamma = \{\sim p, !p \vee !q\}$, en dat we een revisie willen toepassen met p. Dan zal dit de basis $\Gamma' = \{p, !p \vee !q\}$ opleveren. Dit betekent dat p een element is van de nieuwe basis, en dat $\sim p$ er geen element van is (p is dus niet direct inconsistent), maar de nieuwe basis bevat wel nog steeds $!p \vee !q$ (en dit is ook een minimaal *Dab*-gevolg van Γ'), waardoor p wel onbetrouwbaar is. We zien voorlopig geen manier om dit te vermijden.

Zij γ een selectiefunctie voor de 'belief base' A. Dan wordt de *interne* 'partial meet' revisie-operator $*_\gamma$ voor A als volgt gedefinieerd:

$$\Gamma *_\gamma A = (\Gamma -_\gamma \sim A) \cup \{A\}.$$

Om de quasi-Harper-identiteit te kunnen bewijzen, stellen we eerst het volgende vast:

Observatie 8 (Behoud van Negatie).
Als $\sim A \in \Gamma$, dan $\sim A \in \Gamma \sim_\gamma A$ en $\sim A \in \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$.

BEWIJS. — Stel dat $\sim A \in \Gamma$ en $\sim A \notin \Gamma \sim_\gamma A$. Dan is er een $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp A)$ zodanig dat $\sim A \notin \Psi$. Dan volgt hieruit dat $\Psi \cup \{\sim A\} \vdash_{\mathbf{AL}} A$.

50. Dit wordt overtuigend aangetoond in [Han99].

51. Hoewel externe revisie meer baat lijkt te hebben bij een inconsistentie-adaptieve benadering (door eerst A aan Γ toe te voegen, wordt $\Gamma \cup \{A\}$ mogelijk inconsistent), is dit niet echt het geval (omdat gewerkt wordt met (niet deductief gesloten) 'belief bases').

Dan bestaat er een eindige (mogelijk lege) verzameling abnormaliteiten Δ zodanig dat $\Psi \cup \{\sim A\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$ en Δ is $\Psi \cup \{\sim A\}$-betrouwbaar. Dus voor elk minimaal Dab-gevolg $Dab(\Theta_i)$ van $\Psi \cup \{\sim A\}$ geldt dat $\Theta_i \cap \Delta = \varnothing$. Met het deductietheorema volgt dat $\Psi \vdash_{\mathbf{CLuN}} \sim A \supset (A \vee Dab(\Delta))$, en dus dat $\Psi \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \vee Dab(\Delta)$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $\Psi \cup \{\sim A\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} (A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$. Maar aangezien Δ $\Psi \cup \{\sim A\}$-betrouwbaar is, kan $(A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$ geen minimaal Dab-gevolg zijn van $\Psi \cup \{\sim A\}$. Daarom moet er een (eindige) verzameling abnormaliteiten Λ zijn, zodanig dat $\Lambda \subset \{A \wedge \sim A\} \cup \Delta$ en $Dab(\Lambda)$ is een (minimaal) Dab-gevolg van $\Psi \cup \{\sim A\}$. Dit kan alleen als $\Psi \cup \{\sim A\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \wedge \sim A$. Daaruit volgt met het deductietheorema dat $\Psi \vdash_{\mathbf{CLuN}} \sim A \supset (A \wedge \sim A)$, en dus $\Psi \vdash_{\mathbf{CLuN}} A$. Hieruit volgt dat $\Psi \vdash_{\mathbf{AL}} A$ en dus dat $\Psi \notin \Gamma \perp A$ en dus $\Psi \notin \gamma(\Gamma \perp A)$, wat onze veronderstelling tegenspreekt.

Het bewijs dat als $\sim A \in \Gamma$, dan $\sim A \in \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$ verloopt volkomen analoog. $\square$

De gekende *Harper-identiteit* geldt niet voor 'partial meet and join' contractie en revisie: $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \neq \Gamma \cap (\Gamma * \gamma \sim A)$. [52] We kunnen echter aantonen dat ze geldt op een eindige verzameling van abnormaliteiten na.

Theorema 48 (quasi-Harper-identiteit).

Laat Γ een eindige verzameling zijn en γ een selectiefunctie voor Γ. Dan $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) = (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A))) \cap (\Gamma *_\gamma \sim A)$.

BEWIJS. — Bij definitie is $\Gamma *_\gamma \sim A = (\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)) \cup \{\sim A\}$. Er geldt dat $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \subseteq \Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A))$. Uit $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \subseteq \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \cup \{\sim A\}$ kunnen we met de verzamelingenleer afleiden dat $(\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)) \cap (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A))) \subseteq (\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \cup \{\sim A\}) \cap (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A)))$. Hieruit volgt dat $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) \subseteq (\Gamma *_\gamma \sim A) \cap (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A)))$.

Voor de andere richting, laat $B \in \Gamma \cap (\Gamma *_\gamma \sim A)$. Dus $B \in \Gamma \cap ((\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)) \cup \{\sim A\})$. Dan $B \in \Gamma \cap \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$ of $B \in \Gamma \cap \{\sim A\}$. Uit de eerste mogelijkheid volgt onmiddellijk dat $B \in \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$. Uit de tweede mogelijkheid volgt dat B en $\sim A$ identiek zijn, en dat $\sim A \in \Gamma$.

52. Aangezien $\vdash_{\mathbf{CL}} \neg\neg A \equiv A$, komt dit in een **CL**-omgeving uiteraard neer op $\Gamma \sim_\gamma A = \Gamma \cap (\Gamma *_\gamma \neg A)$ (dit is de 'echte' Harper-identiteit). Omdat voor een aantal inconsistente verzamelingen Γ, soms *niet* het geval is dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} \sim\sim A \equiv A$, zal $\Gamma \sim_\gamma A$ niet altijd hetzelfde opleveren als $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$. Ook hier moeten we dus enige zorgvuldigheid aan de dag leggen, en rekening houden met de eigenheden van **AL**.

Daaruit volgt, met observatie 8, dat $\sim A \in \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$. Omdat B en $\sim A$ identiek zijn, volgt dat $B \in \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$. Aangezien $N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A)) \subseteq \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$, kunnen we besluiten dat $(\Gamma *_\gamma \sim A) \cap (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A))) \subseteq \Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A)$.

Bijgevolg, $\Gamma \sim_\gamma (\sim\sim A) = (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim\sim A))) \cap (\Gamma *_\gamma \sim A)$. □

Merk op dat, als Γ consistent is, we de oorspronkelijke Harper-identiteit verkrijgen: voor een consistente Γ geldt immers steeds dat $N(\gamma(\Gamma \perp A)) = \varnothing$ (voor alle A).

We tonen aan dat interne 'partial meet and join'-revisie aan een aantal rationaliteitspostulaten voldoet (deze postulaten zijn opnieuw tegenhangers van de klassieke postulaten voor interne revisie, zoals bijv. weergegeven in [Han99]). [53]

Theorema 49 (Consistentie). *Als* $\sim A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, *dan* $\sim A \notin \Gamma *_\gamma A$.

BEWIJS. — Als $\sim A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$, dan volgt met contractie-Succes dat $\sim A \notin Cn_{\mathbf{AL}}(\Gamma \sim_\gamma \sim A)$, en dus ook dat $\sim A \notin Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma \sim A)$. Aangezien $A \supset \sim A \vdash_{\mathbf{CLuN}} \sim A$, volgt dat $A \supset \sim A \notin Cn_{\mathbf{CLuN}}(\Gamma \sim_\gamma \sim A)$. Met het deductietheorema volgt dat $\sim A \notin Cn_{\mathbf{CLuN}}((\Gamma \sim_\gamma \sim A) \cup \{A\})$. Hieruit kunnen we afleiden dat $\sim A \notin (\Gamma \sim_\gamma \sim A) \cup \{A\}$, en dus dat $\sim A \notin \Gamma *_\gamma A$. □

Theorema 50 (Insluiting). $\Gamma *_\gamma A \subseteq \Gamma \cup \{A\} \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim A))$.

BEWIJS. — Uit $\Gamma \sim_\gamma \sim A = \bigcap \gamma(\Gamma \perp A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))$ volgt dat $\Gamma \sim_\gamma \sim A \subseteq \Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))$. Dus geldt dat $(\Gamma \sim_\gamma \sim A) \cup \{A\} \subseteq \Gamma \cup \{A\} \cup N(\gamma(\Gamma \perp A))$, en dus ook dat $\Gamma *_\gamma A \subseteq \Gamma \cup \{A\} \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim A))$. □

Theorema 51 (Relevantie). *Als* $B \in \Gamma$ *en* $B \notin \Gamma *_\gamma A$, *dan is er een* Γ' *zodanig dat* $\Gamma *_\gamma A \subseteq \Gamma' \cup MDab(\Gamma' \setminus \{A\}) \subseteq \Gamma \cup \{A\} \cup MDab(\Gamma' \setminus \{A\})$, *en bestaat er een (mogelijk lege) verzameling van abnormaliteiten* Δ *zodanig dat* $\Gamma' \nvdash_{\mathbf{AL}} (A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$, *maar* $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} (A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$.

53. Als zowel Γ als A consistent zijn, kunnen de klassieke postulaten bekomen worden uit de postulaten die aangepast zijn voor **AL** (zoals ze hier worden weergegeven).

BEWIJS. — Laat $*_\gamma$ een operator van interne 'partial meet and join'-revisie zijn. Dan zijn er twee gevallen, naargelang al dan niet $\sim A \in \mathcal{T}(\Gamma)$.

Geval 1: $\sim A \in \mathcal{T}(\Gamma)$. In dat geval is $\Gamma \perp \sim A$ de lege verzameling en is, wegens de definitie van een selectiefunctie, $\gamma(\Gamma \perp \sim A) = \Gamma$. Bijgevolg is, wegens $N(\gamma(\Gamma \perp \sim A)) = \emptyset$, $\Gamma *_\gamma A = \gamma(\Gamma \perp \sim A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim A)) \cup \{A\} = \Gamma \cup \{A\}$. Dus kan er geen B zijn zodanig dat $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma *_\gamma A$, en dus is relevantie voldaan.

Geval 2: $\sim A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$. Laat $B \in \Gamma$ en $B \notin \Gamma *_\gamma A$. Dan $B \in \Gamma \setminus \Gamma *_\gamma A$, waaruit volgt dat $B \in \Gamma \setminus (\bigcap \gamma(\Gamma \perp \sim A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim A)) \cup \{A\})$. Hieruit volgt dat $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp \sim A)$ en $B \notin N(\gamma(\Gamma \perp \sim A))$ en $B \neq A$.

Uit $B \notin \bigcap \gamma(\Gamma \perp \sim A)$ volgt dat er een $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp \sim A)$ bestaat zodanig dat $B \notin \Psi$. Aangezien $\Psi \in \gamma(\Gamma \perp \sim A)$ en $\sim A \notin \mathcal{T}(\Gamma)$ volgt dat $\Psi \in \Gamma \perp \sim A$, en daaruit volgt dat $\Psi \nvdash_{\mathbf{AL}} \sim A$. Aangezien $B \in \Gamma$ en $B \notin \Psi$, volgt dat $\Psi \subset \Gamma$, en dat $\Gamma \vdash_{\mathbf{AL}} \sim A$. Uit $\Psi \in \Gamma \perp \sim A$ volgt ook dat $\Psi' \vdash_{\mathbf{AL}} \sim A$, voor alle Ψ' waarvoor geldt dat $\Psi \subset \Psi' \subseteq \Gamma$. We weten dus dat $\Psi \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} \sim A$.

Uit $\Psi \nvdash_{\mathbf{AL}} \sim A$ volgt dat $\Psi \cup \{A\} \nvdash_{\mathbf{AL}} A \wedge \sim A$. Immers, mocht $\Psi \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{AL}} A \wedge \sim A$, dan zou ook $\Psi \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} A \wedge \sim A$ (Immuniteit), en $\Psi \vdash_{\mathbf{CLuN}} \sim A$ (wegens deductietheorema), en dus ook $\Psi \vdash_{\mathbf{AL}} \sim A$ (maar het tegendeel is het geval).

Uit $\Psi \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} \sim A$ volgt dat $\Psi \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} \sim A \vee Dab(\Delta)$, waar Δ een (mogelijk lege) verzameling abnormaliteiten is, en Δ is $\Psi \cup \{B\}$-betrouwbaar. Hieruit volgt dat $\Psi \cup \{A\} \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} (A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$, en dus ook dat $\Psi \cup \{A\} \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} (A \wedge \sim A) \vee Dab(\Delta)$.

Uit de definitie van interne 'partial meet and join' revisie weten we dat $\Gamma *_\gamma A = \bigcap \gamma(\Gamma \perp \sim A) \cup N(\gamma(\Gamma \perp \sim A)) \cup \{A\}$. We weten dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp \sim A) \subseteq \Psi$, en er kan gemakkelijk worden nagegaan dat $N(\gamma(\Gamma \perp \sim A)) \subseteq MDab(\Psi)$. Daaruit volgt dat $\Gamma *_\gamma A \subseteq \Psi \cup \{A\} \cup MDab(\Psi)$. Aangezien $\Psi \subseteq \Gamma$ weten we ook dat $\Psi \cup \{A\} \cup MDab(\Psi) \subseteq \Gamma \cup \{A\} \cup MDab(\Psi)$. Bijgevolg hebben we aangetoond dat Relevantie geldt (stel $\Gamma' = \Psi \cup \{A\}$). □

Theorema 52 (Succes). $A \in \Gamma *_\gamma A$.

BEWIJS. — Dat Succes geldt, volgt onmiddellijk uit de definitie van $\Gamma *_\gamma A$. □

Theorema 53 (AGM-uniformiteit). *Als voor alle* $\Gamma' \subseteq \Gamma$, *en voor elke verzameling abnormaliteiten* Δ, *geldt dat* $\Gamma' \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{AL}} (A \wedge {\sim}A) \vee Dab(\Delta)$ *alss* $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} (B \wedge {\sim}B) \vee Dab(\Delta)$, *dan* $\Gamma \cap (\Gamma *_\gamma A) = \Gamma \cap (\Gamma *_\gamma B)$.

BEWIJS. — Veronderstel dat het antecedent geldt. We zullen eerst aantonen dat voor alle $\Gamma' \subseteq \Gamma$ geldt dat: $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}A$ alss $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}B$.

Voor elke $\Gamma' \subseteq \Gamma$, als $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}A$, dan is er een eindige verzameling abnormaliteiten Δ zodanig dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} {\sim}A \vee Dab(\Delta)$ en $U(\Gamma') \cap \Delta = \varnothing$ (theorema 25, p. 172). Uit $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} {\sim}A \vee Dab(\Delta)$ volgt dat $\Gamma' \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{AL}} (A \wedge {\sim}A) \vee Dab(\Delta)$. Uit de onze veronderstelling dat het antecedent geldt, weten we dat $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{AL}} (B \wedge {\sim}B) \vee Dab(\Delta)$. Hieruit volgt, via Uitgebreide Immuniteit, dat $\Gamma' \cup \{B\} \vdash_{\mathbf{CLuN}} (B \wedge {\sim}B) \vee Dab(\Delta)$. Via het deductietheorema voor **CLuN** bekomen we dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} B \supset ((B \wedge {\sim}B) \vee Dab(\Delta))$, en, via elementaire logische operaties, dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{CLuN}} {\sim}B \vee Dab(\Delta)$. Aangezien geldt dat $U(\Gamma') \cap \Delta = \varnothing$, bekomen we door toepassing van theorema 25 (p. 172) dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}B$.

We hebben dus aangetoond dat, als $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}A$, dan $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}B$. Via een volkomen analoge redenering kan bewezen worden dat, als $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}B$, dan $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}A$. En dus geldt er dat $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}A$ alss $\Gamma' \vdash_{\mathbf{AL}} {\sim}B$. Uit observatie 2 (p. 186) volgt dan dat $\Gamma \perp {\sim}A = \Gamma \perp {\sim}B$. Hieruit volgt, wegens het feit dat de selectiefunctie γ bepaald werd voor verzamelingen van de vorm $\Gamma \perp A$, dat $\gamma(\Gamma \perp {\sim}A) = \gamma(\Gamma \perp {\sim}B)$, en dus dat $\bigcap \gamma(\Gamma \perp {\sim}A) = \bigcap \gamma(\Gamma \perp {\sim}B)$ en $N(\gamma(\Gamma \perp {\sim}A)) = N(\gamma(\Gamma \perp {\sim}B))$. Hieruit volgt dat $\Gamma \sim_\gamma {\sim}A = \Gamma \sim_\gamma {\sim}B$. Via de Harper-identiteit volgt daaruit dat $(\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp {\sim}A))) \cap (\Gamma *_\gamma A) = (\Gamma \cup N(\gamma(\Gamma \perp {\sim}B))) \cap (\Gamma *_\gamma B)$. Met de verzamelingenleer en de hierboven afgeleide identiteiten volgt dan dat $\Gamma \cap (\Gamma *_\gamma A) = \Gamma \cap (\Gamma *_\gamma B)$. □

Het bewijs van de andere richting (dus van de constructie naar de postulaten) van het representatie-theorema voor interne 'partial meet and join'-revisie zal (vermoedelijk) grotendeels parallel lopen met dat voor 'partial meet and join'-contractie. De enige echte moeilijkheid is het vinden van de juiste constructie (via de Harper-identiteit).

6.12. Tot slot

We hebben in dit overwegend technische hoofdstuk aangetoond dat, ook voor een inconsistentie-adaptieve logica, contractie-operaties kunnen worden bepaald en representatie-theorema's kunnen worden bewezen. We hebben vooral gefocust op (een aangepaste vorm van) 'partial meet contraction'. De randgevallen van 'partial meet contraction', 'full meet contraction' (gebaseerd op het nemen van de doorsnede van *alle* restanten) en 'maxichoice contraction' (waarbij steeds slechts één restant geselecteerd wordt) hebben we niet bestudeerd, maar de resultaten van dit hoofdstuk kunnen vrij gemakkelijk naar die randgevallen worden uitgebreid.

Wat revisie betreft, kon ik slechts een aantal partiële resultaten voorleggen. Dit heeft vooral te maken met het feit dat door de complexiteit van revisie (omwille van de dubbele dynamiek die met een inconsistentie-adaptieve logica optreedt) het vinden en uitschrijven van de bewijzen veel werk vraagt, en dat ik me —in de loop van dat zoekproces— steeds vaker ging afvragen of de AGM-benadering wel de meest zinnige benadering is. We hebben in de loop van dit hoofdstuk reeds gewezen op een aantal tekortkomingen, maar er zijn er natuurlijk nog andere.

Het feit dat alleen propositioneel gewerkt wordt, is een serieuze handicap. Elke min of meer realistische toepassing vergt immers (minstens) predikatenlogica van eerste orde. De werkwijze van het AGM-paradigma laat een predikatieve uitbreiding helemaal niet toe, want een ganse reeks concepten worden hopeloos onbeslisbaar (ook geen positieve test). Bovendien ligt een benadering van de concepten via bijv. dynamische bewijzen niet onmiddellijk voor de hand.

Een bijkomende serieuze moeilijkheid is dat niet duidelijk is hoe meervoudige operaties van contractie en revisie (algemeen) kunnen worden bepaald (de AGM-postulaten zijn alleen van toepassing op een enkelvoudige herziening van Γ met A). In de literatuur bestaan weliswaar een aantal voorstellen voor meervoudige revisie, maar deze zijn slechts partieel uitgewerkt, en bovendien zeer divers.

Een ander problematisch uitgangspunt van het AGM-paradigma is dat de nieuwe opvatting waarmee een verzameling wordt herzien steeds de hoogste preferentie krijgt. Dit lijkt weinig realistisch (denken we maar aan het feit dat de meeste mensen bijzonder terughoudend (zelfs star) zijn om hun opvattingen te wijzigen). Een meer realistische benadering zou revisie met A moeten kunnen bepalen voor elk mogelijk preferentie-niveau van A. Ik ben ervan overtuigd dat een combinatie van adaptieve logica's betere resultaten zou kunnen opleveren. Ik kom hier straks nog even op terug.

Als uitsmijter wil ik er even op wijzen dat de logica **AL** zelf met een specifiek mechanisme van 'belief revision' uitgerust is. In een dynamische **AL**-bewijs uit een (mogelijk inconsistente) verzameling premissen Γ komt dit mechanisme van 'belief revision' tot uiting in het markeren van een lijn, of in het wegnemen van de markering van een lijn. Op het beginstadium van het bewijs, hebben we, voor elke formule A, de overtuiging "A gedraagt zich normaal" ($A \wedge \sim A$ is geen element van een minimaal Dab-gevolg van Γ, op dat stadium). Op een aantal van deze overtuigingen wordt gesteund bij het toepassen van bepaalde afleidingsregels (de specifieke overtuiging waarop gesteund wordt, wordt vermeld in het vijfde element). Naarmate het bewijs voortgezet wordt, krijgen we (op elk nieuw stadium) informatie bij. We prefereren deze nieuwe informatie boven de verzameling overtuigingen die we op dat stadium hebben. Door die nieuwe informatie moeten we onze verzameling overtuigingen wijzigen (via expansie, contractie of revisie). Als we, voor een specifieke A, (onvoorwaardelijk) kunnen afleiden dat $A \wedge \sim A$, moeten we onze overtuiging dat A zich normaal gedraagt, herzien. Als "A gedraagt zich normaal" tot de voorwaarde(n) behoort waarop gesteund werd om een bepaalde (voorwaardelijke) afleidingsregel te kunnen toepassen om zo (voorwaardelijk) B af te leiden, dan is die verantwoording nu weggevallen. Bijgevolg moet een contractie-operatie uitgevoerd worden op onze verzameling "overtuigingen" (de lijn waarop B voorwaardelijk werd afgeleid, zal gemarkeerd worden, net zoals alle andere lijnen waar gesteund wordt op het normaal gedrag van A).

Cahiers du Centre de logique
Volume 14

Hoofdstuk 7

Toekomstig onderzoek

In hoofdstukken 4 en 5 hebben we de adaptieve vraaglogica **VA** uitgewerkt, en op basis ervan een aantal erotetische concepten bepaald. Het belang van mijn voorstel ligt vooral in het feit dat we via een **VA**-bewijs uit een verzameling premissen het werkelijk redeneren met vragen kunnen benaderen. Een dynamisch **VA**-bewijs levert een betere explicatie voor het 'rijzen van een vraag' dan de semantische concepten van Wiśniewski dat doen. Het afleiden van vragen of problemen kan immers gebeuren op basis van de (beste) inzichten in de premissen op een bepaald ogenblik, en steunt dus niet op logische alwetendheid.

De overeenkomsten en verschillen tussen de voorstellen, alsook die tussen de alternatieve bepalingen van hoofdstuk 5 onderling, zouden verder moeten worden onderzocht.

Verder moet een deftige heuristiek worden uitgewerkt die toelaat nuttige vragen uit een of meer hoofdvragen af te leiden. De heuristiek kan wellicht voor een groot stuk in de bewijzen zelf worden ingebouwd. Ik ben er immers van overtuigd dat bij het oplossen van problemen (door ze te herleiden tot deelproblemen), het afleiden van vragen uit andere vragen, en het genereren van een zo goed mogelijk antwoord op een gestelde vraag, dezelfde logische mechanismen spelen. Er moet dan ook worden nagegaan hoe de technieken uit [BP01] en [Bat03b], die doelgerichte en dus efficiënte bewijzen opleveren, in een **VA**-bewijs kunnen worden ingebouwd.

Een volgend probleem dat moet worden aangepakt is het omvormen van **VA** naar een vraaglogica die inconsistente premissen zinnig kan behandelen. Hiervoor kan gesteund worden op de resultaten uit [Meh99], en op het daarin bepaalde concept *consistente kern* van een verzameling premissen (dat mijns inziens wel moet worden aangepast). Het centrale probleem in dit verband is wat er precies moet gebeuren met het antwoord (bijv. $\Box A$) dat verkregen wordt op een vraag $?\{A, {\sim}A\}$ die door een inconsistentie $\Box(A \wedge {\sim}A)$ werd gegenereerd (we werken met een paraconsistente modale logica). En wat moet er gebeuren met de oorspronkelijke verzameling premissen (waaruit $\Box(A \wedge {\sim}A)$ afleidbaar was)? Ik schets kort een mogelijke piste. Als de vraag $?\{A, {\sim}A\}$ werd afgeleid uit $\Box(A \wedge {\sim}A)$, dan heeft het effectief stellen van die vraag pas zin als we ze voorleggen aan een of andere externe bron waarvan we overtuigd zijn dat die op dit punt 'expert' is (en dus, op dit punt, over meer betrouwbare informatie beschikt dan wijzelf). Bijgevolg moeten we aan het antwoord, als we er al een krijgen, een hogere preferentie of prioriteit toekennen dan aan onze eigen informatie ($\Box(A \wedge {\sim}A)$, waardoor de vraag afgeleid werd). Dit kan logisch vertaald worden door aan het antwoord preferentie-niveau 2 toe te kennen (waarbij, in tegenstelling tot wat gebruikelijk is, een groter getal staat voor een hoger preferentie-niveau): bijv. $\Box\Box{\sim}A$. Het verkregen antwoord heeft nu een hogere preferentie dan onze aanvankelijke informatie op dit punt, maar deze preferentie is *feilbaar*. Het is bijv. mogelijk dat we op een later stadium ook op niveau 2 met 'hetzelfde' probleem geconfronteerd worden, omdat we kunnen afleiden dat $\Box\Box(A \wedge {\sim}A)$. Als we deze inconsistentie willen wegwerken, zullen we ons tot een expert moeten richten die we hoger inschatten (minstens van niveau 3). Zijn antwoord, bijv. $\Box\Box\Box A$, zou dan het antwoord van de andere expert tegenspreken, waarbij vanzelfsprekend het antwoord van de super-expert geprefereerd wordt.

Bovenstaande vormt een illustratie van wat ik ongetwijfeld als het belangrijkste open probleem beschouw: het combineren van de vraaglogica **VA** met een mechanisme van 'belief revision', dat bovendien op een zinnige manier kan werken met een inconsistente verzameling premissen. Dit mechanisme voor 'belief revision' zal in belangrijke mate afwijken van de AGM-benadering (en dus ook van die van hoofdstuk 6). Vooreerst omdat het voor het volledige fragment van een eerste orde logica moet werken. En vooral omdat de onbeslisbaarheid van het predikatieve niveau moet worden 'opgevangen' met dynamische bewijzen van een adaptieve logica. Daardoor zal de revisie-operatie ook realistischer worden: op een eindig stadium kunnen we (in het algemeen) de finale revisie slechts benaderen, maar hoe meer middelen worden ingezet (hoe langer het bewijs (op efficiënte wijze) wordt verdergezet), hoe beter we de finale revisie benaderen. De resultaten van het AGM-paradigma kunnen uiteraard als bron van inspiratie dienen.

Het combineren van vraaglogica en 'belief revision' zal wel wat technische complicaties meebrengen. Voor 'belief revision' moet zeker een geprioriteerde adaptieve logica worden gebruikt. Om die te kunnen combineren met de vraaglogica **VA**, moeten de preferenties via een of meer $\Box$ worden uitgedrukt (en dus niet via de gebruikelijke $\Diamond$). Aldus bekomen we een combinatie van twee adaptieve logica's. Er moet echter ook op een zinnige manier met inconsistenties kunnen worden omgegaan. Daarom moet nog een derde adaptieve logica, namelijk een inconsistentie-adaptieve, aan de combinatie worden toegevoegd. Ik denk dat de beste manier van werken hiervoor de volgende is: meteen de combinatie van de drie adaptieve logica's voor het propositionele geval uitwerken (en dus niet eerst een voorstel formuleren voor twee adaptieve logica's, en pas daarna een voorstel voor drie, omdat de abnormaliteiten van drie adaptieve logica's mogelijk anders op elkaar inwerken dan die van twee adaptieve logica's). We hebben op dit punt een aantal voorlopige resultaten geboekt. Zoals te verwachten viel, zijn er echter nogal wat complicaties. De gevolgrelatie hebben we (voorlopig) als volgt bepaald: $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ alss $\Box^n A$ finaal (voorwaardelijk) afleidbaar is in een bewijs uit Γ, waarbij n het preferentie-niveau is dat aan de meest geprefereerde premisse werd toegekend. Het idee is dat elke $\Box^i A (0 \leqslant i < n)$ voorwaardelijk naar hogere preferentie-niveaus kan 'springen', tenzij dit door een op een hoger niveau afgeleide formule $\Box^{i+j}$ wordt verhinderd. Vanwege de interactie tussen de verschillende soorten abnormaliteiten is niet volledig duidelijk of deze gevolgrelatie wel goed bepaald is, en of we de dynamiek wel voldoende onder controle hebben. Er moeten in dit verband nog heel wat knopen worden doorgehakt. Hiervoor hoop ik (deels) te kunnen steunen op een vruchtbare dialoog met collega-onderzoekers.

Bibliografie

[AGM85] C.E. Alchourrón, P. Gärdenfors and D. Makinson, On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 50, p. 510–530, 1985.

[AM82] C.E. Alchourrón and D. Makinson, On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions, *Theoria*, vol. 48, p. 14–37, 1982.

[Åqv65] L. Åqvist, *A new approach to the logical theory of interrogatives*, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1965.

[Åqv83] L. Åqvist, On the "tell me truly" approach to the analysis of interrogatives, in F. Kiefer, editor, *On Questions*, p. 9–14, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1983.

[Bat] D. Batens, The need for adaptive logics in epistemology, te verschijnen.

[Bat95] D. Batens, Blocks. The clue to dynamic aspects of logic, *Logique et Analyse*, vol. 150–152, p. 285–328, 1995, verschenen 1997.

[Bat99a] D. Batens, Inconsistency-adaptive logics, in Ewa Orłowska, editor, *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, p. 445–472, Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York, 1999.

[Bat99b] D. Batens, Zero logic adding up to classical logic, *Logical Studies*, vol. 2, 1999, (Electronic Journal: `http://www.logic.ru/LogStud/02/LS2.html`).

[Bat00a] D. Batens, Minimally abnormal models in some adaptive logics, *Synthese*, vol. 125, p. 5–18, 2000.

[Bat00b] D. Batens, A survey of inconsistency-adaptive logics, in D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.P. Van Bendegem, editors, *Frontiers of Paraconsistent Logic*, p. 49–73, Research Studies Press, Baldock, UK, 2000.

[Bat01a] D. Batens, A dynamic characterization of the pure logic of relevant implication, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 30, p. 267–280, 2001.

[Bat01b] D. Batens, A general characterization of adaptive logics, *Logique et Analyse*, vol. 173–175, p. 45–68, 2001, verschenen 2003.

[Bat03a] D. Batens, Adaptieve logica's. Een precieze benadering van vertrouwde maar door logici verwaarloosde redeneervormen, *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, vol. 95, p. 174–189, 2003.

[Bat03b] D. Batens, A formal approach to problem solving, in C. Delrieux and J. Legris, editors, *Computer Modeling of Scientific Reasoning*, p. 15–26, Bahia Blanca, Argentinia, 2003, Universidad Nacional Del Sur. EDIUNS.

[Bat04a] D. Batens, *Problem Solving and Adaptive Logics. A Logica-Philosophical Study*, 2004, beschikbaar op `http://logica.ugent.be/dirk/francqui.html`.

[Bat04b] D. Batens, A procedural criterion for final derivability in inconsistency-adaptive logics, in S. Rahman, J. Symons, D.M.

Gabbay and J.P. Van Bendegem, editors, *Logic, Epistemology and the Unity of Science*, p. 459–485, Kluwer, Dordrecht, 2004.

[BD] D. Batens and K. De Clercq, A rich paraconsistent extension of full positive logic, *Logique et Analyse*, ter perse.

[BDV] D. Batens, K. De Clercq and G. Vanackere, Simplified dynamic proof formats for adaptive logics, te verschijnen.

[Bel69] N.D. Belnap, Questions, their presuppositions and how they can fail to arise, in K. Lambert, editor, *The Logical Way of Doing Things*, p. 23–37, Yale University Press, New Haven, 1969.

[BM00a] D. Batens and J. Meheus, The adaptive logic of compatibility, *Studia Logica*, vol. 66, p. 327–348, 2000.

[BM00b] D. Batens and J. Meheus, A tableau method for inconsistency-adaptive logics, in R. Dyckhoff, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volume 1847 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, p. 127–142, Springer, 2000.

[BM01] D. Batens and J. Meheus, Shortcuts and dynamic marking in the tableau method for adaptive logics, *Studia Logica*, vol. 69, p. 221–248, 2001.

[BMPV03] D. Batens, J. Meheus, D. Provijn and L. Verhoeven, Some adaptive logics for diagnosis, *Logic and Logical Philosophy*, vol. 11/12, p. 39–65, 2003.

[BP01] D. Batens and D. Provijn, Pushing the search paths in the proofs. A study in proof heuristics, *Logique et Analyse*, vol. 173–174–175, p. 113–134, 2001, verschenen 2003.

[BS76] N.D. Belnap and T.B. Steel, *The Logic of Questions and Answers*, Yale University Press, New Haven, 1976.

[Car50] Rudolf Carnap, *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, Chicago, 1950.

[Car83] L. Carlson, *Dialogue Games. An Approach to Discourse Analysis*, volume 17 of *Synthese Language Library*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/London, 1983.

[Che80] B.F. Chellas, *Modal Logic: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[DC] K. De Clercq, A dynamic proof theory for question evocation from inconsistent premises, te verschijnen.

[DC00] K. De Clercq, Two new strategies for inconsistency-adaptive logics, *Logic and Logical Philosophy*, vol. 8, p. 65–80, 2000, verschenen 2002.

[DV] K. De Clercq and L. Verhoeven, Sieving out relevant and efficient questions, *Logique et Analyse*, ter perse.

[DV03] K. De Clercq and R. Vanderbeken, A procedure for generating (conditional) answers in a goal-directed way, in C. Delrieux and J. Legris, editors, *Computer Modeling of Scientific Reasoning*, p. 57–64, Bahia Blanca, Argentinia, 2003, Universidad Nacional Del Sur. EDIUNS.

[Fuh91] A. Fuhrmann, Theory contraction through base contraction, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 20, p. 175–203, 1991.

[Fuh97] A. Fuhrmann, *An Essay on Contraction*, SLLI Publications, CSLI, Stanford, California, 1997.

[Gin95] J. Ginzburg, Resolving Questions I & II, *Linguistics and Philosophy*, vol. 18, p. 459–527, 567–609, 1995.

[Gri75] H.P. Grice, Logic and conversation, in P. Cole and J.L. Morgan, editors, *Speech Acts*, volume 3 of *Syntax and Semantics*, p. 41–58, Academic Press, New York, 1975.

[GS96] J. Groenendijk and M. Stokhof, Questions, in J. van Benthem and A. ter Meulen, editors, *Handbook of Logic and Language*, p. 1055–1125, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[Han89] S. O. Hansson, New operators for theory change, *Theoria*, vol. 55, p. 115–132, 1989.

[Han91] S.O. Hansson, Belief contraction without recovery, *Studia Logica*, vol. 50, p. 251–260, 1991.

[Han99] S.O. Hansson, *A Textbook of Belief Dynamics*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999.

[Har61] D. Harrah, A logic of questions and answers, *Philosophy of Science*, vol. 28, nr. 1, p. 40–46, 1961.

[Har02] D. Harrah, The logic of questions, in D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 8, p. 1–60, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, second edition, 2002.

[HC84] G.E. Hughes and M.J. Cresswell, *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London, 1984.

[HH95] J. Hintikka and I. Halonen, Semantics and pragmatics for why-questions, *The Journal of Philosophy*, vol. 92, nr. 12, p. 636–657, 1995.

[HHM99] J. Hintikka, I. Halonen and A. Mutanen, Interrogative logic as a general theory of reasoning, in J. Hintikka, editor, *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery*, p. 47–90, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[Hin73] J. Hintikka, *Logic, Language-Games, and Information*, Clarendon Press, Oxford, 1973.

[Hin81] J. Hintikka, On the logic of an interrogative model of scientific inquiry, *Synthese*, vol. 47, p. 69–83, 1981.

[Hin83] J. Hintikka, New foundations for a theory of questions and answers, in F. Kiefer, editor, *On Questions*, p. 159–190, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1983.

[Hin85] J. Hintikka, The interrogative model of inquiry as a general theory of argumentation, *Communication and Cognition*, vol. 25, p. 221–242, 1985.

[Hin89] J. Hintikka, The role of logic in argumentation, *The Monist*, vol. 72, p. 3–24, 1989.

[Hin96] J. Hintikka, Strategic thinking in argumentation and argumentation theory, *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 196, p. 307–324, 1996.

[Hin99] J. Hintikka, *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1999.

[Hoe83] J. Hoepelman, On questions, in F. Kiefer, editor, *Questions and Answers*, p. 191–228, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1983.

[HS79] J. Hintikka and E. Saarinen, Information-seeking dialogues: some of their logical properties, *Studia Logica*, vol. 32, p. 355–363, 1979.

[Jun96] S. Jung, *The Logic of Discovery. An Interrogative Approach to Scientific Inquiry*, P. Lang, New York, 1996.

[KM92] F. Katsuno and A.O. Mendelzon, On the difference between updating a knowledge database and revising it, in P. Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, p. 183–203, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Leś00] P. Leśniewski, On the generalized reducibility of questions, in J. Nida-Rumelin, editor, *Proceedings of the 3rd International Congress of the Society for Analytical Philosophy*, p. 119–126, Berlin/New York, 2000, Walter de Gruyter.

[Lev80] I. Levi, *The Enterprise of Knowledge*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1980.

[LS77] E.J. Lemmon and D.S. Scott, *The 'Lemmon Notes': An Introduction to Modal Logic*, Blackwell, Oxford, 1977.

[Mak85] D. Makinson, How to give it up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change, *Synthese*, vol. 62, p. 347–363, 1985.

[Mak87] D. Makinson, On the status of the postulate of recovery in the logic of theory change, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 16, p. 383–394, 1987.

[Mak95] D. Makinson, Review of Tennant [Ten94], *Mathematical Reviews*, nr. 95i:03065, 1995.

[Man82] R. Manor, Pragmatics and the logic of questions and assertions, *Philosophica*, vol. 29, nr. 1, p. 45–96, 1982.

[Meh] J. Meheus, Paraconsistent compatibility, *Logique et Analyse*, ter perse.

[Meh93] J. Meheus, Adaptive logic in scientific discovery: The case of Clausius, *Logique et Analyse*, vol. 143–144, 1993.

[Meh99] J. Meheus, Erotetic arguments from inconsistent premises, *Logique et Analyse*, vol. 165–166, p. 49–80, 1999.

[Meh00] J. Meheus, An extremely rich paraconsistent logic and the adaptive logic based on it, in D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.P. Van Bendegem, editors, *Frontiers of Paraconsistent Logic*, p. 189–201, Research Studies Press, Baldock, UK, 2000.

[Meh01] J. Meheus, Adaptive logics for question evocation, *Logique et Analyse*, vol. 173–174–175, p. 135–164, 2001, verschenen 2003.

[Neb91] B. Nebel, Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches, in *Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 301–311, Morgan Kaufmann, 1991.

[NF00] R. Nelken and N. Francez, A calculus for interrogatives based on their algebraic semantics, in D. Heylen, A. Nijholt and G. Scollo, editors, *Proceedings of TWLT16/AMILP2000*, p. 143–160, 2000.

[Pli98] A. Pliuškevičienė, Extended disjunction and existence properties for some predicate modal logics, *Logic Journal of the IGPL*, vol. 6, nr. 5, p. 775–787, 1998.

[Pri79] G. Priest, The logic of paradox, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 8, nr. 2, p. 219–241, 1979.

[Pri91] G. Priest, Minimally inconsistent LP, *Studia Logica*, vol. 50, nr. 2, p. 321–331, 1991.

[Res64] N. Rescher, *Hypothetical Reasoning*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.

[Res68] N. Rescher, *Topics in Philosophical Logic*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1968.

[RS95] G. Restall and J. Slaney, Realistic belief revision, Technical Report TR-ARP-2-95, Australian National University, 1995.

[Smi88] J. Smith, Inconsistency and scientific reasoning, *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 19, p. 429–445, 1988.

[SS78] D.J. Shoesmith and T.J. Smiley, *Multiple-conclusion Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[Ten94] N. Tennant, Changing the theory of theory change: Towards a computational approach, *British Journal for Philosophy of Science*, vol. 45, p. 865–897, 1994.

[Ten97] N. Tennant, On having bad contractions, or: no room for recovery, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 7, nr. 1-2, p. 241–266, 1997.

[Van97] G. Vanackere, Ambiguity-adaptive logic, *Logique et Analyse*, vol. 159, p. 261–280, 1997, verschenen 1999.

[Was99] R. Wasserman, Resource-bounded belief revision, *Erkenntnis*, vol. 50, nr. 2–3, p. 429–446, 1999.

[Wiś] A. Wiśniewksi, Reducibility of safe questions to sets of atomic yes-no questions, te verschijnen.

[Wiś94] A. Wiśniewski, On the reducibility of questions, *Erkenntnis*, vol. 40, p. 265–284, 1994.

[Wiś95] A. Wiśniewski, *The Posing of Questions: Logical Foundations of Erotetic Inferences*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1995.

[Wiś03] A. Wiśniewski, Erotetic search scenarios, *Synthese*, vol. 134, p. 389–427, 2003.

[WK95] D. N. Walton and E.C.W. Krabbe, *Commitment in Dialogue: Basic Concepts of Interpersonal Reasoning.* SYNY Press, Albany, NY, 1995.