UNE THÉORIE POSITIVE DES ENSEMBLES

Déjà parus

Cahier 1 — épuisé
Intuitionnisme et théorie de la démonstration.

Cahier 2 — épuisé
Textes de Jean Pieters.

Cahier 3 — épuisé
J.L. Moens, *Forcing et sémantique de Kripke–Joyal.*

Cahier 4 — épuisé
La théorie des ensembles de Quine.

Cahier 5
T.E. Forster, *Quine's New Foundations.*

Cahier 6
Logique et informatique.

Cahier 7
L'anti-fondation en logique et en théorie des ensembles.

Cahier 8
Ph. de Groote (ed.), *The Curry–Howard Isomorphism.*

Cahier 9
A. Pétry (éd.), *Méthodes et analyse non standard.*

Cahier 10
M.R. Holmes, *Elementary Set Theory with a Universal Set.*

Cahier 11
Chr. Michaux (ed.), *Definability in Arithmetics and Computability.*

Cahier 12
P. van Praag (éd.), *Aspects de la dualité en mathématique.*

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

13

UNE THÉORIE POSITIVE DES ENSEMBLES

Olivier Esser

CENTRE NATIONAL DE RECHERCHES DE LOGIQUE
NATIONAAL CENTRUM VOOR NAVORSINGEN IN DE LOGICA

ACADEMIA–BRUYLANT LOUVAIN-LA-NEUVE 2004

Cahier 13 rédigé par :
O. Esser,
Université libre de Bruxelles.

Composition :
D. Dzierzgowski.

Centre national de recherches de logique
`http://www.lofs.ucl.ac.be/cnrl/Cahiers/`

D/2004/4910/18 ISBN 2–87209–750–3

Imprimé en Belgique

Je tiens à remercier Monsieur Maurice Boffa pour les précieux conseils qu'il m'a donnés tout au long de la préparation de ce Cahier.

Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur Roland Hinnion pour les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble ainsi que pour sa patience à relire mes textes. Ses commentaires pertinents m'ont aidés à réduire les erreurs et à améliorer la présentation.

Je remercie aussi Monsieur Marco Forti pour les agréables discussions que nous avons eues à Pise et Monsieur Jean Drabbe pour son soutien mathématique et moral.

Enfin je tiens à exprimer toute ma gratitude envers tous les membres du séminaire interuniversitaire de Logique mathématique.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Table des matières

Avant-propos

Ce Cahier est essentiellement ma thèse de doctorat ([7]). Quelques fautes mineures ont été corrigées. Le principal changement est une amélioration du résultat principal: KM + « *On* est ramifiable » est mutuellement interprétable avec la théorie GPK_∞^+. Dans la version originale j'avais ajouté un axiome du choix à GPK_∞^+: AC_{BF} permettant de choisir dans les ensembles bien fondés de GPK_∞^+. Remarquant ensuite que ce n'était pas nécessaire, cet axiome a été supprimé dans cette édition. La preuve du fait que GPK_∞^+ interprète KM + « *On* est ramifiable » a été simplifiée et n'utilise plus la notion d'arbre binaire comme dans la version originale.

Depuis cette thèse, quelques nouveaux résultats ont été prouvés concernant la théorie GPK_∞^+ qui n'ont pas été inclus dans cet ouvrage. Essentiellement le fait que GPK_∞^+ est contradictoire avec (toutes les formes de) l'axiome du choix ([9]) et le fait que GPK_∞^+ sans l'axiome de l'infini est mutuellement interprétable avec GPK_∞^+ ([10]). Les résultats concernant la théorie GPK_∞^+ ont été appliqués à la logique paraconsistante ([4]).

Enfin je tiens à rendre un hommage particulier au Professeur Maurice Boffa qui fut mon promoteur de thèse et qui décéda prématurément à la suite d'une pénible maladie.

Olivier Esser
Décembre 2003

Introduction

1. Motivation et présentation de la théorie

La théorie naïve des ensembles, celle utilisée par G. Cantor, le père de la théorie des ensembles, est basée sur les postulats suivants:

(a) Tout objet est un ensemble et vice-versa.
(b) Toute collection descriptible d'objets forme un ensemble.

Très tôt, on découvrit des paradoxes, comme le fait que l'« ensemble » des ordinaux est un ordinal On satisfaisant $On \in On$ ce qui est impossible [1] ! Néanmoins, on croyait que ces paradoxes provenaient de légères incorrections dans les définitions utilisées, entre autres la définition d'ordinal.

B. Russell (1902) mit fin à ces espoirs en donnant un paradoxe ne faisant intervenir que des notions fondamentales de théorie des ensembles: l'« ensemble » $\{x \mid x \notin x\}$ ne peut exister car sinon, en nommant cet ensemble a, on aurait $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$. Il fallait donc se rendre à l'évidence, la théorie des ensembles devait être fondamentalement changée. Clairement, c'est le point (b) de la théorie naïve qui pose problème.

1. Paradoxe dit de Burali-Forti, découvert en fait par G. Cantor en 1895.

La stratégie que l'on inventa pour se débarrasser de ces paradoxes fut celle-ci: supprimer le point (b) et le remplacer par l'idée suivante: si l'on dispose d'un ensemble et si l'on effectue des manipulations mathématiques habituelles sur celui-ci, la nouvelle collection obtenue est un ensemble. Cette idée a fourni, après plusieurs essais, la théorie ZF de Zermelo-Fraenkel. C'est la théorie des ensembles la plus couramment utilisée aujourd'hui. Dans ZF, on peut voir intuitivement les ensembles comme des collections qui ne sont pas « trop grosses ». Ce point de vue apparaît plus clairement dans des variantes de ZF, comme la théorie de Gödel-Bernays où l'on prouve qu'une « classe » (c'est-à-dire, en gros, une collection définissable d'ensembles) forme un ensemble si et seulement si elle n'est pas en bijection avec la classe universelle (c'est-à-dire la classe de tous les ensembles) [2].

L'idée générale de cet essai sera d'étudier une autre théorie, faisant mieux ressortir ce qui ne va pas dans la théorie naïve des ensembles. Cette théorie sera la théorie du premier ordre GPK^+.

L'idée de GPK^+ est de dire que le paradoxe de Russell (et les autres paradoxes de la théorie naïve des ensembles) viennent du fait que l'on a utilisé une négation dans la définition de ce que l'on aurait voulu être un ensemble. On postule donc que toute formule positive (sur le langage de la théorie des ensembles) définit un ensemble. Cette théorie est beaucoup trop faible pour fournir quoi que ce soit d'intéressant. On élargit donc la classe des formules positives aux formules positives bornées (on autorise en plus des quantificateurs du type $\forall x \in y$ ou $\exists x \in y$). On ajoute ensuite un schéma d'axiomes disant que pour toute « classe d'ensembles » (c'est-à-dire pour toute collection définissable d'ensembles), on peut trouver un plus petit ensemble (pour l'inclusion) qui la contient, cet ensemble étant appelé la clôture de la classe. Ce dernier point peut être vu comme une version affaiblie du point (b) de la théorie naïve.

On remarque que la théorie GPK^+ est essentiellement non bien fondée. La formule $x = x$ est positive, ce qui permet de conclure à l'existence de l'ensemble universel $V = \{x \mid x = x\}$; évidemment $V \in V$. Une définition précise de GPK^+ sera donnée aux chapitres 1 et 2.

2. Le lecteur pourra trouver un compte-rendu de l'histoire du développement de la théorie des ensembles, comprenant une bibliographie dans [18].

2. Ce qui est connu sur GPK^+

La théorie GPK^+ apparaît pour la première fois dans [26] et dans [11] (en fait elle apparaît sous une forme plus faible: GPK). Dans ces articles sont construits des modèles de GPK^+, qui sont étudiés en détail. Ces modèles sont les hyperunivers [3]. D'autres articles, dus à M. Forti (en collaboration avec F. Honsell et M. Lenisa) ont paru sur les hyperunivers ([13], [14], [16], [15] et [17]). Il convient également de mentionner la thèse de R.J. Malitz ([23]) qui étudie des structures fort semblables aux hyperunivers et fait office de précurseur en ce domaine (en réalité, certaines structures étudiées par Malitz sont des hyperunivers, mais ceci n'a été prouvé que plus tard; de plus la notion d'hyperunivers n'était pas dégagée).

Les hyperunivers sont les seuls modèles que l'on connaît réellement de GPK. (D'autres modèles existent mais sont construits directement à partir de ceux-ci). Donnons, à titre informatif, une définition de ceux-ci.

Rappelons la définition de la topologie de Vietoris (voir [3]). Dans ce qui suit nous utiliserons les notions de *κ-topologie*, *κ-compacité* d'un espace κ-topologique, etc. Toute ces notions proviennent des notions habituelles, en remplaçant « fini » par « κ-fini », c'est-à-dire de cardinalité $< \kappa$. Un *espace κ-topologique* est donc un espace topologique où la classe des fermés est stable par intersection κ-finie.

Définition.
La κ-topologie de Vietoris *sur l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathrm{cl}}X$ des sous-ensembles fermés d'un espace topologique X est la κ-topologie ayant comme sous-base des ensembles fermés les ensembles suivants: $\Box(a) = \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}X \cap \mathcal{P}(a)$ et $\Diamond(a) = \{c \in \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}X \mid c \cap a \neq \varnothing\}$ pour chaque ensemble fermé a de X.*

Définitions. *Une structure $(H, \in_H)$ où H est un espace κ-topologique* 0-*dimensionnel et $\in_H$ est une relation binaire extensionnelle sur H est un* κ-hyperunivers *ssi* [4]

$$\psi_{\in_H} : H \to \mathcal{P}_{\mathrm{cl}}H : \psi_{\in_H}(x) = \{y \in H \mid y \in_H x\}$$

3. Le terme « hyperunivers » apparaît dans [11].
4. « ssi » est une abréviation pour « si et seulement si ».

> *est un homéomorphisme entre H et sa κ-topologie de Vietoris sur $\mathcal{P}_{\mathrm{cl}}H$. Étant donné un hyperunivers, son* additivité *est le plus petit cardinal κ telle que ce soit un κ-hyperunivers.*
>
> **Remarque.** *Le caractère 0-dimensionnel est automatiquement satisfait lorsque $\kappa > \omega$.*

La topologie des hyperunivers jouit de propriétés remarquables; on peut montrer, par exemple, qu'elle est κ-compacte [5]. De plus, il est également possible de montrer que si κ désigne l'additivité d'un hyperunivers; alors κ est fortement inaccessible et ramifiable [6].

3. Présentation

Le but de ce travail est d'étudier la théorie GPK^+ en tant que telle, d'étudier quelle théorie des ensembles peut être menée à bien dans GPK^+. Mis à part les quelques propositions triviales données au chapitre 1, rien n'avait été fait jusqu'à présent dans ce domaine. Précisons toutefois que les travaux sur les hyperunivers, les modèles connus de GPK^+, ont été une source d'inspiration pour l'étude de cette théorie.

Les chapitres 1 et 2 donnent les axiomes de la théorie ainsi que quelques propriétés de base de celle-ci. Nous y remarquons notamment que les modèles de GPK^+ satisfont plusieurs axiomes des hyperunivers. On y voit par exemple que, à l'instar des hyperunivers, les modèles de GPK^+ se comportent comme des espaces topologiques; cependant ce n'est plus une intersection quelconque de fermés qui donne un fermé (axiome H_3) mais une intersection *définissable* de fermés qui donne un fermé.

Le chapitre 3 commence réellement l'étude de GPK^+. Nous y étudions des propriétés de théorie des ensembles ainsi que des propriétés « topologiques ». On y montre notamment que le schéma de remplacement est valable pour les ensembles « discrets ».

5. Si $\mathcal{P}$ est une propriété d'un espace topologique; κ-$\mathcal{P}$ est la propriété $\mathcal{P}$ où l'on a remplacé partout « fini » par « κ-fini » c'est-à-dire de cardinalité $< \kappa$; κ-compact signifie donc que tout recouvrement par des ouverts contient un sous-recouvrement de cardinalité $< \kappa$.
6. On inclut ω (l'ensemble des ordinaux finis) parmi les cardinaux fortement inaccessibles et ramifiables.

Le chapitre 4 se consacre à l'étude des ordinaux dans GPK^+. On y montre qu'ils sont isolés (au sens topologique). On y montre en outre qu'ils ont des propriétés fort semblables aux ordinaux de ZF. Ce point de vue sera éclairci plus tard: nous verrons au chapitre 6 qu'ils sont réellement ceux de ZF.

Au chapitre 5, on définit la notion d'ensembles bien fondés. On montre que ceux-ci peuvent s'obtenir par induction de la même manière que dans ZF_0 (ZF sans l'axiome de fondement).

Au chapitre 6, on montre que, moyennant l'ajout d'une forme de l'axiome de l'infini, les ensembles bien fondés forment une interprétation de la théorie ZF de Zermelo-Fraenkel (les ordinaux de GPK^+ étant bien fondés; on remarque, comme mentionné au chapitre 4 que ce sont ceux de ZF). De plus, on remarque que l'on peut représenter une classe A d'ensembles bien fondés par sa clôture $\overline{A}$; ceci de manière injective. Cette remarque permet de montrer que l'on peut, en fait, interpréter la théorie de Kelley-Morse. La théorie de Kelley-Morse prouvant la consistance de ZF; il en est de même de GPK^+_∞ (GPK^++ l'axiome de l'infini).

Le chapitre 7 se consacre à l'étude de la théorie d'origine GPK. On y étudie dans quelle mesure les résultats des paragraphes précédents peuvent s'adapter. On y montre que, moyennant l'axiome de l'infini, il est toujours possible d'interpréter la théorie ZF.

Au chapitre 8, nous prouvons que GPK^+ n'est pas finiment axiomatisable.

Au chapitre 9, nous donnons une variante de la théorie GPK^+, où les classes propres deviennent des vrais objets de la théorie. On y remarque que cette théorie, nommée $GBGPK^+$, est finiment axiomatisable et que, de plus, tout théorème de $GBGPK^+$ ne faisant intervenir que des ensembles est prouvable dans GPK^+ et vice-versa. Ceci est tout à fait analogue au passage de la théorie ZF à la théorie de Gödel-Bernays, d'où le titre du chapitre: « Gödel-Bernays dans GPK ».

Au chapitre 10, nous introduisons l'axiome de Kelley-Morse « *On* est ramifiable ». Ce dernier axiome est une généralisation à *On* (la classe des ordinaux) de la propriété correspondante pour les cardinaux de ZF. C'est une propriété très forte, elle implique notamment l'existence d'une classe propre de cardinaux inaccessibles. La raison pour laquelle on introduit cet axiome est qu'il sera utile au chapitre suivant.

Le chapitre 11 est le plus important. Nous y montrons que GPK^+_∞ interprète la théorie KM+ « *On* est ramifiable » et vice-versa. Ce résultat montre que GPK^+_∞ est une théorie très forte.

Au chapitre 12, nous montrons un théorème de point fixe valable dans GPK^+.

Au chapitre 13, nous dirons quelques mots sur les « décorations de graphes ». On y donne un graphe qui n'admet aucune décoration. Ceci montre intuitivement que l'on ne peut avoir « tous » les ensembles non bien fondés.

Au chapitre 14, nous étudions dans Kelley-Morse et dans Gödel-Bernays une propriété de point fixe semblable à celle du chapitre 12.

En guise de conclusion, les résultats prouvés dans ce qui suit montrent qu'en fait les théories habituelles telles que ZF ont exclu trop d'ensembles. En détruisant exactement ce qui fournit le paradoxe de Russell (l'usage de la négation), on retrouve non seulement les ensembles des théories habituelles des ensembles ainsi que de nombreux autres ensembles non bien fondés (tel l'univers) qu'on n'avait aucune raison valable d'exclure.

Signalons que les principaux résultats apparaissant dans ce Cahier figurent dans les trois articles [5], [6], [8].

4. Prérequis

Nous avons essayé que ce travail puisse être lu de manière indépendante. En annexe, nous avons rappelé les points essentiels à connaître pour sa compréhension. Nous avons néanmoins supposé que le lecteur était familiarisé avec la théorie habituelle des ensembles ZF (le lecteur pourra trouver un exposé de cette théorie dans [22]). Nous avons également supposé que le lecteur maîtrise les rudiments de la théorie des modèles (le calcul des prédicats) ainsi que le célèbre théorème d'incomplétude de Gödel. Le lecteur ayant quelques lacunes dans ces domaines pourra les combler en lisant les chapitres A1 et le début du chapitre A2 de [2] (pour le calcul des prédicats) ainsi que le chapitre D2 de ce même ouvrage (pour le théorème de Gödel).

Nous avons également utilisé certaines propriétés de grands cardinaux. Elles sont rappelées en annexe. Il serait néanmoins préférable que le lecteur ait une certaine connaissance préalable sur ce sujet, voir par exemple le chapitre B3 de [2]. Quelques connaissances élémentaires de topologie sont également nécessaires à la bonne compréhension de cet ouvrage (voir par exemple [21]).

Chapitre 1

Les axiomes de la théorie

Le langage considéré ici sera celui de la théorie des ensembles: l'égalité ($=$) et un symbole de relation binaire appelé « appartenance » ($\in$). Sur ce langage, on définit de manière habituelle les notions de terme et de formule.

Si Γ est une formule, on notera $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ pour indiquer que les variables libres de Γ sont parmi $x_1, \dots, x_n$. On utilisera parfois la notation vectorielle $\Gamma(\vec{x})$ au lieu de $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ afin d'alléger l'écriture.

Nous utiliserons aussi des paramètres dans les formules (sauf mention contraire). Ceux-ci ne servent qu'à alléger l'exposé; les théorèmes (et les axiomes) que nous énoncerons doivent évidemment être des formules sans paramètres. Généralement, nous utiliserons les premières lettres de l'alphabet latin ($a, b, c, \dots$) pour désigner ceux-ci; les dernières (x, y, z) servent à représenter les variables.

Classiquement, nous utiliserons aussi la notation $\Gamma(e_1, \dots, e_n)$ pour désigner la formule Γ où l'on a remplacé les variables libres par les « expressions ensemblistes » $e_1, \dots, e_n$. Par expression ensembliste, nous entendons les variables libres ainsi que les expressions $\{x \mid \Lambda(x, \vec{y})\}$ où Λ est une formule quelconque dont les variables libres sont parmi les $(x, \vec{y})$. Il faut évidemment retraduire les symboles d'appartenance et d'égalité entre ces expressions pour obtenir une vraie formule.

Notation. *Si* Σ *est une collection de formules, on note* $\mathrm{comp}(\Sigma)$ *la compréhension pour les formules de* Σ*, c'est-à-dire le schéma d'axiomes suivant:*

$\mathrm{comp}(\Sigma)$*: la clôture universelle des axiomes* $\exists u\,\forall t\ (t \in u \Leftrightarrow \varphi)$*, pour chaque formule* $\varphi \in \Sigma$ *n'ayant pas* u *pour variable libre.*

Remarquons que le fait de prendre la clôture universelle permet de définir des ensembles à l'aide de formules avec paramètres.

La théorie naïve des ensembles voudrait avoir la compréhension pour toutes les formules. Le paradoxe de Russell montre que l'on ne pourra jamais avoir la compréhension pour la formule suivante: « $t \notin t$ ». Nous étudierons ici une théorie disant que toute formule « positive généralisée », c'est-à-dire ne contenant pas trop de négation, définit un ensemble.

Commençons par définir la classe *BPF* de formules (*BPF* pour Bounded Positive Formulas). Ce sont les formules construites à partir des formules atomiques (les formules de la forme « $x \in y$ » et « $x = y$ ») et des étapes de construction suivantes:

(a) À partir de φ, ψ; construire :

$$\varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ (\forall x \in y)\varphi,\ \exists x\varphi.$$

Définissons à présent les formules *GPF* (*GPF* pour Generalized Positive Formulas). Elles sont construites à partir des formules atomiques, des étapes de construction des formules *BPF* et de l'étape suivante:

(b) Si φ est une formule *GPF* et $\Theta(x)$ une formule *quelconque* ayant pour seule variable libre x, alors la formule suivante est *GPF*:

$$\forall x\,(\Theta(x) \Rightarrow \varphi).$$

Sauf mention contraire, nous utiliserons les conventions suivantes:

- les dernières lettres de l'alphabet grec en minuscules: φ, χ, ψ (pas la lettre ω qui sera réservée à un autre usage) seront utilisées pour représenter les formules *GPF* ou *BPF*;
- les lettres grecques majuscules (sauf Σ et Ω) seront utilisées pour représenter les formules quelconques;

- les lettres minuscules latines seront utilisées pour représenter ce qui sera des ensembles, c'est-à-dire les objets de la théorie.

On définit à présent la théorie GPK telle qu'elle a été définie dans [26] et [11].

Définition. *La* théorie GPK *est la théorie dont les axiomes sont :*

(a) EXT*:* $\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$
(axiome d'extensionnalité),

(b) VIDE*:* $\exists x \ \forall y \ y \notin x$ *(cet* x *sera classiquement noté* $\varnothing$*),*

(c) comp(*GPF*)

Remarquons que le point (c) est évidemment un schéma. L'axiome (b) sert à éviter le modèle trivial formé d'un seul auto-singleton (un ensemble Ω est dit être un auto-singleton ssi [1] $\Omega = \{\Omega\}$, c'est-à-dire ssi $\forall x \quad x \in \Omega \Leftrightarrow x = \Omega$). En effet on peut remarquer que si un modèle $\mathcal{M}$ est formé d'un seul auto-singleton Ω, alors pour chaque formule *GPF* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, on a $\mathcal{M} \models \varphi(\Omega, \ldots, \Omega)$ (procéder par induction sur la complexité de φ). De plus, si un modèle $\mathcal{M}$ de GPK $-$ {VIDE} n'a qu'un seul élément Ω, alors on doit avoir $\Omega \in \Omega$. Finalement, on voit que si $\mathcal{M}$ est un modèle de GPK $-$ {VIDE} comprenant deux éléments distincts a et b alors VIDE est satisfait car $\varnothing = \{x \mid x = a \wedge x = b\}$ est défini par une formule *BPF*. Ces considérations montrent donc que

$$\mathrm{GPK} - \{\mathrm{VIDE}\} \models \mathrm{VIDE} \Leftrightarrow (\exists a \ \exists b \quad a \neq b).$$

Dorénavant, on se placera dans un modèle donné de GPK.

La formule $t = t$ étant *BPF*, on voit qu'il existe un ensemble $V = \{t \mid t = t\}$ de tous les ensembles. Ceci montre que GPK est une théorie non bien fondée, on a en effet $V \in V$! Le paradoxe de Russell montre que l'on ne peut avoir l'existence de l'ensemble suivant: $\{x \mid x \notin x\}$. On voit d'ailleurs qu'il n'est pas défini par une formule *GPF*.

De la même manière que dans ZF, on maniera des classes dans GPK. Si $\Gamma(x, a_1, \ldots, a_n)$ est une formule quelconque dont les variables libres sont parmi $(x, a_1, \ldots, a_n)$; pour chaque $a_1, \ldots, a_n$ la collection A suivante:

1. « ssi » est une abréviation pour si et seulement si.

$A = \{x \mid \Gamma(x, a_1, \ldots, a_n)\}$ sera appelée une classe. Les classes ne sont pas des objets de la théorie. Elles ne figurent que comme abréviations; ainsi si $A = \{x \mid \Gamma(x, \vec{a})\}$, une notation telle que $x \in A$ doit être vue comme une abréviation pour la formule $\Gamma(x, \vec{a})$. De manière naturelle, si A et B sont deux classes, l'expression $A = B$ signifiera $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. On définit de manière évidente les opérations de réunion ($\cup$), d'intersection ($\cap$), ... de classes.

Nous dirons qu'une classe A est un ensemble ssi $\exists a\ \forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in A)$. Si cet a existe, il est unique en vertu de l'axiome d'extensionnalité. Dans ce dernier cas, nous noterons $a = A$ et nous identifierons a et A. Nous appellerons classe propre une classe qui n'est pas un ensemble. Nous utiliserons les lettres majuscules de l'alphabet latin pour désigner les classes.

Dans la théorie GPK, on ne peut plus, comme on le faisait pour ZF, imaginer les classes propres comme étant des collections « trop grosses pour former des ensembles ». La plus « grosse » classe, la classe universelle V, est ici un ensemble !

La proposition suivante dit que l'axiome de la paire est satisfait.

Proposition 1.1. $\forall a\ \forall b\ \exists u\ \forall t\ (t \in u \Leftrightarrow (t = a \vee t = b))$.

PREUVE. — C'est une des formules du schéma d'axiomes comp(BPF) (prendre $\varphi \equiv$ « $t = a \vee t = b$ »). □

Étant donné deux ensembles a et b, on définit le couple (a, b): $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. On voit en utilisant successivement l'axiome de la paire que l'on a: $\forall a\ \forall b\ \exists x\ x = (a, b)$. Plus généralement, on définit aussi des n-uples $(a_1, \ldots, a_n)$ pour chaque entier n. Ceux-ci sont définis par (méta-)induction sur n:

$$(a) = a$$
$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}).$$

Remarquons qu'à ce stade, n est un entier de la métathéorie, ce n'est pas un ensemble de la théorie. On verra cependant plus loin que l'on peut représenter les entiers dans la théorie GPK.

Définitions. *Une* fonctionnelle *est une classe F de couples satisfaisant:*

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ ((x,y) \in F \wedge (x,y') \in F \Rightarrow y = y')\,.$$

L'expression $y = F(x)$ désigne la formule $(x,y) \in F$. Une fonction *est définie comme étant une fonctionnelle qui est un ensemble.*

La proposition suivante montre que l'on peut manier librement les couples dans GPK.

Proposition 1.2. ([11]).

(a) *Les formules suivantes sont BPF :*

$$z = \{x\},\quad z = \{x,y\},\quad z = (x,y),\quad z = (x_1, \dots, x_n).$$

(b) *La classe des couples est un ensemble.*

(c) *Les fonctions de projections p_1, p_2, définies comme suit sur l'ensemble des couples: $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$, sont des ensembles. Il en est de même des fonctions effectuant des manipulations naturelles sur les couples (permutation des composantes, etc.) ou plus généralement sur les n-uples.*

PREUVE

(a) Il suffit simplement d'écrire en détail ces formules et de vérifier que les formules ainsi écrites sont *BPF*, par exemple $z = \{x,y\}$ s'exprime par

$$((\forall h \in z)(h = x \vee h = y)) \wedge (x \in z) \wedge (y \in z).$$

On fait de même avec $z = (x,y)$ en utilisant le fait que $z = \{x,y\}$ est *BPF*.

(b) Soit C cette classe, on a $C = \{z \mid \exists x\ \exists y\ z = (x,y)\}$, elle est donc définie par une formule *BPF* en vertu du a).

(c) Ceci se montre très facilement de la même manière que le (a). $\square$

Cette proposition permet de déduire, en corollaire, la proposition suivante (qui est en fait un schéma).

Proposition 1.3. *Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ une formule BPF, on a:*

$$\forall a_1 \dots \forall a_m\ \exists e\ e = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)\}.$$

PREUVE. — On a

$$e = \{z \mid \exists x_1 \dots \exists x_n \; z = (x_1, \dots, x_n) \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)\} .$$

□

On a la proposition suivante concernant les fonctions :

Proposition 1.4. *Soient f et g des fonctions, alors :*

(a) $\mathrm{dom}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid \exists y \; y = f(x)\}$ *est un ensemble.*

(b) $\mathrm{im}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \mid \exists x \; y = f(x)\}$ *est un ensemble.*

(c) *Il existe une fonction (donc un ensemble) $\hat{f}$:*

$$\hat{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f(y) \mid y \in x\} .$$

(d) $f \circ g \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y) \mid \exists z \; z = g(x) \wedge y = f(z)\}$ *est une fonction (donc un ensemble).*

PREUVE. — On vérifie facilement que $\mathrm{dom}(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont définis par des formules *BPF*. Pour le (c), on définit $\hat{f}$ de la manière suivante:

$$\hat{f} = \{(x, z) \mid [\forall r \in z \; \exists y \in x \; ((y, r) \in f)] \wedge [\forall y \in x \; \exists s \; ((y, s) \in f \wedge s \in z)]\} .$$

Il est aisé de voir que $\hat{f}$ répond à la question, de plus $\hat{f}$ est définie par une formule *BPF*.

Pour le (d), on vérifie facilement que $f \circ g$ est définie à l'aide d'une formule *BPF* ayant f et g pour paramètres. □

Cette proposition permet de conclure que l'on a le schéma de remplacement pour les formules *GPF*:

$$\forall a_1, \dots, \forall a_n \, \forall x \, \exists y \, \forall t \, (t \in y \Leftrightarrow \exists u \in x \; \varphi(u, t, a_1, \dots, a_n))$$

pour chaque formule *GPF* $\varphi(u, t, a_1, \dots, a_n)$ fonctionnelle en u, t. On voit en effet que dans ce cas l'*ensemble* $f = \{(u, t) \mid \varphi(u, t, \vec{a})\}$ est une fonction pour chaque valeur des paramètres $\vec{a}$ et que $\mathrm{im}(f)$ fournit l'ensemble y recherché.

Classiquement, si A et B sont deux classes (pas nécessairement propres), on définit le produit de A et de B comme étant:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B)\}.$$

Dorénavant lorsqu'on disposera d'un n-uple $(a_1, \dots, a_n)$, nous l'identifierons avec tout autre parenthésage de la suite $(a_1, \dots, a_n)$. Ainsi le triple $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$ sera identifié à $(a_1, (a_2, a_3))$. Ces identifications ne posent pas de problèmes puisque l'on passe d'une forme à l'autre par des fonctions (c'est-à-dire des ensembles) en vertu de la proposition 1.2. Moyennant cet abus de langage, le produit ensembliste devient une opération associative. Si A est une classe (pas nécessairement propre) on note $A^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Nous utiliserons quelquefois la notation vectorielle $\vec{x}$ si $\vec{x}$ désigne un n-uple. Une formule Γ à n variables libres $x_1, \dots, x_n$ sera parfois notée $\Gamma(\vec{x})$ au lieu de $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$. Dans le même ordre d'idées, nous écrirons quelquefois $\forall \vec{x}$ au lieu de $\forall x_1 \dots \forall x_n$; de même, on écrira $\exists \vec{x}$ pour $\exists x_1 \dots \exists x_n$.

Une ambiguïté pourrait naître dans la notation $\Gamma(\vec{x})$. On pourrait soit interpréter cette notation comme étant une formule ayant n variables libres $(x_1, \dots, x_n)$, soit comme étant une formule à une variable libre que l'on a remplacé par le n-uple $(x_1, \dots, x_n)$. Mais en vertu des propositions précédentes, on peut coder les n-uples de telle façon que l'on puisse passer d'une formule du premier type à une formule du second type en respectant son caractère *BPF* ou *GPF* (et réciproquement). Ceci montre que ce léger abus de langage ne peut être source de problèmes.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 2

Le schéma d'axiomes CL

Dans ce chapitre, nous présenterons un schéma d'axiomes généralisant la règle de formation (b) des formules GPF.

Dans le premier paragraphe, nous donnerons l'énoncé du schéma CL. Nous y verrons que cet énoncé revient, en quelque sorte, à autoriser des paramètres dans la formule Θ de la règle de formation (b) des formules GPF.

Dans le dernier paragraphe, nous verrons que, moyennant le schéma CL, les modèles de GPK deviennent en quelque sorte des « modèles topologiques ». Nous ferons le parallèle avec les hyperunivers – les modèles connus de GPK – qui sont tous topologiques.

2.1. Le schéma CL et la règle de formation (b) des formules GPF

Soit A une classe, nous dirons que A a une clôture si l'intersection des *ensembles* qui la contiennent forme un ensemble, autrement dit s'il existe un plus petit ensemble (pour l'inclusion) qui la contient. Nous noterons $\overline{A}$ ou $\mathrm{cl}(A)$, la clôture de A si elle existe.

Soit $A = \{t \mid \Gamma(t)\}$ une classe définissable par une formule *sans paramètres* (c'est-à-dire Γ a une seule variable libre t). On montre que A a une clôture. En effet, soit

$$b = \{y \mid \forall x\,(x \supset \{t \mid \Gamma(t)\}) \Rightarrow y \in x\}\,,$$

b est un ensemble car il est défini par une formule GPF. On voit aussi que b est l'intersection des ensembles qui contiennent la classe $\{t \mid \Gamma(t)\}$. Ceci donne la proposition 2.1 (exprimable par un schéma) prouvable dans GPK.

Proposition 2.1.
Toute classe définie par une formule sans paramètres a une clôture.

Nous allons maintenant démontrer l'étape de formation (b) des formules GPF à partir de la proposition 2.1. Soit CBPF la théorie EXT + VIDE + comp(BPF) (CBPF pour « Comprehension for Bounded Positive Formulas »). Soit $P_{2.1}$ l'énoncé de la proposition 2.1.

Proposition 2.2. CBPF + $P_{2.1} \vDash \mathbb{C}(GPF)$.

PREUVE. — Soit φ une formule GPF. On va montrer, par induction sur la complexité de φ, que la classe $\{\vec{y} \mid \varphi(\vec{y},\vec{a})\}$ est un ensemble (ici $\vec{y}$ désigne les variables libres de φ et $\vec{a}$ les paramètres).

Si φ est atomique, c'est vrai puisque φ est BPF. Pour l'étape de formation (a), supposons que $\varphi \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \varphi(y,\vec{z},\vec{a}) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x \in y\, \varphi'(x,y,\vec{z},\vec{a})$ où φ' est GPF. Par l'hypothèse d'induction, la classe $b = \{(x,y,\vec{z}) \mid \varphi'(x,y,\vec{z},\vec{a})\}$ est un ensemble. On a donc

$$\{(y,\vec{z}) \mid \varphi(y,\vec{z},\vec{a})\} = \{(y,\vec{z}) \mid \forall x \in y (x,y,\vec{z}) \in b\}\,.$$

Cette classe est un ensemble car elle est définie par une formule BPF. Les autres étapes de (a) se démontrent de manière analogue.

Supposons maintenant que $\varphi \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \varphi(\vec{y},\vec{a}) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall x(\Theta(x) \Rightarrow \varphi'(x,\vec{y},\vec{a}))$. Considérons la classe A suivante:

$$A = \{(\vec{y},\vec{u}) \mid \forall x(\Theta(x) \Rightarrow \varphi'(x,\vec{y},\vec{u}))\}\,,$$

cette classe est définie par une formule sans paramètres, elle a donc une clôture $\overline{A}$. Montrons que $\overline{A} = A$ et donc que A est un ensemble. Il suffit clairement de montrer que $\overline{A} \subset A$. Soit $(\vec{y}\,',\vec{u}') \in \overline{A}$. Fixons un x

tel que $\Theta(x)$. On a clairement $\{(\vec{y},\vec{u}) \mid \varphi'(x,\vec{y},\vec{u})\} \supset A$, et donc aussi $\{(\vec{y},\vec{u}) \mid \varphi'(x,\vec{y},\vec{u})\} \supset \overline{A}$, on en conclut que l'on a $\varphi'(x,\vec{y}\,',\vec{u}')$, ceci pour chaque x tel que $\Theta(x)$; on a donc $(\vec{y}\,',\vec{u}') \in A$. On remarque maintenant que

$$\{\vec{y} \mid \varphi(\vec{y},\vec{a})\} = \widehat{p_1}\left(A \cap \{(\vec{y},\vec{u}) \mid \vec{u} = \vec{a}\}\right),$$

où p_1 est la fonction qui envoie le couple $(\vec{y},\vec{u})$ sur $\vec{y}$. La classe $A \cap \{(\vec{y},\vec{u}) \mid \vec{u} = \vec{a}\}$ est un ensemble car définie par une formule *BPF* (ayant A et $\vec{a}$ pour paramètres). Ce qui achève la preuve. □

Remarque. Nous pouvons voir que, dans l'étape de formation (b) des formules *GPF*, il n'est pas nécessaire que φ soit *GPF*, il suffit qu'elle soit atomique. Soit en effet GPK′ la théorie obtenue de la même manière que GPK mais où la règle (b) a été affaiblie comme mentionné ci-dessus. Montrons que GPK′ $\vDash$ comp(*GPF*). Un examen de la preuve de la proposition 2.1 montre que celle-ci reste satisfaite dans GPK′. On utilise alors la proposition 2.2 pour montrer que l'on a comp(*GPF*).

Les considérations précédentes nous amènent à renforcer la proposition 1.1 par le schéma d'axiomes CL disant que toute classe a une clôture [1]. Plus précisément:

$$\text{CL: } \forall \vec{a}\, \exists x\ [\forall z\ (\Gamma(z,\vec{a}) \Rightarrow z \in x) \wedge \forall y\ (\forall z\ (\Gamma(z,\vec{a}) \Rightarrow z \in y) \Rightarrow x \subset y)]\,,$$

pour chaque formule Γ dont les variables libres sont parmi les $(z,\vec{a})$.

Dans le schéma CL, $\vec{a}$ doit être vu comme une liste de paramètres et l'ensemble x comme la clôture de $\{z \mid \Gamma(z,\vec{a})\}$, c'est-à-dire un ensemble tel que

$$\{z \mid \Gamma(z,\vec{a})\} \subset x \quad \text{et} \quad \forall y\, (y \supset \{z \mid \Gamma(z,\vec{a})\}) \Rightarrow x \subset y.$$

Nous noterons GPK$^+$ la théorie CBPF+CL, en vertu de la proposition 2.2 cette théorie est équivalente à GPK + CL.

1. Le schéma CL destiné à renforcer GPK m'a été suggéré par M. Boffa. Nous ignorons si le schéma CL est démontrable à partir des axiomes de GPK; cela ne semble cependant pas être le cas.

2.2. La « topologie » de GPK^+ et les hyperunivers

Il est possible de voir que l'opération de clôture d'une classe donne une opération correspondant à une clôture topologique. On voit en effet qu'elle satisfait les axiomes de la clôture topologique d'un espace topologique: si A est une classe, on a

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad A \subset \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{\varnothing} = \varnothing. \tag{$\star$}$$

Rappelons cependant que cette clôture ne s'applique qu'aux classes de GPK^+, c'est-à-dire aux parties *définissables* de l'univers de GPK^+. En topologie, il est connu que si l'on a un ensemble E et une opération de clôture définie sur l'ensemble des parties de E qui satisfait les axiomes ($\star$), alors si l'on définit une partie $A \subset E$ comme étant fermée ssi $\overline{A} = A$; on a que les parties fermées de A satisfont les axiomes d'un espace topologique. Il est donc naturel, dans le cadre qui nous occupe, de définir une classe A comme étant fermée ssi $\overline{A} = A$; ce qui est équivalent à dire que A est un ensemble. De même, on dira qu'une classe A est ouverte ssi son complément $A^c = \{x \mid x \notin A\}$ est un ensemble. Comme on pouvait s'y attendre, les classes fermées se comportent comme les fermés d'un espace topologique:

Proposition 2.3.

(a) *La classe vide $\varnothing$ et la classe universelle $V = \{x \mid x = x\}$ sont ouvertes et fermées.*

(b) *L'union de deux classes fermées est une classe fermée.*

(c) *L'intersection des éléments d'une classe (c'est-à-dire d'une famille* définissable *de classes fermées) est une classe fermée.*

(Remarquons que cette proposition est exprimable au premier ordre, on a besoin d'un schéma pour le point (c)).

PREUVE

(a) La classe vide est fermée en vertu de l'axiome VIDE. La classe universelle V est fermée car elle est définie par une formule *BPF*: $V = \{x \mid x = x\}$. Ces deux classes étant complémentaires l'une de l'autre, elles sont également ouvertes.

(b) Soient a et b deux classes fermées (c'est-à-dire des ensembles), on a $a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$ et donc $a \cup b$ est un ensemble (c'est-à-dire une classe fermée).

(c) Soit $\Gamma(x, \vec{a})$ une formule quelconque. Montrons que pour chaque $\vec{a}$ la classe suivante: $A = \bigcup\{x \mid \Gamma(x, \vec{a})\}$ est fermée. Il suffit évidemment de prouver que $\overline{A} \subset A$. Pour chaque x tel que $\Gamma(x, \vec{a})$; on a $A \subset x$ et donc $\overline{A} \subset x$. On a donc $\overline{A} = \bigcup\{x \mid \Gamma(x, \vec{a})\} = A$; ce qui achève la preuve. $\square$

On voit à présent que les modèles de GPK^+ satisfont les axiomes H_1, H_2, H_4, H_5 des hyperunivers ainsi que l'axiome H_3 restreint aux parties définissables de GPK^+ (c'est-à-dire aux classes de GPK^+) (les axiomes des hyperunivers ont été rappelés dans l'introduction; nous y avons aussi donné la liste des principales références sur ce sujet).

Les hyperunivers sont les seuls modèles « réellement connus » de GPK. Les hyperunivers, étant des modèles topologiques d'ensembles, disposent de l'opération de clôture topologique et satisfont donc le schéma d'axiomes CL. De plus, les hyperunivers satisfont d'autres axiomes (tels la compacité et des propriétés de séparation forte) que l'on ne voit pas comment prouver dans GPK^+.

Chapitre 3

Premières propriétés de GPK^+

Dans ce chapitre, nous étudierons les premières propositions que l'on peut prouver dans GPK^+, nous nous placerons donc dans cette théorie.

Commençons par remarquer qu'il est évident que l'on peut traduire des expressions comportant des quantifications sur des classes fermées par des formules du premier ordre car les classes fermées correspondent, par définition, aux éléments de la théorie.

Il en est de même des affirmations comprenant des quantifications sur des classes ouvertes; car celles-ci se ramènent à des expressions du premier type en remplaçant chaque quantification sur une classe ouverte par une quantification du même type sur son complément et chaque $x \in U$, où U est une classe ouverte, par $x \notin U^c$.

On définit de manière naturelle la notion de point d'accumulation d'une classe A.

Définition. *Un ensemble a est dit être un* point d'accumulation *d'une classe A ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.*

Remarquons que la « topologie » de GPK^+ satisfait le premier axiome de séparation T_1 (c'est-à-dire les singletons des éléments sont fermés) en vertu de la proposition 1.1 (avec $a = b$).

Définition. *Un ensemble est dit* isolé *ssi la classe* $\{a\}$ *est ouverte. De manière précise:*

$$\text{« } a \text{ est isolé »} \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists x \, \forall y \, (y \neq a \Leftrightarrow y \in x).$$

Proposition 3.1. *Soit A une classe, on a pour tout ensemble x: $x \in \overline{A}$ ssi pour chaque classe ouverte U avec $x \in U$, on a $U \cap A \neq \varnothing$.*

Remarque. Cette proposition est exprimable au premier ordre par un schéma d'axiomes (on a besoin d'un axiome pour chaque classe A).

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1. — Il suffit de s'assurer que la preuve de la proposition topologique correspondante est encore valable dans le contexte qui nous occupe. Soit $x \in \overline{A}$ et soit U une classe ouverte avec $x \in U$. Si $U \cap A = \varnothing$, on aurait $U^c \supset A$ et donc $x \in U^c$ par la définition de la clôture. Ceci contredit le fait que $x \in U$. Réciproquement, soit x un ensemble tel que pour chaque classe ouverte U avec $x \in U$, on ait $U \cap A \neq \varnothing$. Il suffit de montrer que pour chaque ensemble f avec $f \supset A$, on a $x \in f$. Soit f avec $f \supset A$; si $x \notin f$, f^c serait une classe ouverte qui ne satisferait pas les hypothèses. □

Voici à présent une proposition disant que les fonctions sont « continues » pour la « topologie » de GPK^+.

Proposition 3.2. (exprimable par une formule du premier ordre). *Si U est une classe ouverte et f une fonction, l'image inverse de U par f:*

$$f_\star^{-1}(U) \overset{\text{déf}}{=} \{y \in \operatorname{dom}(f) \mid f(y) \in U\}$$

est l'intersection d'une classe ouverte avec le domaine de f.

PREUVE. — Soit U une classe ouverte, on a:

$$f_\star^{-1}(U) = \{y \in \operatorname{dom}(f) \mid f(y) \in U\} = \{y \mid f(y) \in U^c\}^c \cap \operatorname{dom}(f).$$

La classe $\{y \mid f(y) \in U^c\}^c$ est ouverte car son complément est définissable par une formule *BPF* (ayant f et U^c pour paramètres); ce qui montre le résultat. □

Rappelons que si a est une classe fermée (c'est-à-dire un ensemble), et f une fonction, alors $\{f(x) \mid x \in a\} = \hat{f}(a)$ est fermée (proposition 1.4 (c)). Nous savons qu'en topologie les fonctions continues satisfont cette propriété; il est donc naturel, en vertu de la proposition précédente, que cette propriété soit satisfaite dans GPK$^+$.

Proposition 3.3. *Soient U et W deux classes ouvertes et soit c l'ensemble des couples, alors il existe une classe ouverte O telle que $O \cap c = U \times W$.*

PREUVE. — On définit $O = \{(x,y) \mid x \in U^c \vee y \in W^c\}^c$ et on vérifie que le complément de la classe O est défini par une formule *BPF*; ce qui montre que O est ouverte. Il est aisé de voir que cette classe O répond à la question. □

Ce résultat a une signification du point de vue topologique. Le produit $V \times V$ où V désigne la classe universelle ($V \times V$ est donc l'ensemble des couples) peut être muni naturellement de deux « topologies »:

(a) La « topologie » induite par celle de V sur $V \times V$ (remarquons que $V \times V$ est un ensemble inclus à V). Pour cette dernière, une classe $O \subset V \times V$ est dite ouverte$_{\text{ind}}$ ssi il existe une classe ouverte U avec $O = U \cap (V \times V)$.
(b) La « topologie » produit. Pour cette dernière, une classe $O \subset V \times V$ est dite ouverte$_{\text{prod}}$ ssi $\forall (x,y) \in O$, il existe deux classes ouvertes U_1 et U_2 telles que $(x,y) \in U_1 \times U_2$ et $U_1 \times U_2 \subset O$.

La proposition 3.3 affirme que la deuxième « topologie » est « moins fine » que la première.

Par conséquent, un « fermé » pour la « topologie » (b) est également un « fermé » pour la topologie (a) et donc aussi pour la « topologie » de GPK$^+$ sur V. Ceci permet de remarquer qu'il est possible de traduire des expressions comprenant des quantifications sur des classes « fermées » ou « ouvertes » pour la topologie (b) par des formules du premier ordre. Néanmoins, nous n'utiliserons pas la topologie (b) par la suite. Une question naturelle est de savoir si la topologie (b) est réellement moins fine que la topologie (a) ou si ces deux topologies pourraient coïncider. Dans les hyperunivers et donc dans les modèles connus de GPK$^+$, ces deux topologies coïncident; ne voyant pas pourquoi ce serait vrai en général, nous conjecturons que ce n'est pas toujours le cas.

Le lemme suivant sera utile par la suite.

Lemme 3.4. *Soit f une fonction et soit A une classe telle que $A \subset \mathrm{dom}(f)$. On a :*

$$\mathrm{cl}\left(\{f(x) \mid x \in A\}\right) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{cl}(A)\} .$$

PREUVE

$\subset$: Clairement, on a

$$\{f(x) \mid x \in A\} \subset \{f(x) \mid x \in \mathrm{cl}(A)\} .$$

Le membre de droite est un ensemble (proposition 1.4 (c)) ce qui entraîne

$$\mathrm{cl}(\{f(x) \mid x \in A\}) \subset \{f(x) \mid x \in \mathrm{cl}(A)\} .$$

$\supset$: Soit $x \in \mathrm{cl}(A)$ et soit $y = f(x)$. En vertu de la proposition 3.1, il suffit de montrer que pour toute classe ouverte U comprenant y, il existe $x' \in A$ avec $f(x') \in U$. Soit U une classe ouverte comprenant y. On a

$$f_\star^{-1}(U) = O \cap \mathrm{dom}(f)$$

pour une classe ouverte O (proposition 3.2). On a $x \in O$ et donc puisque $x \in \mathrm{cl}(A)$, on a $O \cap A \neq \varnothing$ (proposition 3.1). Soit $x' \in O \cap A$; on a $f(x') \in U$ et le résultat. $\square$

Remarque. Il est connu qu'en topologie, on a l'inclusion de droite à gauche si et seulement si f est une fonction continue. Il est donc normal de la retrouver ici puisque, dans GPK^+, les fonctions sont « continues » (proposition 3.2). De plus, on peut voir que la preuve de cette inclusion est en fait la preuve topologique.

Définition. *Un ensemble a est dit* discret *ssi il n'a pas de point d'accumulation. Autrement dit a est discret ssi pour chaque $x \in A$, il existe une classe ouverte $U \ni x$, telle que $U \cap a = \{x\}$.*

Un cas particulièrement important est celui des ensembles dont tous les points sont isolés.

La proposition suivante donne, en quelque sorte, un schéma d'axiomes de remplacement pour les ensembles discrets.

Proposition 3.5. (exprimable par un schéma). *Soit a un ensemble discret. Toute fonctionnelle F avec* $\mathrm{dom}(F) \subset a$ *est une fonction (c'est-à-dire un ensemble); en particulier* $\mathrm{im}\, F$ *est un ensemble.*

PREUVE. — Soit a un ensemble discret et soit F une fonctionnelle telle que $\mathrm{dom}(F) \subset a$. Montrons que F est fermée. Il suffit de montrer que $\overline{F} \subset F$. Soit $(x, y) \in \overline{F}$ (remarquer que les éléments de $\overline{F}$ sont des couples puisque la classe des couples est fermée) et montrons que $y = F(x)$. En appliquant le lemme 3.4 à la fonction p: $p(u, v) = u$ définie sur l'ensemble des couples, on obtient $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{dom}(F))$. Soit W une classe ouverte telle que $W \cap a = \{x\}$. En appliquant la proposition 3.1 à la classe ouverte W, on obtient $x \in \mathrm{dom}(F)$ et donc $x \in a$. Il reste à montrer que $y = F(x)$. Supposons que $y \neq F(x)$. Soit O la classe ouverte $\{F(x)\}^c$. Soit c l'ensemble des couples et soit U une classe ouverte telle que $U \cap c = W \times O$ (proposition 3.3). On a $(x, y) \in U$ et $U \cap F = \varnothing$; ce qui contredit $(x, y) \in \overline{F}$. On a donc bien $y = F(x)$, ce que l'on voulait. □

On a le corollaire suivant de la proposition 3.5 (schéma de compréhension pour les ensembles discrets).

Corollaire 3.6.
Toute classe A incluse dans un ensemble discret est un ensemble.

PREUVE. — Soit I la fonctionnelle identité définie sur A. Elle est fermée par la proposition 3.5. Son image A est donc un ensemble. □

Remarque. Toute classe A dont les éléments sont isolés est ouverte. En effet, son complément $A^c = \bigcap \left\{ \{x\}^c \mid x \in A \right\}$ est un ensemble par la proposition 2.3 (c).

Proposition 3.7.
Tout ensemble dont chaque élément est isolé est lui-même isolé.

PREUVE. — Soit a un ensemble dont les éléments sont isolés. Soit d la fonctionnelle de domaine a définie de la manière suivante $d(x) = \{y \mid y \neq x\}$. La fonctionnelle d est une fonction par la proposition 3.5. Nous avons:

$$\{x \mid x \neq a\} = \{x \mid (\exists y \in x)(y \notin a)\} \cup \{x \mid (\exists y \in a)(y \notin x)\}\,.$$

Dans le premier membre de l'union, on voit que l'on peut remplacer « $y \notin a$ » par « $(\forall z \in a)(y \in d(z))$ ». Dans le deuxième membre, puisque $y \in a$, on peut remplacer $y \notin x$ par « $(\forall h \in x)(h \in d(y))$ ». Ceci montre que $\{x \mid x \neq a\}$ est défini par une formule *BPF* (ayant a et d pour paramètres); c'est donc un ensemble. La classe $\{a\}$ est ouverte et a est isolé. □

Proposition 3.8. *Soit r un ensemble de couples et x, y deux ensembles. Si pour toute classe ouverte U telle que $y \in U$, il existe $h \in U$ avec $(x, h) \in r$, alors $(x, y) \in r$.*

PREUVE. — Soit r un ensemble de couples. L'énoncé de la proposition devient:

$$\forall x\, \forall y\ (\forall f\, (y \notin f \Rightarrow (\exists h \notin f)((x,h) \in r))) \Rightarrow (x,y) \in r)\,,$$

ce qui est équivalent à:

$$\forall x\, \forall y\, ((x,y) \notin r \Rightarrow \exists f (y \notin f \wedge (\forall h \notin f)((x,h) \notin r))),$$

ce qui est vrai, il suffit de prendre $f = \{z \mid (x,z) \in r\}$, qui est un ensemble car défini par une formule *BPF* (ayant x et r pour paramètres). □

Cette proposition est surtout intéressante si $r = \{(x,y) \mid x \in y\}$ ou si $r = \{(x,y) \mid y \in x\}$.

Définition. *Si a est un ensemble, nous dirons que a est* transitif *ssi $\forall x\, \forall y\, ((x \in y \wedge y \in a) \Rightarrow x \in a)$. « a est transitif » sera noté $\mathrm{tr}(a)$.*

La proposition suivante donne quelques axiomes habituels en théorie des ensembles qui sont vrais dans GPK^+.

Proposition 3.9. *Les axiomes suivants sont satisfaits dans GPK^+:*

(a) *Axiome de la paire:*

$$\forall a\, \forall b\, \exists u\, \forall t\, (t \in u \Leftrightarrow (t = a \vee t = b)).$$

(b) *Axiome de l'ensemble des parties:*

$$\forall x\, \exists u\, \forall t\, (t \in u \Leftrightarrow t \subset x).$$

(c) *Axiome de la réunion:*

$$\forall x\, \exists u\, \forall t\, (t \in u \Leftrightarrow \exists z\, (t \in z \wedge z \in x)).$$

(d) *Axiome de la clôture transitive:*

$$\forall a\, \exists y\, (a \in y \wedge \mathrm{tr}(y) \wedge (\forall z\, (a \in z \wedge \mathrm{tr}(z)) \Rightarrow y \subset z)).$$

Autrement dit, pour chaque ensemble a, il existe un plus petit ensemble y (pour l'inclusion) transitif qui comprend a; cet ensemble y sera noté $\mathrm{trcl}(a)$.

PREUVE

(a) C'est la proposition 1.1.
(b) Prendre $\varphi \equiv$ « $\forall z \in t\ z \in x$ » dans $\mathbb{C}(BPF)$.
(c) Prendre $\varphi \equiv$ « $\exists z\, (t \in z \wedge z \in x)$ » dans $\mathbb{C}(BPF)$.
(d) On prend $y = \bigcup \{z \mid \mathrm{tr}(z) \wedge a \in z\}$. La classe y est un ensemble par la proposition 2.3 c). Il est élémentaire de vérifier que y est transitif et que $\forall z\, (a \in z \wedge \mathrm{tr}(z)) \Rightarrow y \subset z$; ce qui achève la preuve. □

La proposition suivante donne une amélioration du point (c) de la proposition précédente.

Proposition 3.10. *La fonctionnelle $\bigcup : x \to \bigcup x$ est une fonction (c'est-à-dire un ensemble).*

PREUVE. — On a :

$$\{(x,y) \mid y = \bigcup x\} = \{(x,y) \mid \forall z \in y\, \exists t\, (z \in t \wedge t \in x) \wedge (\forall t \in x)(t \subset y)\},$$

ce qui montre que la fonctionnelle $\bigcup$ est définie par une formule *BPF* et est donc une fonction. □

Remarque. D'autres fonctionnelles correspondant à des opérations ensemblistes sont des fonctions, notamment la fonctionnelle « paire »: $V \times V \to V$ $\mathrm{paire}(x,y) = \{x,y\}$ (pour le prouver, il suffit de voir qu'elle est définie par une formule *BPF*).

La proposition suivante permet de généraliser quelque peu ce que l'on entend par formule positive généralisée.

Proposition 3.11. *Soit $\varphi(x, y, \vec{a})$ une formule BPF; alors les formules suivantes sont équivalentes à des formules BPF.*
(a) $\forall y\,(y \ni x \Rightarrow \varphi(x, y, \vec{a}))$,
(b) $\forall y\,(y \supset x \Rightarrow \varphi(x, y, \vec{a}))$.

PREUVE

(a) Cette formule est équivalente à :

$$\forall z\,\exists t\,((t = z \cup \{x\}) \wedge \varphi(x, t, \vec{a})).$$

Il reste donc à montrer que « $t = z \cup \{x\}$ » est *BPF*. C'est vrai:

$$t = z \cup \{x\} \Leftrightarrow (\forall h \in t)(h \in z \vee h = x) \wedge (z \subset t) \wedge (x \in t),$$

ce qui montre le résultat.
(b) Il suffit de remplacer « $t = z \cup \{x\}$ » par « $t = z \cup x$ » dans la preuve du (a). □

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 4

Les ordinaux dans GPK^+

Dans ce chapitre, nous développerons la théorie des ordinaux dans GPK^+. Nous verrons que les ordinaux se comportent comme dans ZF. La plupart des preuves des propositions de ce chapitre sont des adaptations des preuves des propositions correspondantes de ZF (pour celles-ci, nous nous sommes essentiellement basé sur [22]). Nous supposerons que le lecteur est familier avec celles-ci. Au chapitre 6, nous utiliserons ces résultats, ainsi que ceux du chapitre suivant, pour construire une interprétation de ZF. Les ordinaux de cette interprétation seront exactement les ordinaux de GPK^+; ce qui montre que les ordinaux de GPK^+ sont « réellement » ceux de ZF.

Définition. *Un ensemble α est dit être un* ordinal *ssi α est un ensemble transitif strictement bien ordonné par $\in$; ce que l'on écrira $On(\alpha)$. Formellement, on a donc*

$$\begin{gathered} On(\alpha) \\ \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \\ \forall x\,\forall y\,(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \Rightarrow x \notin y \vee y \notin x) \ \ \wedge \\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \wedge z \in \alpha \wedge x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z) \ \ \wedge \\ \forall z\,(z \subset \alpha \wedge z \neq \varnothing \Rightarrow \exists x\,(x \in z \wedge \forall y\,(y \in z \Rightarrow x \in y \vee x = y))) \ \ \wedge \\ \forall x\,\forall y\,(x \in \alpha \wedge y \in x \Rightarrow y \in \alpha). \end{gathered}$$

Nous noterons On la classe des ordinaux: $On \overset{\text{déf}}{=} \{\alpha \mid On(\alpha)\}$. Nous utiliserons les lettres de l'alphabet grec en minuscules pour désigner les ordinaux (sauf φ, χ, ψ qui sont réservées aux formules *BPF* ou *GPF*). La relation $\alpha \in \beta$ sur les ordinaux sera généralement notée $\alpha < \beta$. De même, on notera $\alpha \leqslant \beta$ ssi $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

Remarque. Dans la formule $On(\alpha)$ on n'a pas écrit que $\in$ était un ordre total; on le déduit du fait que α est bien ordonné: si $x \in \alpha$ et $y \in \alpha$ l'ensemble $\{x, y\}$ a un plus petit élément; supposons que ce soit x, on a alors $x \leqslant y$.

Attirons l'attention sur le fait que dans $On(\alpha)$, on demande que tout *sous-ensemble* ait un plus petit élément. A priori, on pourrait avoir une sous-classe de α qui n'ait pas de plus petit élément. On verra cependant que toute sous-classe de α est un ensemble et que ce phénomène ne se produit donc pas.

Le but est de montrer que les ordinaux ont des propriétés analogues à ceux de ZF. La proposition suivante est la proposition clef.

Proposition 4.1. *Les ordinaux sont des ensembles discrets.*

PREUVE. — Si α est un ordinal, définissons pour $a \in \alpha$, la classe ouverte suivante $U = \{x \mid x \in a \vee a \in x\}^c$. On a clairement $U \cap \alpha = \{a\}$; ce qui montre le résultat. $\square$

Corollaire 4.2. *Toute sous-classe d'un ordinal α est un ensemble.*

Proposition 4.3. *Si α est un ordinal, on a $\alpha \notin \alpha$.*

PREUVE. — On sait, par définition, que si $x \in \alpha$, alors $x \notin x$. Supposons que l'on ait $\alpha \in \alpha$; on obtient une contradiction en prenant $x = \alpha$. $\square$

Proposition 4.4. *Tous les éléments d'un ordinal sont des ordinaux:*

$$\alpha \in On \Rightarrow \alpha \subset On.$$

PREUVE. — Elle se vérifie facilement comme dans ZF. □

Définition. *Si α est un ordinal, un ensemble $s \subset \alpha$ est dit être un* segment initial *de α ssi:*

$$\forall x\, \forall y\, (y \in s \wedge x \in y) \Rightarrow x \in s.$$

Proposition 4.5. *Les segments initiaux de α sont α et les éléments de α.*

PREUVE. — Soit $s \subset \alpha$ un segment initial de α et supposons que $s \neq \alpha$. Soit l'ensemble non vide suivant: $\{\beta \in \alpha \mid \beta \notin s\}$ (c'est un ensemble par le corollaire 4.2). Cet ensemble a un plus petit élément β_0; il est facile de voir que $s = \beta_0$. □

Proposition 4.6. *Soient α et β deux ordinaux, on a:*

$$\alpha \subset \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta).$$

PREUVE. — L'inclusion de droite à gauche se déduit du fait que les ordinaux sont transitifs; pour l'inclusion de gauche à droite, on voit facilement que si $\alpha \subset \beta$, α est un segment initial de β et on applique la proposition 4.5. □

Proposition 4.7. *Soient α et β deux ordinaux, alors*

$$\alpha \in \beta \quad \vee \quad \alpha = \beta \quad \vee \quad \beta \in \alpha.$$

PREUVE. — Soit $\xi = \alpha \cap \beta$. Il est aisé de voir que ξ est un ensemble qui est un ordinal. On a clairement $\xi \subset \alpha$ et $\xi \subset \beta$, ce qui donne:

$$(\xi = \alpha \vee \xi \in \alpha) \wedge (\xi = \beta \vee \xi \in \beta) \quad \text{(proposition 4.6).}$$

Ceci donne la conclusion en remarquant que $\xi \in \alpha \wedge \xi \in \beta$ n'est pas possible car sinon on aurait $\xi \in \xi$. □

La proposition suivante permet de faire des démonstrations par induction sur les ordinaux; ceci pour des formules *quelconques*.

Proposition 4.8. *Soit $\Gamma(x, \vec{a})$ une formule quelconque dont les variables libres sont parmi $(x, \vec{a})$. Pour chaque valeur de $\vec{a}$ s'il existe un ordinal α tel que $\Gamma(\alpha, \vec{a})$, alors il existe un plus petit ordinal α_0 tel que $\Gamma(\alpha_0, \vec{a})$.*

PREUVE. — Soit α un ordinal tel que $\Gamma(\alpha, \vec{a})$. La classe suivante est un ensemble (corollaire 4.2): $b = \{\beta \in \alpha \mid \Gamma(\beta, \vec{a})\}$. Si $b = \varnothing$, posons $\alpha_0 = \alpha$; sinon posons $\alpha_0 =$ l'élément minimum de b. Soit maintenant γ tel que $\Gamma(\gamma, \vec{a})$. On voit que $\gamma \notin \alpha_0$, donc $\alpha_0 \leqslant \gamma$ (proposition 4.7); ce qui achève la preuve. □

On a le corollaire important suivant:

Corollaire 4.9. *Les ordinaux sont isolés.*

PREUVE. — Soit α le plus petit ordinal non isolé s'il en existe, α est donc un ensemble dont tous les éléments sont isolés et est donc lui-même isolé (proposition 3.7). □

Proposition 4.10. *Si α est un ordinal, il existe un plus petit ordinal $> \alpha$ qui est $\alpha \cup \{\alpha\}$; celui-ci sera noté $\alpha + 1$.*

PREUVE. — Comme dans ZF. □

Proposition 4.11. *Tout ensemble a d'ordinaux a une borne supérieure β (c'est-à-dire un plus petit majorant non strict) qui est la réunion des éléments de a: $\beta = \bigcup_{\alpha \in a} \alpha$.*

PREUVE. — Le fait que a ait une borne supérieure découle de la proposition 4.8. On montre alors que celle-ci est $\bigcup_{\alpha \in a} \alpha$ comme dans ZF. □

On peut montrer, comme dans ZF, que la classe On des ordinaux n'est pas un ensemble. Il est intéressant de voir ce que pourrait être la clôture $\overline{On}$ de On. La proposition suivante montre que $\overline{On}$ satisfait $\overline{On} = On \cup \{\overline{On}\}$. L'ensemble $\overline{On}$ se comporte en quelque sorte comme un ordinal maximum qui s'appartient à lui-même (ce n'est donc pas un vrai ordinal).

Proposition 4.12. *La classe On n'est pas un ensemble. La clôture $\overline{On}$ de On satisfait $\overline{On} = On \cup \{\overline{On}\}$.*

PREUVE. — On commence par remarquer, comme dans ZF, que si On était un ensemble, On serait un ordinal; ceci entraînerait $On \in On$, ce qui est exclu (proposition 4.3). Il suffit donc de montrer que si $a \in \overline{On} \setminus On$, alors $a = \overline{On}$. Soit donc $a \in \overline{On} \setminus On$.

- $a \subset \overline{On}$:
  Soit $x \in a$, montrons que $x \in \overline{On}$. Il suffit de montrer que toute classe ouverte U comprenant x, comprend un ordinal.
  Soit donc U une classe ouverte avec $x \in U$. Soit W la classe suivante $W = \{y \mid (\exists z \in y)(z \in U)\}$, on voit sans peine que W^c est fermée et donc que W est ouverte. On a clairement $a \in W$, par définition de a on a donc $W \cap On \neq \varnothing$. Soit $\alpha \in W \cap On$; comme $\alpha \in W$, on a par définition de W: $\exists \beta \in \alpha$, $\beta \in U$. L'élément β est un ordinal car il appartient à l'ordinal α. On a donc montré que $U \cap On \neq \varnothing$, ce que l'on voulait.

- $\overline{On} \subset a$:
  Il suffit clairement de montrer que $On \subset a$.
  Soit donc $\alpha \in On$ et montrons que $\alpha \in a$. On a $a \in \overline{On \setminus (\alpha + 1)}$; en effet, si U est une classe ouverte avec $a \in U$, on a que $W = U \cap (\alpha+1)^c$ est une classe ouverte comprenant a, donc $W \cap On \neq \varnothing$; ce qui donne $U \cap (On \setminus (\alpha + 1)) \neq \varnothing$. Soit b l'ensemble suivant: $b = \{x \mid \alpha \in x\}$. On a clairement $(On \setminus (\alpha + 1)) \subset b$, donc $\overline{On \setminus (\alpha + 1)} \subset b$. Comme $a \in \overline{On \setminus (\alpha + 1)}$, on a $a \in b$ et donc $\alpha \in a$, ce que l'on voulait. □

La proposition suivante s'obtiendra comme corollaire du théorème 6.1 et de la proposition 5.7. Il est néanmoins intéressant de le présenter dès maintenant. (Il est également possible de prouver directement cette proposition en imitant la preuve classique dans ZF.)

Proposition 4.13. *Soient α et β deux ordinaux et soit f une fonction qui est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de α vers β. Alors $\alpha = \beta$ et f est l'application identique.*

Remarquons que si F est une fonctionnelle de α vers β, alors F est nécessairement une fonction par la proposition 3.5.

La proposition suivante permet de faire des définitions par induction sur les ordinaux (elle est exprimable au premier ordre par un schéma).

Proposition 4.14. *Soient α un ordinal, M la classe des fonctions dont le domaine est un ordinal $\beta < \alpha$, H une fonctionnelle de domaine M. Alors il existe une unique fonction f de domaine α telle que $\forall \beta < \alpha\ f(\beta) = H\left(f\big|_\beta\right)$ ($f\big|_\beta$ désigne la restriction de f à β).*

Attirons l'attention sur le fait que la classe H ne doit pas nécessairement être définie par une formule positive. On peut donc définir des fonctions par induction même par des formules qui ne sont pas positives ! Ceci est dû au fait que les ordinaux sont isolés.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.14

- **Unicité:** Soient f et g deux telles fonctions et soit β le plus petit ordinal $< \alpha$ tel que $f(\beta) \neq g(\beta)$ s'il en existe. On a $f(\beta) = H(f\big|_\beta) = H(g\big|_\beta) = g(\beta)$, ce qui contredit la définition de β.

- **Existence:** Soit τ le plus petit ordinal $\leqslant \alpha$ tel qu'il n'existe pas de fonction f_τ définie sur τ telle que $f_\tau(\gamma) = H\left(f_\tau\big|_\gamma\right)$ pour $\gamma < \tau$. Pour chaque $\theta < \tau$, on a donc une unique fonction f_θ définie sur θ telle que $f_\theta(\gamma) = H\left(f_\theta\big|_\gamma\right)$ pour tout $\gamma < \theta$. Si $\theta' < \theta$, on a $f_\theta\big|_{\theta'} = f_{\theta'}$ par l'unicité. On définit f_τ de domaine τ: $f_\tau(\gamma) = H(f_\gamma)$ pour $\gamma < \tau$. La fonctionnelle f_τ est une fonction par la proposition 3.5 (et le fait que les ordinaux sont isolés). On remarque, comme dans ZF, que la fonction f_τ satisfait $f_\tau(\gamma) = H\left(f_\tau\big|_\gamma\right)$ contrairement à l'hypothèse faite sur τ. □

On peut aussi, comme dans ZF, définir une fonctionnelle par induction sur les ordinaux; ceci donne de manière précise:

Proposition 4.15. *Soient M la classe des fonctions dont le domaine est un ordinal et H une fonctionnelle de domaine M. Dans ces conditions, il est possible de définir une fonctionnelle F de domaine On telle que $F(\alpha) = H\left(F\big|_\alpha\right)$ pour chaque ordinal α. C'est la seule fonctionnelle ayant ces propriétés.*

PREUVE. — Remarquons d'abord que $F\big|_\alpha$ est bien une fonction par la proposition 3.5. La fonctionnelle F est définie de la manière suivante:

$$\begin{aligned} F = \{(\alpha, y) \mid On(\alpha) \ \wedge \ \exists f \ ((&f \text{ est une fonction de domaine } \alpha) \\ &\wedge \left(f(\beta) = H\left(f|_{\beta}\right)\right) \text{ pour tout ordinal } \beta < \alpha \\ &\wedge (y = H(f)))\}. \end{aligned}$$

On vérifie comme dans ZF que F répond à l'énoncé et que F est unique. □

Donnons à présent quelques définitions habituelles :

Définitions. *Soit α un ordinal non nul (donc $\alpha \neq \varnothing$).*

- « *α est successeur* » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists\beta\, \alpha = \beta \cup \{\beta\}$.
- « *α est limite* » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ *α n'est pas successeur.*
- « *α est fini* » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall\beta \leqslant \alpha \ \ \beta$ *est successeur.*
- « *α est infini* » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ *α n'est pas fini.*
- « *α est un cardinal* » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall\beta < \alpha$, *il n'existe pas de fonction f bijective de β vers α.*

Remarquons que l'on n'a pas que tout ensemble est en bijection avec un ordinal et donc on n'a pas non plus que tout ensemble est en bijection avec un unique cardinal.

En fait, on peut montrer que si un ensemble a est en bijection avec un ordinal, alors il est discret. On remarque aussi que l'on peut montrer, comme dans ZF, que si a est un ensemble et que si $<$ est un ensemble qui définit une relation de bon ordre *strict* sur a, alors a est en bijection avec un (unique) ordinal. Attirons l'attention sur le fait que l'on demande que l'ordre strict $<$ soit un ensemble, ce qui n'est pas équivalent à demander que l'ordre non strict $\leqslant$ correspondant soit un ensemble.

Rappelons qu'en topologie, on appelle espace κ-topologique un espace topologique tel que l'ensemble des fermés soit stable pour des réunions indicées par un ordinal strictement inférieur à κ. La « topologie » de GPK$^+$ est en quelque sorte une « On-topologie » en ce sens que la collection des classes fermées (c'est-à-dire des ensembles) est stable pour des réunions indicées par un ordinal quelconque α (qui est donc, en quelque sorte, « inférieur à On »). De manière précise, cela donne: si f est une fonction de domaine α, où α est un ordinal, $\bigcup \mathrm{im}(f)$ est un ensemble. Ceci se vérifie très facilement en utilisant le fait que les ordinaux sont isolés (corollaire 4.9), la proposition 3.5 et le fait que l'union d'un ensemble est un ensemble (proposition 3.9 (c)). Cependant, les choses se passent moins bien qu'en topologie, ceci est dû principalement au fait que l'on n'a pas l'axiome du choix.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 5

Les ensembles bien fondés

Dans ce chapitre, nous étudierons la notion d'ensembles bien fondés dans GPK^+, nous verrons que l'on peut les définir par induction de la même manière que dans ZF. Certaines propositions, qui sont tout à fait analogues à celles de ZF, ne seront pas prouvées en détail. On peut les trouver dans, par exemple, [22], ch. III.

Définition. *Un ensemble a est dit être* bien fondé *ssi*

$$(\forall y \ni a)\,(\exists y' \in y)\,y' \cap y = \varnothing.$$

On note BF la classe des ensembles bien fondés.

Pour chaque ordinal α, on définit, par induction, l'ensemble r_α suivant: $r_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{P}r_\beta$. La première chose à faire est de vérifier que pour chaque α, r_α est bien un ensemble (sinon la proposition précédente n'aurait pas de sens). On peut supposer, par induction, que pour chaque $\beta < \alpha$, r_β est bien un ensemble. Soit la fonctionnelle f de domaine α, $f(\beta) = r_\beta$. La fonctionnelle f est une fonction par la proposition 3.5. On a alors $r_\alpha = \{x \,|\, (\exists\beta \in \alpha)|\, x \subset f(\beta)\}$, r_α étant défini par une formule BPF, il est un ensemble. On définit la classe R: $R = \bigcup\limits_{\alpha\in On} r_\alpha$. Le but de ce chapitre est de prouver que R est une classe d'ensembles isolés et que $R = BF$. On commence par la proposition suivante.

Proposition 5.1.

- *Si* $\alpha < \alpha'$ $(\alpha, \alpha' \in On)$, *on a* $r_\alpha \subsetneq r_{\alpha'}$.
- *Si* $\alpha = \beta + 1$, *on a* $r_\alpha = \mathcal{P} r_\beta$.
- *Si* λ *est un ordinal limite, on a* $r_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha < \lambda} r_\alpha$.

PREUVE. — Comme dans ZF. □

Prouvons maintenant que R est une classe d'ensembles isolés.

Proposition 5.2. *R est une classe d'ensembles isolés; elle est donc ouverte.*

PREUVE. — Supposons, par l'absurde, que ce ne soit pas vrai et soit α le plus petit ordinal tel que r_α n'est pas un ensemble d'ensembles isolés. On a $r_\alpha = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} \mathcal{P} r_\beta$. Pour chaque $\beta < \alpha$, r_β est donc un ensemble d'ensembles isolés et, en vertu de la proposition 3.7, il en est de même de $\mathcal{P} r_\beta$. Ceci montre que r_α est un ensemble d'ensembles isolés contrairement à l'hypothèse. □

On définit aussi une fonctionnelle RG de domaine R. $RG(x)$ = le plus petit α tel que $x \in r_\alpha$ ($RG(x)$ est dit être le rang de x). On remarque, comme dans ZF, que le rang d'un ensemble est toujours un ordinal successeur.

Proposition 5.3. *La classe R a la propriété suivante:*

$$\forall a \ (a \in R \Leftrightarrow a \subset R).$$

Si $RG(a) = \alpha$, le rang des éléments de a est strictement inférieur à α.

PREUVE

$\Rightarrow$: Soit $a \in R$ et soit $\beta + 1$ le rang de a. On a $a \in R_{\beta+1}$ et donc $a \subset R_\beta$, ce qui donne $a \subset R$.

$\Leftarrow$: Soit $a \subset R$ et considérons la fonction $RG\big|_a$. C'est une fonction par les propositions 3.5 et 5.2. La classe $\{RG(x) \mid x \in a\} = \mathrm{im}(RG\big|_a)$ est donc un ensemble d'ordinaux, soit α sa borne supérieure. On a donc $a \subset R_\alpha$ et donc $a \in R_{\alpha+1}$, ce qui montre que $a \in R$.

Pour la seconde partie, soit a un ensemble tel que $RG(a) = \alpha = \beta + 1$ et soit $b \in a$. On a donc $b \in R_\beta$ et donc $RG(b) < \alpha$. □

Proposition 5.4. *Chaque ordinal α est dans R, son rang est $\alpha + 1$.*

PREUVE. — Comme dans ZF. □

Lemme 5.5. *La classe BF a la propriété suivante :*

$$\forall x \, (x \subset BF \Rightarrow x \in BF).$$

PREUVE. — Montrons que $x \notin BF \Rightarrow x \not\subset BF$. Supposons que $x \notin BF$, soit $y \ni x$ telle que $\forall y' \in y,\ y' \cap y \neq \varnothing$. Comme $x \in y$, on a $x \cap y \neq \varnothing$. Soit $a \in x \cap y$, on a donc $y \ni a$ et $(\forall y' \in y) y' \cap y \neq \varnothing$, ce qui montre que $a \notin BF$ bien que $a \in x$ et donc que $x \not\subset BF$. □

On prouvera à présent que R est la classe des ensembles bien fondés.

Proposition 5.6. $R = BF$.

PREUVE

(a) $R \subset BF$: il suffit de montrer que pour chaque ordinal α : $r_\alpha \subset BF$. Soit α_0 le plus petit ordinal α tel que $r_\alpha \not\subset BF$ s'il en existe. Distinguons deux cas:
   - **$\alpha_0 = \beta + 1$ est successeur.**
     Soit $x \in r_{\alpha_0}$, on a $x \in \mathcal{P}r_\beta$ et donc $x \subset r_\beta$; mais $r_\beta \subset BF$ (hypothèse sur α_0) et donc $x \subset BF$; ceci entraîne $x \in BF$ (lemme 5.5). On a donc montré que $r_{\alpha_0} \subset BF$, ce qui contredit la définition de α_0.
   - **α_0 est limite.**
     On a $r_{\alpha_0} = \bigcup_{\beta < \alpha_0} r_\beta$. Par hypothèse $\forall \beta < \alpha_0$, $r_\beta \subset BF$ et donc $r_{\alpha_0} \subset BF$, contredisant la définition de α_0.

(b) $BF \subset R$: montrons que $\forall a\,(a \notin R \Rightarrow a \notin BF)$. Soit $a \notin R$, on doit montrer que $\exists y \ni a\ \forall y' \in y\ y' \cap y \neq \varnothing$. On peut prendre $y = R^c$; en effet, R étant une classe d'ensembles isolés, elle est ouverte et donc R^c est un ensemble; de plus $a \in R^c$, $\forall y' \in R^c\quad R^c \cap y' \neq \varnothing$ (sinon on aurait $(\exists y' \notin R)(y' \subset R)$, ce qui est impossible en vertu de la proposition 5.3). □

Proposition 5.7. *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des ensembles bien fondés.*

Soit $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ une formule dont chaque quantificateur prend l'une des formes suivantes: $\forall x \in y$, $\forall x \subset y$, $\exists x \in y$, $\exists x \subset y$.

Dans ces conditions, on a:

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow BF \vDash \Gamma(a_1, \ldots, a_n).$$

PREUVE. — Évident en utilisant la proposition 5.3 et le fait que $R = BF$. □

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 6

Une interprétation de ZF et de KM dans GPK^+_∞

Dans ce chapitre, on montrera que les ensembles bien fondés de GPK^+ interprètent la théorie habituelle des ensembles ZF pourvu que l'on ajoute une forme de l'axiome de l'infini à GPK^+. Nous verrons ensuite que l'on peut interpréter la théorie des classes de Kelley-Morse (KM) en représentant les classes d'ensembles bien fondés de GPK^+_∞ (la théorie GPK^+ avec l'axiome de l'infini) par des ensembles de GPK^+_∞.

Ajoutons donc à GPK^+ l'axiome de l'infini sous la forme suivante:

INF: Il existe un ordinal limite.

On note GPK^+_∞ la théorie $\mathrm{GPK}^+ + \mathrm{INF}$. Remarquons que dans GPK^+, cet axiome n'est pas équivalent à l'axiome de l'infini INF' habituel.

$$\mathrm{INF}' : \exists x\, (\varnothing \in x \wedge \forall y\, (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

On voit facilement en prenant $x = \overline{On}$ que $\mathrm{GPK}^+ \models \mathrm{INF}'$. Le fait que $\mathrm{GPK}^+ \not\models \mathrm{INF}$ découle des résultats de [11]. Les lecteurs ayant lu cet article verront que l'hyperunivers N_ω qui y est défini est un modèle de GPK^+, mais que $N_\omega \not\models \mathrm{INF}$.

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour montrer que les ensembles bien fondés de GPK^+_∞ interprètent ZF.

Théorème 6.1. *La classe BF avec l'appartenance est une interprétation de* ZF *dans la théorie* GPK^+_∞.

PREUVE

- **Extensionnalité:** Evident puisque l'on a l'extensionalité dans GPK^+_∞.
- **Réunion:** Si a est un ensemble $\bigcup a$ est un ensemble par la proposition 3.9 (c). Il suffit alors de montrer que si $a \in BF$, $\bigcup a \in BF$ (utiliser la proposition 5.7) ou, de manière équivalente, $\bigcup a \subset BF$ (propositions 5.3 et 5.6). Soit $x \in \bigcup a$, on a donc $x \in y \in a$ pour un certain ensemble y. Comme $a \in BF$, on a $y \in BF$ et $x \in BF$ (proposition 5.3 appliquée successivement à a puis à y). Ce qui donne $\bigcup a \subset BF$ et le résultat.
- **Ensemble des parties:** Si a est un ensemble, $\mathcal{P}a$ est un ensemble par la proposition 3.9 (b). Montrons que si $a \in BF$, $\mathcal{P}a \in BF$. Il suffit de montrer que $\mathcal{P}a \subset BF$. Soit $x \subset a$ et montrons que $x \in BF$. En appliquant la proposition 5.3, on a $x \subset a \subset BF$, donc $x \subset BF$ et à nouveau, par la proposition 5.3, $x \in BF$. On a donc montré $x \in \mathcal{P}a \Rightarrow x \in BF$; ce que l'on voulait.
- **Schéma d'axiomes de remplacement:** Soit $F \subset BF$ une fonctionnelle pour la structure $(BF, \in)$ (c'est-à-dire une classe de couples définissable avec paramètres dans $(BF, \in)$ satisfaisant la propriété définissant une fonctionnelle). Clairement F est aussi définissable (avec paramètres) dans GPK^+_∞. F est donc une fonctionnelle au sens de GPK^+_∞. Soit $a \in BF$ et soit $f = F\big|_a$, f est une fonction par la proposition 3.5. La classe $\{F(x) \mid x \in a\} = \mathrm{im}(f)$ est donc un ensemble. Comme $F \subset BF$, on a aussi $\mathrm{im}(f) \in BF$ (utiliser la proposition 5.3); ce que l'on voulait.
- **Axiome de l'infini:** On vérifie la forme usuelle de l'axiome de l'infini: $\exists x\,(\varnothing \in x \wedge \forall y\,(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$. Cet axiome est vérifié dans $(BF, \in)$: il suffit de prendre $x = \lambda$ où λ est un ordinal limite (qui existe par hypothèse).
- **Axiome de fondement:** Les éléments de BF sont évidemment des éléments bien fondés dans $(V, \in)$ (V étant la classe universelle). Il est très facile de voir qu'ils restent bien fondés vu comme éléments de $(BF, \in)$. □

On a montré que les ensembles bien fondés de GPK^+_∞ interprètent la théorie ZF. Les ensembles bien fondés contiennent donc des ordinaux au sens de la définition habituelle d'ordinaux dans ZF. La proposition suivante dit que ceux-ci sont exactement les ordinaux de GPK^+_∞.

Proposition 6.2. *Soit a un ensemble de* GPK^+_∞*. On a:*

$$On(\alpha) \Leftrightarrow BF \models \text{« } a \text{ est un ordinal »}.$$

PREUVE. — Les ordinaux de GPK^+_∞ sont bien fondés car ils appartiennent trivialement à la classe R comme définie dans le chapitre 5 et que cette dernière est égale à BF (proposition 5.3). On déduit alors la preuve du fait que $On(\alpha)$ est une formule satisfaisant l'hypothèse de la proposition 5.7 et de la proposition 5.3. □

Remarquons à présent que l'on obtient la preuve de la proposition 4.13 comme corollaire immédiat des résultats précédents.

Un ensemble a sera dit héréditairement isolé si la clôture transitive $\mathrm{trcl}(a)$ de a est un ensemble d'éléments isolés. Notons HIS la classe des ensembles héréditairement isolés. Comme pour toute les propriétés héréditaires, on peut montrer sans trop de difficultés la propriété suivante:

Proposition 6.3. $\forall x \quad x \subset HIS \Leftrightarrow x \in HIS$.

Il est alors possible de montrer que la classe HIS avec l'appartenance forme une interprétation de ZF_0 (c'est-à-dire ZF sans l'axiome de fondement). Un examen de la preuve du théorème 6.1 montre en fait que toute classe d'ensembles isolés vérifiant la propriété de la proposition 6.3 forme une interprétation de ZF_0. Ceci donne la proposition 6.4.

Proposition 6.4.
Soit A une classe d'ensembles isolés telle que $\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \subset A)$. Dans ces conditions $(A, \in)$ est une interprétation de ZF_0.

Nous nous proposons à présent d'étendre le théorème 6.1 et de donner une interprétation de la théorie de Kelley-Morse (KM). L'idée est d'essayer de représenter les classes d'ensembles bien fondés par des éléments de GPK^+. Ceci est possible en représentant une classe $A \subset BF$ par sa clôture $\overline{A}$. Les éléments de BF étant isolés, on vérifie que $A = \overline{A} \cap BF$, ce qui permet de retrouver A à partir de $\overline{A}$.

Donnons donc la définition suivante:

Définition. *a est une* KM-classe *s'il existe une classe A (au sens de* GPK_∞^+*) satisfaisant $A \subset BF$ et $\overline{A} = a$.*

Telle quelle, la définition « être une KM-classe » n'est pas une formule du premier ordre. La proposition qui suit dit qu'en fait « être une KM-classe » est une formule du premier ordre; il donne une formule $\Gamma(x)$ a une variable libre x telle que « x est une KM-classe » $\Leftrightarrow \Gamma(x)$.

Proposition 6.5. *Si a est un ensemble de* GPK_∞^+ *on a que a est une* KM-*classe ssi $\overline{a \cap BF} = a$.*

PREUVE. — Si a est une KM-classe, soit A une classe (au sens de GPK_∞^+) d'ensembles bien fondés telle que $\overline{A} = a$. Les éléments de BF étant isolés, on a clairement $\overline{A} \cap BF = A$ et donc $\overline{\overline{A} \cap BF} = \overline{A}$ ou encore $\overline{a \cap BF} = a$. Si $\overline{a \cap BF} = a$, on pose $A = a \cap BF$; clairement A est une classe (au sens de GPK_∞^+) telle que $\overline{A} = a$. □

À présent, nous utiliserons donc la condition de la proposition 6.5 comme définition de KM-classe. On définit la relation d'appartenance $\in^\star$ sur les KM-classes: $a \in^\star b \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} a \in BF \wedge a \in b$. Notons $\mathcal{KM}$ la structure formée des KM-classes et de la relation d'appartenance $\in^\star$.

Théorème 6.6. *La théorie* GPK_∞^+ *interprète* KM.

PREUVE. — On va montrer que $\mathcal{KM}$ est une interprétation de la théorie de Kelley-Morse. Définissons un KM-ensemble comme étant une KM-classe a telle que $\mathcal{KM} \models \exists x \ a \in^\star x$ (c'est la définition habituelle d'ensemble dans KM). On voit aisément que les KM-ensembles sont exactement les ensembles bien fondés de GPK_∞^+. On voit aussi que si a et b sont deux KM-ensembles, alors $a \in b \Leftrightarrow a \in^\star b$. Commençons par vérifier l'axiome d'extensionalité sur les KM-classes. Soient a et b deux KM-classes et supposons que $\mathcal{KM} \models \forall x \ (x \in^\star a \Leftrightarrow x \in^\star b)$. On a donc $a \cap BF = b \cap BF$

et donc aussi $\overline{a \cap BF} = \overline{b \cap BF}$; ce qui donne $a = b$. $\mathcal{KM}$ vérifie aussi les axiomes concernant les ensembles de la théorie KM. Ce sont ceux de ZF, qui ont été prouvés dans le théorème 6.1, sauf le schéma de remplacement qui devient un axiome unique (voir annexe). On vérifie que ce dernier est satisfait en remarquant que dans le théorème 6.1, on a en fait montré que l'on a le remplacement pour toute fonctionnelle F de GPK^+_∞ et pas seulement pour toute fonctionnelle F définissable dans la structure $(BF, \in)$ comme cela aurait été suffisant pour ZF. $\square$

Dans les chapitres qui suivent, lorsque l'on parlera de KM-classe, nous entendrons en fait une classe (au sens de GPK^+_∞) d'ensembles bien fondés et pas sa fermeture. On utilisera le symbole d'appartenance habituel $\in$ et pas $\in^\star$. Cette manière de faire est plus intuitive et revient en fait au même puisque si A est une classe (au sens de GPK^+_∞) d'ensembles bien fondés, on a $\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in^\star \overline{A}$.

De cette manière une KM-classe est un KM-ensemble ssi elle est un ensemble bien fondé au sens de GPK^+_∞. Autrement dit une KM-classe est propre ssi elle a un point d'accumulation (au sens de GPK^+_∞).

Chapitre 7

La théorie originale GPK

Pour prouver les théorèmes des paragraphes précédents, on a ajouté à la théorie GPK de [26] et [11] un schéma d'axiomes (CL) et une forme de l'axiome de l'infini (INF). Il serait intéressant de voir ce qui se passe sans ces axiomes. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce chapitre. On voit facilement que sans l'axiome de l'infini, on peut interpréter la théorie $\mathrm{KM}_{-\infty}$ (c'est-à-dire la théorie de Kelley-Morse sans l'axiome de l'infini) dans GPK^+. On voit en effet que dans les preuves des théorèmes 6.1 et 6.6 on a seulement utilisé l'axiome de l'infini de GPK^+_∞ pour prouver l'axiome de l'infini dans ZF et dans KM. On verra en fait (théorème 11.1′) que, réciproquement, il est possible d'interpréter la théorie GPK^+ dans $\mathrm{KM}_{-\infty}$. Définissons à présent la théorie GPK_∞ comme étant la théorie GPK+INF. Nous allons montrer qu'une adaptation des résultats précédents permet toujours d'interpréter la théorie ZF.

On commencera par remarquer que la proposition 2.1 disant que, dans GPK, toute classe définie par une formule sans paramètres a une clôture admet une généralisation disant que toute classe définie par une formule dont les paramètres sont isolés a une clôture. Ceci s'inspire d'un résultat élémentaire disant que la théorie ZF sans paramètres est équivalente à la théorie ZF. Ensuite on adaptera les propositions des paragraphes précédents. Souvent il suffira de remplacer dans ces dernières les formules quelconques par des formules sans paramètres. Souvent aussi les preuves de ces propositions adaptées consistent simplement à remarquer que, moyennant l'adaptation de l'énoncé, les classes dont on prend la clôture sont définies sans paramètres dans les preuves des propositions correspondantes de GPK^+ (ou GPK^+_∞). Dans pareil cas, nous ne récrirons pas ces preuves mais nous nous contenterons de mentionner la proposition de GPK^+ correspondante. Les définitions de notions telles que ensemble isolé, point d'accumulation, ordinal étant les mêmes que dans GPK^+, elles ne seront pas systématiquement rappelées.

Rappelons que dans GPK, on dit qu'une classe A a une clôture si $\bigcup\{x \mid A \subset x\}$ est un ensemble, celui-ci est alors noté $\overline{A}$ ou $\mathrm{cl}(A)$. Comme dans GPK^+ une classe qui est un ensemble est dite fermée; elle est dite ouverte ssi son complément est un ensemble. Dans ce chapitre, on se place donc dans GPK, ou lorsque ce sera mentionné explicitement dans GPK_∞. Les résultats du paragraphe 1 concernant notamment le maniement des couples ont été montrés dans GPK et restent donc valables (en fait CBPF suffit pour ces derniers).

Proposition 7.1. (cfr. proposition 3.1).

(a) *Soit A une classe et soit f une classe fermée (c'est-à-dire un ensemble) telle que $A \subset f$. Supposons que pour chaque ensemble $x \in f$ et pour chaque classe ouverte U comprenant x, on ait $U \cap A \neq \varnothing$. Dans ces conditions A a une clôture et $\overline{A} = f$.*

(b) *Supposons que A ait une clôture $\overline{A}$, alors on a pour chaque x : $x \in \overline{A}$ ssi toute classe ouverte U avec $x \in U$ satisfait $U \cap A \neq \varnothing$.*

Proposition 7.2. (cfr. proposition 3.3). *Soient U et W deux classes ouvertes et soit c l'ensemble des couples, alors il existe une classe ouverte O telle que $O \cap c = U \times W$.*

Notons I la classe des ensembles isolés. Voici la proposition clef de GPK. Elle dit que toute classe définie par une formule dont les paramètres sont isolés a une fermeture (elle est exprimable par un schéma).

Proposition 7.3. $\forall a_1 \in I, \ldots, \forall a_n \in I$:

$$\begin{aligned}\exists x\,[&\forall z\;(\Gamma(z, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow z \in x)\\ &\wedge (\forall y\,(\forall z\;(\Gamma(z, a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow z \in y)) \Rightarrow x \subset y],\end{aligned}$$

pour chaque formule quelconque Γ *dont les variables libres sont parmi* $z, a_1, \ldots, a_n$.

Preuve. — On suppose, pour simplifier l'écriture, que Γ a un seul paramètre isolé a et on montre la proposition pour $\Gamma(z,a)$. Soit a un ensemble isolé et définissons la classe $A = \{z \mid \Gamma(z,a)\}$. Définissons aussi la classe $B = \{(z,t) \mid \Gamma(z,t)\}$, celle-ci est définie sans paramètres (rappelons que l'on peut manier les couples dans GPK) et a donc une clôture $\overline{B}$ (proposition 2.1). Soit f la classe suivante $f = \widehat{p_1}\left(\overline{B} \cap V \times \{a\}\right)$ où p_1 est la fonction définie sur l'ensemble des couples: $p_1(x,y) = x$, V étant la classe universelle. Il est facile de montrer que f est fermée et que $A \subset f$. On applique alors la proposition 7.1 (a) pour montrer que $\overline{A}$ existe et que $\overline{A} = f$. Soit $x \in f$ et soit U une classe ouverte avec $x \in U$. Notons c l'ensemble des couples. Soit O une classe ouverte telle que $O \cap c = U \times \{a\}$ (proposition 7.2). Clairement $(x,a) \in O$ et $(x,a) \in \overline{B}$. On a donc $O \cap B \neq \varnothing$ (proposition 7.1 (b) et donc, par définition de O, $U \cap A \neq \varnothing$; ce qui achève la preuve. □

Proposition 7.4. (cfr. proposition 2.3).

(a) *La classe vide* ($\varnothing$) *et la classe universelle* (V) *sont ouvertes et fermées.*

(b) *L'union de deux classes fermées est fermée.*

(c) *L'intersection des éléments d'une classe définie par une formule dont les paramètres sont isolés est une classe fermée.*

Proposition 7.5. (cfr. proposition 3.2). *Si* U *est une classe ouverte et* f *une fonction, l'image inverse de* U *par* f: $f_\star^{-1}(U) = \left\{y \mid f(y) \in U\right\}$ *est l'intersection d'une classe ouverte avec le domaine de* f.

Proposition 7.6. (cfr. lemme 3.4). *Soit* f *une fonction et* A *une classe définie par une formule dont les paramètres sont isolés et tel que* $A \subset \mathrm{dom}(f)$. *Alors la classe* $\left\{f(x) \mid x \in A\right\}$ *a une clôture et, de plus,* $\mathrm{cl}\left\{f(x) \mid x \in A\right\} = \left\{f(x) \mid x \in \mathrm{cl}(A)\right\}$.

Preuve. — La preuve est une adaptation évidente du lemme 3.4 si l'on songe à utiliser la proposition 7.1 (a). □

Voici l'adaptation de la proposition 3.5. Attirons l'attention sur le fait que l'on demande ici que a soit un ensemble d'ensembles isolés et pas seulement un ensemble discret comme c'était le cas pour la proposition 3.5.

Proposition 7.7. *Soit a un ensemble dont chaque élément est isolé et soit G une fonctionnelle définie par une formule dont les paramètres sont isolés. Soit $F = G\big|_a = G \cap (a \times V)$ (V étant la classe universelle). Dans ces conditions, la fonctionnelle F est une fonction.*

PREUVE. — Il suffit pour pouvoir appliquer la preuve de la proposition 3.5 de montrer que F a une clôture. On va utiliser la proposition 7.1 (a) pour montrer que $\overline{F} = \overline{G} \cap (a \times V)$ ($\overline{G} \cap (a \times V)$ est clairement une classe fermée contenant F). Soit donc $(x, y) \in \overline{G}$ avec $x \in a$. Soit O une classe ouverte telle que $O \cap c = \{x\} \times V$ (proposition 7.2). Pour chaque classe ouverte U avec $(x, y) \in U$, on vérifie que $(U \cap O) \cap F \neq \varnothing$; ce que l'on voulait. □

Il est également possible de donner une adaptation de la proposition 3.5 convenant aux ensembles discrets.

Proposition 7.7'. *Soit a un ensemble discret, toute fonctionnelle F telle que* $\mathrm{dom}(F) \subset a$, *définissable par une formule dont les paramètres sont isolés, est une fonction.*

Remarque. La proposition 7.7 n'est pas, comme on pourrait en avoir l'impression un corollaire immédiat de la proposition 7.7$'$. En effet, il faut remarquer que dans la proposition 7.7, $F = G\big|_a$ est définie à l'aide du paramètre a, qui n'est pas nécessairement isolé. Ceci explique aussi pourquoi on a, dans la proposition 7.7, demandé que a soit un ensemble de points isolés et pas seulement un ensemble discret.

Corollaire 7.8. *Toute classe A ayant une clôture et incluse dans un ensemble discret est un ensemble.*

Proposition 7.9. (cfr. proposition 3.7). *Tout ensemble dont chaque élément est isolé est lui-même isolé.*

Preuve. — Il suffit pour pouvoir appliquer la preuve de la proposition 3.7 de montrer que la fonctionnelle d de la preuve de cette dernière est une fonction. Il suffit pour cela d'appliquer la proposition 7.7 à la fonctionnelle G, dont le domaine est la classe des points isolés, définie de la manière suivante: $G(x) = \{y \mid y \neq x\}$. □

La proposition 3.8 est satisfaite sans aucun changement dans GPK. On voit aussi que les axiomes de la paire, de l'ensemble des parties ainsi que de la réunion sont satisfaits. En ce qui concerne l'axiome de la réunion, la fonctionnelle $\bigcup : x \to \bigcup x$ est une fonction (c'est-à-dire est un ensemble). De même, la proposition 3.11 est aussi satisfaite dans GPK. On reviendra plus loin sur l'axiome de la fermeture transitive.

Venons-en maintenant aux ordinaux dans GPK. On va montrer que, comme pour GPK$^+$, ils sont isolés. On commence par montrer les faits suivants:

Proposition 7.10.

(a) *Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux:* $\alpha \in On \Rightarrow \alpha \subset On$.
(b) *Si* α *est un ordinal,* $\alpha \notin \alpha$.
(c) *Les segments initiaux qui sont des ensembles d'un ordinal* α *sont* α *et les éléments de* α.
(d) *Soient* α *et* β *deux ordinaux, on a* $\alpha \subset \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta \ \vee \ \alpha \in \beta)$.
(e) *Soient* α *et* β *deux ordinaux, alors* $\alpha \in \beta \quad \vee \quad \alpha = \beta \quad \vee \quad \beta \in \alpha$.
(f) *Tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure qui est la réunion des éléments de cet ensemble.*
(g) *La classe* On *n'est pas un ensemble:* $\overline{On} = On \cup \{\overline{On}\}$.

Preuve. — Elle se fait comme dans les chapitres précédents. Pour (c), remarquer que si i est un segment initial de α qui est un ensemble $\alpha \setminus i = \{\beta \in \alpha \mid \forall \gamma \in i \ \ \gamma \in \beta\}$ est un ensemble. □

Voici maintenant les propositions permettant de faire des définitions et des démonstrations par induction sur les ordinaux.

Proposition 7.11. (cfr. proposition 4.8).

Soit $\Gamma(x, \vec{a})$ *une formule quelconque dont les variables libres sont parmi* $x, \vec{a}$. *Pour chaque* n*-uple* $\vec{a}$ *d'ensembles isolés, on a: s'il existe un ordinal* α *tel que* $\Gamma(\alpha, \vec{a})$ *alors il existe un ordinal minimum* α_0 *tel que* $\Gamma(\alpha_0, \vec{a})$.

Corollaire 7.12. *Les ordinaux sont isolés.*

Proposition 7.13. (cfr. proposition 4.14). *Soient α un ordinal, M la classe des fonctions dont le domaine est un ordinal $\beta < \alpha$, H une fonctionnelle de domaine M définie par une formule dont les paramètres sont isolés; alors il existe une unique fonction f de domaine α telle que $\forall \beta < \alpha\, f(\beta) = H(f\big|_{\beta})$.*

Proposition 7.14. (cfr. proposition 4.15). *Soient M la classe des fonctions dont le domaine est un ordinal, H une fonctionnelle de domaine M définie par une formule dont les paramètres sont isolés. Dans ces conditions, il est possible de définir une fonctionnelle F de domaine On telle que $F(\alpha) = H(F\big|_{\alpha})$ pour chaque ordinal α. C'est la seule fonctionnelle ayant ces propriétés.*

On définit comme dans GPK$^+$: $r_0 = \varnothing$, $r_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{P}r_\beta$ (remarquer que la fonctionnelle H de la proposition 7.13 nécessaire pour définir les r_α par induction est définie sans paramètres). Soit $R = \bigcup\limits_{\alpha \in On} r_\alpha$. On prouve que la classe R ainsi définie se comporte comme dans GPK$^+$. En résumé, ceci donne:

Proposition 7.15.

- $\forall \alpha \in On \ \ r_{\alpha+1} = \mathcal{P}r_\alpha$.
- *Si λ est limite $r_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} r_\alpha$.*
- $\forall \alpha \in On, \forall \alpha' \in On \ \ \alpha < \alpha' \Rightarrow r_\alpha \subsetneq r_{\alpha'}$.
- *$\forall \alpha \in On$, $\alpha \in R$; de plus $RG(\alpha) = \alpha + 1$.*
- *Si $RG(a) = \alpha$, le rang des éléments de a est strictement inférieur à α.*
- $\forall x \ \ x \subset R \Leftrightarrow x \in R$.
- *$R = BF$ (BF étant la classe des ensembles bien fondés définis comme dans GPK$^+$).*
- *BF est une classe d'ensembles isolés.*

On se propose maintenant de traiter le cas de la clôture transitive dans GPK. Dans GPK$^+$, on avait défini la clôture transitive d'un ensemble a

comme étant l'intersection de la classe suivante $\{x \mid x \ni a \wedge x \text{ est transitif}\}$. Cette classe est définie à l'aide du paramètre a; rien ne dit, a priori, que cette intersection soit un ensemble. On va cependant montrer que l'on a l'axiome de la clôture transitive si l'on dispose de l'axiome de l'infini INF. Plaçons-nous donc dans $\mathrm{GPK}_\infty = \mathrm{GPK} + \mathrm{INF}$. L'idée est de définir la fermeture transitive comme dans ZF, $\mathrm{trcl}(a) = \{a\} \cup a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \bigcup\bigcup\bigcup a \cup \cdots$. La fonctionnelle H de la proposition 7.13 ne peut servir à définir une fonction par induction que si ses paramètres sont isolés. On ne peut donc pas définir $\mathrm{trcl}(a)$ directement comme étant $\{a\} \cup a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \bigcup\bigcup\bigcup a \cup \cdots$ car on utiliserait le paramètre a. Définissons une fonction g de domaine ω (l'ensemble des naturels, c'est-à-dire des ordinaux finis) par induction sur n:

$$\begin{aligned} g(0) &= \{(x,x) \mid x \in V\} \quad (V \text{ étant la classe universelle}) \\ g(n) &= \{(x,y) \mid (\textstyle\bigcup x, y) \in g(n-1)\} \quad \text{si } n \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Il faut remarquer qu'à chaque étape n, la classe $\{(x,y) \mid (\bigcup x, y) \in g(n-1)\}$ est un ensemble car elle est définie par une formule *BPF* (ayant $g(n-1)$ pour paramètre). Il faut aussi vérifier que la fonctionnelle H de la proposition 7.13 servant à définir g n'a pas de paramètres; autrement dit qu'elle soit définissable par une formule ayant une seule variable libre représentant $g|_n$; ce qui est clairement vrai (remarquer aussi que l'on peut retrouver $g(n-1)$ à partir de $g|_n$). On vérifie que pour chaque $n \in \omega$, $g(n)$ est une fonction; intuitivement celle-ci envoie un ensemble x sur $\underbrace{\bigcup \ldots \bigcup}_{n \text{ fois}} x$. On définit maintenant la fonction h dont le domaine est $\omega \times V$ de la manière suivante: $h(n,x) = (g(n))(x)$. On vérifie que h est bien une fonction (c'est-à-dire un ensemble) car elle est définie par une formule *BPF* (ayant g pour paramètre). Clairement la fonction h fait correspondre au couple (n,x) l'ensemble $\underbrace{\bigcup \ldots \bigcup}_{n \text{ fois}} x$. A présent on peut voir que l'ensemble $\{a\} \cup \bigcup \mathrm{im}\left(h|_{\omega \times \{a\}}\right)$ est la clôture transitive de a. On a donc prouvé la proposition suivante dans GPK_∞.

Proposition 7.16. (dans GPK_∞).
Tout ensemble a a une clôture transitive $\mathrm{trcl}(a)$.

Remarquons que dans la preuve de cette proposition, on a utilisé l'axiome de l'infini, ce qui n'était pas le cas dans GPK^+. Prouvons à présent que la classe BF avec l'appartenance interprètent ZF dans GPK_∞.

Théorème 7.17. *La classe BF avec l'appartenance $\in$ interprète* ZF*.*

PREUVE. — Elle se fait comme pour GPK^+_∞. Remarquer, pour le schéma de remplacement, qu'une fonctionnelle $F \subset BF$ définissable dans la structure $(BF, \in)$ est définissable dans GPK_∞ par une formule dont les paramètres sont isolés (puisque par définition, ils doivent appartenir à BF). $\square$

Comme pour GPK^+, on voit aussi que la théorie GPK interprète $\mathrm{ZF}_{-\infty}$ (c'est-à-dire ZF sans l'axiome de l'infini). Il est connu que celle-ci est mutuellement interprétable avec PA (l'arithmétique de Peano).

Remarquons que l'on ne peut pas adapter la preuve du théorème 6.6 donnant une interprétation de la théorie de Kelley-Morse. En effet, la définition de classes de KM comme étant un ensemble a satisfaisant $\overline{a \cap BF} = a$ n'a plus de sens puisque rien ne dit que $a \cap BF$ a une fermeture.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 8

GPK^+ n'est pas finiment axiomatisable

Nous nous proposons de montrer que GPK^+ n'est pas finiment axiomatisable ou plus généralement qu'elle n'est pas axiomatisable par un ensemble de formules dont le nombre de quantificateurs est borné. On se place donc ici dans GPK^+ (l'axiome de l'infini n'est pas nécessaire). En fait ceci découle assez facilement de [24] (cf. annexe). On doit donc définir dans GPK^+ une classe I de suites finies et les opérations $\langle\ \rangle$ et $\frown$ (cfr. annexe § A.4). On les définit de manière naturelle.

Définitions.

(a) $I = \{f \mid f$ *est une fonction dont le domaine est un ordinal fini*$\}$.

(b) *Pour chaque ensemble* x, $\langle x\rangle$ *est la fonction* f *suivante:* $f = \{(\varnothing, x)\}$.

(c) *Si* $f \in I$ *et* $g \in I$, $f \frown g$ *est défini comme suit. Soit* n *la « longueur » de la suite* f *c'est-à-dire* $n = \max\{x \mid x \in \operatorname{dom} f\}$ *et* m *la longueur de la suite* g. *On définit la fonction* $f \frown g$ *dont le domaine est* $\{x \in \omega \mid x \leqslant n+m+1\}$:

$$f \frown g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \leqslant n \\ g(x-n-1) & si \quad n < x \leqslant n+m+1. \end{cases}$$

On vérifie alors très facilement l'énoncé du théorème A.2 de l'annexe. Pour le schéma d'induction, on utilise la proposition 4.8 restreinte à l'ensemble des naturels. Remarquons toutefois que cette technique ne fonctionne plus pour GPK car la formule Γ du théorème A.2 (g) de l'annexe pourrait avoir des paramètres non isolés.

Mentionnons aussi que la théorie CBPF (en d'autres termes GPK^+ sans le schéma CL) est finiment axiomatisable. Ceci a été montré dans [11] par une technique qui rappelle la manière dont on axiomatise finiment GB.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 9

Gödel-Bernays dans GPK^+

La théorie de Gödel-Bernays est en fait la théorie ZF à laquelle on a ajouté des classes, c'est-à-dire des collections définissables d'ensembles (voir annexe). On se propose ici de faire la même démarche dans GPK^+ pour obtenir GBGPK^+. Disposant de classes, tous les schémas mentionnés précédemment deviendront des axiomes uniques (comme cela se passe pour la théorie de Gödel-Bernays).

Le langage de GBGPK^+ est celui de la théorie des ensembles. Les éléments de GBGPK^+ seront appelés « classes ». On définit le prédicat $V(X)$, signifiant « X est un ensemble » par $V(X) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists Y\, X \in Y$. On note $V = \{x \mid V(x)\}$ la classe des ensembles (on verra que, comme on peut s'y attendre, V est un ensemble). On notera les ensembles par des minuscules et les classes par des majuscules. Les axiomes de GBGPK^+ sont:

- Extensionnalité : $\forall X\, \forall Y\ ((\forall z\ (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)) \Rightarrow X = Y)$
- VIDE: $(\exists x \in V)\, \forall y\ y \notin x$.
- $\mathbb{C}_V\,(BPF)$:

  $$\forall a_1 \in V \ldots \forall a_n \in V\, \exists u \in V\, \forall t \in V\ \ (t \in u \Leftrightarrow \varphi(t, a_1, \ldots, a_n))\,,$$

  pour chaque formule BPF φ dont les variables libres sont parmi $(a, a_1, \ldots, a_n)$.

- Schéma de compréhension pour les formules prédicatives:

$$\forall A_1 \ldots \forall A_n \, \exists U \, \forall t \in V \;\; (t \in U \Leftrightarrow \Psi(t, A_1, \ldots, A_n))$$

pour chaque formule $\Psi(t, A_1, \ldots, A_n)$ dont les variables libres sont parmi $(t, A_1, \ldots, A_n)$ et ne comprenant pas de quantifications sur les classes.

- CL: $\forall A \, \exists a \in V \; [A \subset a \wedge (\forall b \in V)(A \subset b \Rightarrow a \subset b)]$.

Exactement comme on montre que la théorie de Gödel-Bernays est équiconsistante à ZF, on montre que cette théorie est équiconsistante à GPK$^+$. De plus, une formule Γ de GBGPK$^+$ ne mentionnant que des ensembles est prouvable dans GBGPK$^+$ si et seulement si elle est prouvable dans GPK$^+$. De manière précise, à chaque formule Γ de GPK$^+$ sans variables libres, on fait correspondre une formule Γ' de GBGPK$^+$ en remplaçant les quantifications $\forall x$ par $\forall x \in V$ et $\exists x$ par $\exists x \in V$. On montre que GPK$^+ \models \Gamma \Leftrightarrow$ GBGPK$^+ \models \Gamma'$. De plus, on montre que GBGPK$^+$ est finiment axiomatisable. Dans [19], Gödel a montré que GB est finiment axiomatisable. En examinant sa preuve, on voit qu'il a en fait montré que le schéma de compréhension pour les formules prédicatives est finiment axiomatisable; ceci pourvu que l'on dispose de l'axiome de la paire sur les ensembles (ce qui est ici le cas). Le schéma CL est devenu un axiome unique. Les autres axiomes de GBGPK$^+$ sont finiment axiomatisables puisque ce sont ceux de CBPF restreints à V et que CBPF est finiment axiomatisable comme mentionné dans le paragraphe précédent. On conclut donc que GBGPK$^+$ est finiment axiomatisable.

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 10

L'axiome de la théorie de Kelley-Morse: « On est ramifiable »

Dans ce chapitre, on considère les théories KM et KMAC: KM + AC, KM étant la théorie de Kelley-Morse, AC étant l'axiome du choix global (l'axiome de fondement ne sera pas utilisé dans ce chapitre. Il est connu que KM et KMAC sont mutuellement interprétables.

Dans la théorie KMAC, la classe On se comporte comme un « cardinal maximum ». C'est le cardinal des classes propres, en ce sens qu'une classe A est propre ssi elle est en bijection avec On (ceci est connu et facile à montrer; en fait la théorie GB + AC suffit).

On rappelle que si κ est un cardinal, un ensemble a est dit κ-fini ssi $\#a < \kappa$ ($\#a$ désigne le cardinal de a). Il est donc naturel, dans KM, de définir une classe A comme étant On-finie ssi elle est un ensemble et On-infinie ssi elle est propre. On remarque que tous les ordinaux sont On-finis. On note également $\alpha < On$ pour « $\alpha \in On$ ». Si $A \subset On$, on définit $\sup A$ comme étant $\sup A$ au sens habituel si A est un ensemble, On sinon ($\sup A$ est appelé le supremum de A). On peut à présent donner un sens à l'expression « On est fortement inaccessible » en remplaçant κ par On dans la définition d'inaccessibilité (voir annexe). Ceci donne:

$$\text{« } On \text{ est fortement inaccessible »} \\ \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$$

(a) $\forall \alpha \in Card\ 2^\alpha < On$
(*Card* désigne la classe des cardinaux, 2^α désigne $\#\mathcal{P}\alpha$)
(b) Toute union On-finie de cardinaux est On-finie.

Proposition 10.1.
« On est fortement inaccessible » est un théorème de KM.

PREUVE. — Facile. □

On peut à présent généraliser la notion d'arbre de la manière suivante. Soit T une classe et soit $<_T$ une relation d'ordre partiel strict sur T c'est-à-dire vérifiant les conditions suivantes:

$$\forall a \in T\, \neg(a <_T a)$$
$$\forall a \in T\, \forall b \in T\, \forall c \in T\ ((a <_T b \wedge b <_T c) \Rightarrow a <_T c)$$
$$\neg(a <_T b \wedge b <_T a).$$

Le couple $(T, <_T)$ [1] (ou par abus de langage T) est dit être un arbre ssi

(a) T a un élément minimum a (c'est-à-dire $\forall x \in T\, a \leqslant_T x$) [2] appelé la racine de l'arbre.
(b) $\forall a \in T$ la classe suivante $\{x \mid x <_T a\}$ est un *ensemble* qui est bien ordonné.

On généralise alors de manière évidente les notions de niveaux, successeur d'un élément, branche, successeur d'une branche, longueur d'une branche (si elle est une classe propre la longueur est par définition On).

Dans KM, on donne alors un sens à l'expression « On est ramifiable »:
« On est ramifiable » $\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tout arbre On-infini dont les niveaux sont On-finis a une branche de longueur On.

Attirons l'attention sur le fait que nous avons définit cette notion dans KM et pas dans KMAC. Au point de vue des interprétations, la seule chose

1. Le lecteur n'émettra pas d'objection à l'usage d'un couple de classes.
2. $a \leqslant_T x$ signifie $a <_T x \vee a = x$.

qui nous intéresse vraiment dans le cadre qui nous occupe, ceci revient en fait au même grâce à la proposition suivante.

Proposition 10.2. KM + « *On est ramifiable* » *et* KMAC + « *On est ramifiable* » *sont mutuellement interprétables* [3].

On va voir que « *On* est ramifiable » est un axiome très fort. Il est connu que si κ est un cardinal fortement inaccessible et ramifiable, alors κ est le κ-ième cardinal inaccessible où plus généralement que κ est n-Mahlo pour chaque n. On peut trouver une preuve de ce résultat dans [2], ch. B3. Une adaptation quasi-immédiate de la preuve de [2], ch. B3 montre que « *On* est ramifiable » entraîne l'existence d'une classe propre de cardinaux inaccessibles (ou plus généralement n-Mahlo). La seule chose dont il faut se méfier est que l'on ne dispose pas d'axiome permettant de choisir des classes propres (mais bien de choisir des ensembles dans des classes propres). Il faut aussi remarquer que dans KM, il y a moyen de représenter par des classes des « fonctions » qui envoient des ensembles sur des classes [4].

Remarquons que ce résultat montre que KM + « *On* est ramifiable » est plus fort, au point de vue de la consistance relative que KM. C'est-à-dire que l'on ne peut prouver la consistance de KM + « *On* et ramifiable » à partir de celle de KM. Il est facile de voir par contre que KM + « il existe un cardinal $\kappa > \omega$ fortement inaccessible est ramifiable » permet de prouver la consistance de KM + « *On* est ramifiable ». On voit en effet que $(R_{\kappa+1}, \in)$ [5] où $\kappa > \omega$ est un cardinal fortement inaccessible et

3. Nous remercions Robert Solovay pour nous avoir communiqué ce résultat.

4. Le lecteur voulant vérifier l'exactitude de cette affirmation procédera de la manière suivante (les numéros des lemmes et des théorèmes sont ceux de [2] ch. B3, ainsi que les notations utilisées).

- Il commencera par adapter le lemme 2.1 ainsi que le lemme 2.2.
- Il remarquera ensuite qu'il y a moyen d'adapter la preuve du théorème 2.3 pour montrer qu'il n'y a pas de fonction f *injective* vérifiant la condition de l'énoncé de ce théorème (car dans ce cas on peut définir $C_\xi = \{\eta | \eta > f^{-1}(\xi)\}$; il n'y a pas besoin de le choisir).
- Il adaptera ensuite facilement les preuves des théorèmes 7.1, 7.2, 7.3 (ainsi que le lemme 7.4); l'arbre T de la preuve du théorème 7.3 n'est pas tout à fait correct, il faut prendre:

$$T = \left\{ s \in S^{<\kappa} \mid \forall \xi < lh(s)[s(\xi) < \xi] \text{ et } s \text{ est } 1.1 \right\}.$$

5. $R_{\kappa+1}$ étant l'ensemble des ensembles de rang $\leqslant \kappa + 1$; $\kappa + 1$ étant $\kappa \cup \{\kappa\}$.

ramifiable est un modèle de KM + « On est ramifiable » (réciproquement, si $(R_{\kappa+1}, \in)$ est un modèle de KM + « On est ramifiable », alors κ est fortement inaccessible et ramifiable).

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 11

La consistance de GPK^+_∞

Dans ce chapitre, nous étudierons le niveau de consistance de GPK^+_∞. Le but de ce chapitre est de prouver le théorème suivant:

Théorème 11.1. *Les théories* GPK^+_∞ *et* KM + « *On est ramifiable* » *sont mutuellement interprétables (et donc équiconsistantes).*

11.1. GPK^+_∞ interprète KM + « On est ramifiable »

Dans cette section, on se place dans GPK^+_∞. Nous avons déjà montré (théorème 6.6) que GPK^+_∞ interprète KM. Notons $\mathrm{KM}_{\mathrm{GPK}}$ l'interprétation de KM décrite dans le chapitre 6 (c'est-à-dire les classes, au sens de GPK^+_∞, d'ensembles bien fondés de GPK^+_∞). Montrons que $\mathrm{KM}_{\mathrm{GPK}} \models$ « On est ramifiable ».

Considérons $T \subset BF$, T est un arbre ordonné par inclusion (ceci ne restreint pas la généralité). Notons T_λ l'ensemble des points de niveau λ dans T pour $\lambda \in On$. Soit s un point d'accumulation de T. On va prouver que

$$\forall \lambda \ \exists! s_\lambda \in T_\lambda \ s_\lambda \subset s. \qquad (\star)$$

Clairement, $(\star)$ montre que T est une On-branche.

Fixons donc λ et soit $H = T_\lambda \cup (\bigcup T_\lambda) \cup (\bigcup\bigcup T_\lambda)$. Soit $T' = \bigcup\limits_{\gamma \geqslant \lambda} T_\gamma$. Clairement s est un point d'accumulation de T'. Montrons que

$$\{u \mid \exists! v \in T_\lambda \; v \subset u\}$$

est un fermé.

En effet:

$$\begin{aligned}\{u \mid \exists! v \in T_\lambda \; v \subset u\}& \\ = \quad & \{u \mid \exists v \in T_\lambda \; v \subset u\} \\ & \cap \{u \mid \forall v \in T_\lambda \; \forall v' \in T_\lambda \; v \not\subset u \vee v' \not\subset u \vee v = v'\}.\end{aligned}$$

$v \not\subset u$ est défini comme suit:

$$(\exists t \in v)(t \notin u) \;\; \vee \;\; (\exists t \in v) \; (\forall h \in u)(h \in d(t))$$

où d est la fonction de domaine H définie par $d(x) = \{y \mid y \neq x\}$.

Clairement

$$T' \subset \{u \mid \exists! v \in T_\lambda \; v \subset u\},$$

donc aussi

$$\overline{T'} \subset \{u \mid \exists! v \in T_\lambda \; v \subset u\},$$

donc $\exists! v \in T_\lambda \; v \subset s$, ce que l'on voulait.

11.2. KM + « On est ramifiable » interprète GPK^+_∞

Dans cette section, on construira une interprétation de GPK^+_∞ dans KM + « On est ramifiable ». (On suppose que l'axiome de fondement est satisfait dans KM.)

Les modèles qui ont été construits jusqu'à présent de GPK^+_∞ proviennent directement des hyperunivers. Ceux-ci sont construits à l'aide d'un cardinal κ fortement inaccessible et ramifiable. L'idée générale est de construire un hyperunivers en utilisant On à la place de κ comme cardinal fortement inaccessible et ramifiable. Les arguments de [11], [13] prouvant que les hyperunivers N_κ satisfont GPK ont été une source d'inspiration pour prouver que notre interprétation satisfait GPK^+_∞. La construction des hyperunivers entre dans le cadre d'une méthode générale pour « compléter » des structures du premier ordre ([20]). La construction que nous donnons peut se voir comme une adaptation de cette méthode. On va en fait « compléter » la classe des ensembles de KM.

À partir d'ici, nous nous plaçons dans la théorie KM+ « On est ramifiable ». De la même manière que l'on utilise des classes dans ZF, nous utiliserons des hyperclasses dans KM: une hyperclasse est une collection *définissable* (avec paramètres) de classes. Classiquement des énoncés du genre « Soit $\mathcal{A}$ une hyperclasse, on a ... » se traduisent par des schémas.

Nous aurons besoin d'utiliser les équivalences $\sim_\alpha$ ($\alpha \in On$) définies d'abord par R.J. Malitz ([23]) et utilisées par M. Forti, F. Honsell et R. Hinnion (essentiellement [11], [13]) pour construire les hyperunivers. Nous rappellerons les principales propriétés que nous utiliserons de ces équivalences.

Les $\sim_\alpha$ ($\alpha \in On$) sont définies par induction de la manière suivante:

$$\sim_0 = V \times V \text{ (rappelons que } V \text{ est la classe universelle)}$$
$$\sim_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \sim_\alpha \text{ } (\lambda \text{ étant un ordinal limite)}$$
$$a \sim_{\alpha+1} b \text{ ssi } ((\forall x \in a)(\exists y \in b) x \sim_\alpha y) \wedge ((\forall y \in b)(\exists x \in a) x \sim_\alpha y)$$

pour chaque $a, b \in V$.

On vérifie sans trop de difficultés, par induction sur α, que les $\sim_\alpha$ sont des équivalences emboîtées: si $\alpha \in On$ et si $\beta \leqslant \alpha$, alors $a \sim_\alpha b \Rightarrow a \sim_\beta b$; a et b désignant deux ensembles quelconques.

Dans [23] R.J. Malitz a défini pour chaque $x \in V$, l'ensemble

$$[x]_\alpha = \bigcup \left\{ y \mid y \sim_\alpha x \wedge \forall z \sim_\alpha x \ RG(z) \geqslant RG(y) \right\}.$$

Il remarque que $[x]_\alpha \sim_\alpha x$, ce qui permet de choisir de manière canonique un représentant dans chaque classe d'équivalence modulo $\sim_\alpha$ (remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'axiome du choix).

La classe suivante $M_\alpha = \{[x]_\alpha \mid x \in V\}$ est donc une classe de représentants pour chaque classe d'équivalences modulo $\sim_\alpha$. R.J. Malitz montre de plus que M_α est en fait un ensemble.

L'idée de sa preuve est la suivante: prenons le plus petit β tel que M_β ne soit pas un ensemble s'il en existe. L'ordinal β ne peut être successeur. En effet si $\alpha = \beta+1$, on montrerait que $\mathcal{P}M_\alpha$ est un ensemble de représentants pour les classes d'équivalences modulo $\sim_\alpha$ et on en déduirait que $M_{\alpha+1}$ est un ensemble. L'ordinal β est donc limite mais ceci est impossible car la fonction f de domaine M_λ : $f(x) = \langle [x]_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ donne une injection de M_λ dans l'*ensemble* des λ-suites (c'est-à-dire des fonctions de domaine λ) d'éléments de $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} M_\alpha$.

Le lemme suivant est un résultat utile concernant les $\sim_\alpha$:

Lemme 11.2. *Soient x et y deux ensembles et supposons que $x \sim_\alpha y$ avec $\alpha > RG(x)$; alors $x = y$.*

PREUVE. — Par induction sur α.

On en déduit le corollaire important suivant (rappelons que l'on a l'axiome de fondement). □

Corollaire 11.3. *Si x et y sont deux ensembles et si $\forall \alpha \in On \quad x \sim_\alpha y$, alors $x = y$. Autrement dit*

$$\bigcup_{\alpha \in On} \sim_\alpha = \{(x,x) \mid x \in V\}.$$

On définit une « relation d'appartenance au niveau α », pour chaque ordinal α, sur V:

$$a \in_\alpha b \quad \text{ssi} \quad \exists a' \, \exists b' \, (a' \sim_\alpha a \wedge b' \sim_\alpha b \wedge a' \in b'),$$

de manière équivalente, on a: $a \in_\alpha b$ ssi $\forall \beta < \alpha \, \exists a' \sim_\beta a \;\; a' \in b$ (l'implication de droite à gauche est facile, pour l'autre prendre $a' = a$, $b' = b \cup \{a\}$). On définit un *net* comme étant une fonction de On vers V (un net est donc une classe propre). Nous écrirons A_α au lieu de $A(\alpha)$ pour l'image de α par le net A. Étant donné un net Y, un net Y' est dit être un sous-net de

Y ssi il existe une fonction $F : On \to On$ croissante et injective telle que $\forall \alpha \in On\, Y'_\alpha = Y_{F(\alpha)}$.

Définition. *Un net A est dit* fortement Cauchy *ssi* $\forall \alpha \forall \beta \geqslant \alpha \;\; A_\alpha \sim_\alpha A_\beta$; *on écrira netfc comme abréviation pour « net fortement Cauchy ».*

On fera les conventions suivantes: on utilisera

- les lettres latines minuscules $(a, b, \ldots)$ pour les ensembles (pour les ordinaux, on utilise les lettres grecques minuscules $\alpha, \beta, \ldots$);
- les lettres latines majuscules $(A, B, \ldots)$ pour les netfcs;
- les lettres latines majuscules rondes $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots)$ pour les hyperclasses de netfcs.

On étend la définition des équivalences $\sim_\alpha$ aux netfcs: $A \sim_\alpha B$ ssi $A_\alpha \sim_\alpha B_\alpha$. On définit la relation d'équivalence $\approx$, ainsi que la relation d'appartenance $\overline{\in}$ sur les netfcs:

$$\begin{array}{lll} A \approx B & \text{ssi} & \forall \alpha \;\; A \sim_\alpha B; \\ A \,\overline{\in}\, B & \text{ssi} & \exists A' \,\exists B' \;\; (A' \approx A) \wedge (B' \approx B) \wedge (\forall \alpha \, A'_\alpha \in B'_\alpha). \end{array}$$

Il est évident que $\overline{\in}$ est compatible avec $\approx$. On vérifie sans difficultés que $A \,\overline{\in}\, B$ ssi $\forall \alpha \;\; A_\alpha \in_\alpha B_\alpha$. Nous allons prouver que les netfcs avec l'égalité interprétée comme étant $\approx$ et l'appartenance interprétée comme étant $\overline{\in}$ vérifie les axiomes de $\mathrm{GPK}_{\infty}^{+}$. Ceci nécessite plusieurs résultats préliminaires.

Le lemme suivant est capital, c'est le seul endroit où l'on utilise l'axiome « On est ramifiable ».

Lemme 11.4. *Tout net a un sous-net fortement Cauchy.*

PREUVE. — Soit A un net quelconque. Soit B le net suivant: $B_\alpha = (\alpha, A_\alpha)$. Définissons des *ensembles* T_α, pour chaque ordinal α par induction. $T_0 = \{(0, A_0)\}$, on construit T_α en mettant, pour chaque classe d'équivalence U modulo $\sim_\alpha$, le plus petit (au sens de la première composante) élément (β, A_β) de B appartenant à U et non utilisé auparavant (si un tel élément n'existe pas, on n'ajoute rien pour cette classe d'équivalence). La classe T_α est un ensemble car il existe un ensemble de représentant pour chaque classe d'équivalence modulo $\sim_\alpha$. On met sur T l'ordre suivant: $(\beta, A_\beta) <_T (\alpha, A_\alpha)$ ssi $\beta < \alpha$ et $A_\beta \sim_\beta A_\alpha$. Vérifions que T est un arbre dont les niveaux sont On-finis (c'est-à-dire des ensembles).

- **T est un arbre:** $(0, A_0)$ est la racine de T. Si $(\alpha, A_\alpha) \in T$, on vérifie facilement que sur l'ensemble $\{(\beta, A_\beta) \mid (\beta, A_\beta) <_T (\alpha, A_\alpha)\}$ l'ordre $<_T$ se confond avec l'ordre des premières composantes des éléments de cet ensemble; ce qui montre qu'il est bien ordonné.
- **Les niveaux de T sont des ensembles:** On vérifie facilement que le α-ième niveau de T est T_α et l'on a déjà montré que celui-ci est un ensemble. Si T est On-fini (c'est-à-dire un ensemble), alors on voit qu'il existe un α $T = \bigcup\limits_{\xi \leqslant \alpha} T_\xi$. On voit alors, d'après la définition de T, que A est un net formé des seuls éléments de T, qui est un ensemble. Il y a donc un sous-net de A constant et qui est donc fortement Cauchy. Si T est On-infini, l'axiome « On est ramifiable » entraîne l'existence d'une branche de T qui est une classe propre. La deuxième composante de cette branche forme le sous-net fortement Cauchy recherché. □

A un ensemble a de KM, on fait correspondre le netfc constant a^N tel que $a^N_\alpha = a$ pour chaque α. Remarquons d'abord qu'un netfc A est équivalent à un netfc constant ssi il est finalement constant (c'est-à-dire $\exists\alpha\,\forall\beta \geqslant \alpha$ $A_\beta = A_\alpha$); ceci est facile à montrer en vertu du lemme 11.2. Notons $\mathcal{KM}$ l'hyperclasse des netfcs finalement constants.

Le lemme suivant dit, en gros, que sur $\mathcal{KM}$ l'appartenance $\overline{\in}$ coïncide avec l'appartenance $\in$ définie sur les ensembles de KM.

Lemme 11.5. *Soit Y un netfc. On a $Y \in \mathcal{KM}$ ssi $\forall X \,\overline{\in}\, Y$ $X \in \mathcal{KM}$. Dans ce cas, on a $X \,\overline{\in}\, Y$ ssi $x \in y$ où X est finalement égal à x (c'est-à-dire $\exists\alpha\,\forall\beta \geqslant \alpha$ $X_\beta = x$) et Y est finalement égal à y.*

PREUVE. — Soit $Y \in \mathcal{KM}$ et soit $X \,\overline{\in}\, Y$. Supposons que Y soit finalement égal à y. On a $\forall\alpha \in On$ $\exists x'_\alpha \sim_\alpha X_\alpha$ tel que $x'_\alpha \in y$. Puisque y est un ensemble, il existe un sous-net de $\langle x'_\alpha \rangle$ qui est constant (puisqu'il n'y a pas une classe propre de x'_α avec $x'_\alpha \in y$). Supposons que x'_γ est dans ce sous-net et soit $\rho = RG(x'_\gamma)$. Soit $\delta > \rho$ tel que $x'_\delta = x'_\gamma$. Si $\theta \geqslant \delta$, on a

$x'_\delta \sim_\delta x'_\theta \sim_\theta X_\theta$ et donc $x'_\gamma \sim_\delta x'_\theta \sim_\theta X_\theta$. Comme $\delta > RG(x'_\gamma)$ et que $\theta \geqslant \delta$, on a par le lemme 11.2 $x'_\gamma = x'_\theta = X_\theta$; ce qui montre que X est finalement constant.

Réciproquement soit Y un netfc et supposons que $\forall X \mathrel{\overline{\in}} Y \quad X \in \mathcal{KM}$. Si $Y \notin \mathcal{KM}$, on aurait pour chaque ordinal α, $RG(Y_\alpha) \geqslant \alpha$ (utiliser le lemme 11.2). Soit X un net tel que $\forall\alpha \quad X_\alpha \in Y_{\alpha+1}$ et $RG(X_\alpha) \geqslant \alpha$. Soit X' un sous-net de X fortement Cauchy. Clairement $X' \notin \mathcal{KM}$ et $X' \mathrel{\overline{\in}} Y$. Supposons à présent que X soit finalement égal à x, que Y soit finalement égal à y et que $X \mathrel{\overline{\in}} Y$. On trouve un $\alpha > RG(y)$ tel que $Y_\alpha = y$ et $X_\alpha = x$ et on en conclut que $x \in y$. □

Dorénavant, nous identifierons les ensembles de KM avec les netfcs finalement constants; on peut le faire puisque, d'après le lemme 11.5, ils ont les mêmes éléments. On étend la définition de $\overline{\in}$ et $\approx$ aux hyperclasses de netfcs de la manière suivante:

$$A \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists A' \approx A \quad A' \in \mathcal{A} \quad (A \text{ étant un netfc})$$
$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \Leftrightarrow (\forall X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{A}, X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{B}) \wedge (\forall X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{B}, X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{A}).$$

On peut définir d'autres symboles $\overline{\subset}$, $\overline{\cap}$ en remplaçant dans leurs définitions usuelles $=$ par $\approx$ et $\in$ par $\overline{\in}$. Quand il n'y aura pas de danger de confusions, on écrira $A \in \mathcal{A}$ et on dira que A est un élément de $\mathcal{A}$, de même pour $\overline{\in}$, $\overline{\cap}$, ... De même, nous identifierons les hyperclasses $\approx$-équivalentes.

Pour les netfcs ainsi que pour les hyperclasses, on travaillera en fait dans le quotient par la relation $\approx$. C'est cette présentation qui est utilisée dans [20]. Nous avons préféré ne pas l'utiliser ici car contrairement à [20], cela nous aurait forcé à manier des super-hyperclasses (collections d'hyperclasses), ce qui aurait causé des difficultés supplémentaires.

On définit une opération de clôture sur les hyperclasses de netfcs (qui correspondra à la clôture d'une classe dans GPK_∞^+).

Définition.

Soit $\mathcal{A}$ une hyperclasse de netfcs, on définit $\overline{\mathcal{A}}$, la clôture *de $\mathcal{A}$, par:*

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ X \mid \forall\alpha\, \exists X' \, (X_\alpha \sim_\alpha X'_\alpha \wedge X' \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{A}) \right\}.$$

On écrira parfois $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ *au lieu de* $\overline{\mathcal{A}}$.

On vérifie que $\overline{\overline{\mathcal{A}}} \approx \overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \mathrel{\overline{\subset}} \overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{A} \mathrel{\overline{\cup}} \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \mathrel{\overline{\cup}} \overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\varnothing} \approx \varnothing$ (ici $\varnothing$ représente la classe vide de netfcs). Ce sont les axiomes d'un espace topologique définis à partir de la clôture topologique, à ceci près que cette clôture ne s'adresse qu'aux hyperclasses de netfcs, c'est-à-dire, en gros, aux collections *définissables* de netfcs. On se permettra donc d'utiliser le langage topologique. En fait on verra que cette opération de clôture que l'on vient de définir donnera l'opération de clôture de GPK^+_∞ (cfr. chapitre 2); les hyperclasses de netfcs sont en fait les classes de GPK^+_∞. Nous n'utiliserons pas, dans la suite, de résultats topologiques sans en adapter la preuve (sauf si celle-ci est triviale). Le fait que l'on a une « topologie » ne doit servir que d'intuition pour l'élaboration et la preuve des résultats dont on aura besoin.

On définit, comme en topologie, la notion d'hyperclasse fermée: une hyperclasse $\mathcal{A}$ de netfcs est fermée ssi $\overline{\mathcal{A}} \approx \mathcal{A}$. Naturellement, une hyperclasse $\mathcal{A}$ de netfcs sera dite ouverte si son complément $\mathcal{A}^c = \{X \mid X \mathrel{\overline{\notin}} \mathcal{A}\}$ est fermé.

Appelons une hyperclasse base-ouverte si elle est de la forme $\{Y \mid Y_\alpha \sim_\alpha x\}$ où x est un ensemble et α un ordinal fixé. À l'hyperclasse $\{Y \mid Y_\alpha \sim_\alpha x\}$, on peut associer l'ensemble suivant $([x]_\alpha, \alpha)$. Cette remarque permet de traduire par des formules du premier ordre sur le langage $(\overline{\in}, \approx)$ des formules du genre « il existe une hyperclasse base-ouverte tel que ... » ou « pour toute hyperclasse base-ouverte, on a ... ».

Vérifions que l'intersection de deux hyperclasses base-ouvertes est une hyperclasse base-ouverte. Soit $\mathcal{U} = \{X \mid X_\alpha \sim_\alpha x\}$, $\mathcal{V} = \{Y \mid Y_\beta \sim_\beta y\}$ et supposons $\beta \leqslant \alpha$. On a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \approx \varnothing$ si $x \nsim_\beta y$; $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \approx \mathcal{U}$ si $x \sim_\beta y$.

Lemme 11.6. *Une hyperclasse $\mathcal{A}$ de netfcs est fermée ssi $\forall X \mathrel{\overline{\notin}} \mathcal{A}$, il existe une hyperclasse base-ouverte $\mathcal{U}$ telle que $X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \mathrel{\overline{\cap}} \mathcal{A} \approx \varnothing$.*

PREUVE. — Facile. □

On voit facilement que l'hyperclasse V de tous les netfcs ainsi que l'hyperclasse vide $\varnothing$ sont fermées (le fait pour lequel on utilise une lettre droite pour l'hyperclasse universelle sera justifiée par le lemme 11.9 qui montrera que V correspond à un netfc).

On remarque également que les hyperclasses de netfcs sont stables par union binaire. On voit aussi que si $\mathcal{A}$ est l'intersection d'une famille quelconque de netfcs, alors $\mathcal{A}$ est fermée pourvu que $\mathcal{A}$ soit une *hyperclasse* de netfcs (c'est-à-dire pourvu que $\mathcal{A}$ soit *définissable*).

Cette dernière affirmation n'est pas exprimable au premier ordre dans KM. C'est une affirmation concernant le modèle de KM dans lequel on travaille, faite à l'extérieur de celui-ci. Ce résultat ne figure ici que pour nous conforter dans l'idée que l'on a un « espace topologique », il ne figure dans aucune preuve formelle.

On peut voir en fait que notre « topologie » est une *On*-topologie dans le sens suivant. Appelons *On*-finie une collection d'hyperclasses base-ouvertes ssi il existe un ensemble de représentants pour ces hyperclasses. On voit alors facilement que l'intersection des éléments d'une hyperclasse *On*-finie d'hyperclasses base-ouvertes est une hyperclasse base-ouverte. Nous voyons aussi que les hyperclasses base-ouvertes sont fermées et on a donc une « topologie » 0-dimensionnelle. En fait, on a un « espace uniforme » en prenant les collections suivantes comme entourages: $\big\{(X,Y) \bigm| X \sim_\alpha Y\big\}$ où $\alpha \in On$ (on verra plus tard que l'usage d'un couple de netfcs ne pose pas de problèmes).

Les classes de $\mathrm{KM}_{\mathrm{GPK}}$ suivantes : $\big\{x \bigm| x \sim_\alpha a\big\}$ où α parcourt *On* et a parcourt V (la classe de tous les ensembles) sont appelées classes d'équivalence modulo α. Celles-ci correspondent aux hyperclasses bases-ouvertes de la forme $\big\{X \bigm| X_\alpha \sim_\alpha a\big\}$ (ici X est un netfc). Nous ne ferons pas toujours explicitement la distinction entre les classes d'équivalences modulo α et les hyperclasses bases-ouvertes; ceci dans le même ordre d'idées que l'on identifie les ensembles de $\mathrm{KM}_{\mathrm{GPK}}$ avec les netfcs finalement constants.

Le lemme suivant sera appelé « lemme de prolongement ».

Lemme 11.7. (lemme de prolongement). *Soit A un netfc et soit x un ensemble tel que $x \in_\gamma A_\gamma$; alors il existe un netfc X tel que $X_\gamma = x$ et $X \mathrel{\overline{\in}} A$.*

Preuve. — Définissons le netfc A' par $A'_\alpha = A_{\alpha+1}$. On a clairement que $A' \approx A$. Définissons le net $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha\in On}$ de la manière suivante: si $\alpha < \gamma$, on pose $x_\alpha = x$; si $\alpha \geqslant \gamma$, on choisit un $x_\alpha \in_\alpha A'_\alpha$ tel que $x \sim_\gamma x_\alpha$ (l'existence d'un tel x_α découle du fait que $A'_\gamma \sim_{\gamma+1} A'_\alpha$). On extrait un sous-net X fortement Cauchy de $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha\in On}$. On vérifie sans peine que $X \mathrel{\overline{\in}} A$ et que

$X_\gamma \in_\gamma x$ et l'on voit sans difficultés que l'on peut en fait supposer $X_\gamma = x$. □

On peut maintenant prouver l'axiome d'extensionnalité (relativement à $\approx$ et $\overline{\in}$) sur les netfcs.

Lemme 11.8. (extensionnalité). *Soient X et Y deux netfcs tels que $\forall Z\ (Z \mathrel{\overline{\in}} X \Leftrightarrow Z \mathrel{\overline{\in}} Y)$; alors $X \approx Y$.*

Preuve. — Il faut prouver que $\forall \alpha \quad X_\alpha \sim_\alpha Y_\alpha$. Clairement il suffit de prouver que:

$$(\forall x \in_\alpha X_\alpha\ x \in_\alpha Y_\alpha) \wedge (\forall y \in_\alpha Y_\alpha\ y \in_\alpha X_\alpha)\,.$$

Soit donc $x \in_\alpha X_\alpha$; le lemme 11.7 fournit un netfc H tel que $H_\alpha = x$ et $H \mathrel{\overline{\in}} X$. Par hypothèse; ceci implique $H \mathrel{\overline{\in}} Y$ et donc $x = H_\alpha \in_\alpha Y_\alpha$. L'autre partie s'obtient en permutant le rôle de X et de Y. □

Prouvons maintenant qu'une hyperclasse $\mathcal{A}$ de netfcs est fermée ssi elle correspond à un netfc.

Lemme 11.9. *Une hyperclasse $\mathcal{A}$ de netfcs est fermée si et seulement s'il existe un netfc A tel que $\big\{X \bigm| X \mathrel{\overline{\in}} A\big\} \approx \mathcal{A}$.*

Preuve. — Soit Y un netfc. Soit $\mathcal{Y} = \{X \mid X \mathrel{\overline{\in}} Y\}$, montrons que $\overline{\mathcal{Y}} \approx \mathcal{Y}$. Soit $X \mathrel{\overline{\in}} \overline{\mathcal{Y}}$, pour chaque ordinal α, on choisit un ensemble x_α tel que l'affirmation suivante est vérifiée « $x_\alpha \sim_\alpha X_\alpha$, il existe $H \mathrel{\overline{\in}} Y$ avec $H_\alpha \sim_\alpha x_\alpha$ ». Extrayons un sous-net fortement Cauchy X' de $\langle x_\alpha \rangle$. On vérifie que $X' \approx X$ et que $X' \mathrel{\overline{\in}} Y$ et donc $X \in \mathcal{Y}$; ce qui montre que $\overline{\mathcal{Y}} \mathrel{\overline{\subset}} \mathcal{Y}$ et donc que $\overline{\mathcal{Y}} \approx \mathcal{Y}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{Y}$ est une hyperclasse fermée de netfcs. Définissons $h_\alpha = \big\{Y_\alpha \bigm| Y \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{Y}\big\}$, soit y_α un ensemble obtenu à partir de h_α en ne gardant qu'un seul élément par classe d'équivalence modulo $\sim_\alpha$ (on peut, par exemple, prendre $y_\alpha = \big\{[Y_\alpha]_\alpha \bigm| Y \in \mathcal{Y}\big\}$). On vérifie sans peine, en utilisant la définition de $\sim_\alpha$ que le net $Y = \langle y_\alpha \rangle_{\alpha \in On}$ est fortement Cauchy. Prouvons que le netfc Y a les mêmes $\overline{\in}$-éléments que l'hyperclasse $\mathcal{Y}$. On voit facilement que si $X \in \mathcal{Y}$, alors $X \mathrel{\overline{\in}} Y$. Si $X \mathrel{\overline{\in}} Y$, on voit que pour chaque hyperclasse base-ouverte $\mathcal{U}$ ayant X comme $\overline{\in}$-élément, on a $\mathcal{U} \overline{\cap} \mathcal{Y} \neq \varnothing$, donc $X \overline{\in} \mathcal{Y}$ puisque $\mathcal{Y}$ est fermée. $\square$

À partir de maintenant, nous ne ferons plus toujours la distinction entre une hyperclasse fermée et son netfc correspondant. De même, on ne distinguera plus systématiquement deux netfcs $\approx$-équivalents. Par exemple, on parlera du netfc vide pour mentionner en fait n'importe quel netfc n'ayant pas de $\overline{\in}$-éléments. Si A et B sont deux netfcs, on écrira $A \cup B$ le netfc correspondant à l'hyperclasse $\{X \mid X \overline{\in} A \vee X \overline{\in} B\}$, de même pour $\cap, \times, \ldots$ On voit facilement que notre « topologie » est Hausdorff (T_2: pour deux netfcs X et Y, il existe deux hyperclasses ouvertes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ telles que $X \overline{\in} \mathcal{U}$, $Y \overline{\in} \mathcal{W}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \approx \varnothing$). On voit aussi que si l'on a deux netfcs A et B, l'hyperclasse $\{A, B\}$ est fermée; elle correspond donc à un netfc que l'on écrira toujours $\{A, B\}$. En regardant la preuve du lemme 11.9, on voit que $\{A, B\}_\alpha \sim_\alpha \{A_\alpha, B_\alpha\}$. De la même manière, on peut voir aussi que si l'on a deux netfcs A et B, on peut trouver un netfc $(A, B) \approx \{\{A\}, \{A, B\}\}$ qui est le couple de A et B. On a toujours $(A, B)_\alpha \sim_\alpha (A_\alpha, B_\alpha)$. De plus, on voit que $(X, Y) \sim_{\alpha+2} (X', Y') \Leftrightarrow X \sim_\alpha X' \wedge Y \sim_\alpha Y'$. On peut aussi itérer le processus et obtenir des n-uples $(X^1, \ldots, X^n)$ de netfcs $X^1, \ldots, X^n$ (on met les indices en haut pour dire que X^i est le i-ième netfc du n-uple et pas le i-ième élément d'un netfc X). On a toujours $(X^1, \ldots, X^n)_\alpha \sim_\alpha \left(X^1_\alpha, \ldots, X^n_\alpha\right)$.

Montrons que l'hyperclasse des couples est fermée.

Lemme 11.10. *L'hyperclasse des couples $\mathbb{C}$ est fermée.*

PREUVE. — En vertu du lemme 11.6, il suffit de montrer que si X est un netfc tel que $\forall \alpha \in On \quad X_\alpha \in \mathbb{C}$, alors $X \in \mathbb{C}$ (rappelons que nous identifions un ensemble de KM avec un netfc finalement égal à celui-ci). Pour chaque $\alpha \in On$, il existe donc deux ensembles a_α et b_α tels que $X_\alpha \sim_\alpha (a_\alpha, b_\alpha)$. Soit A (resp. B) un sous-net de $\langle a_\alpha \rangle_{\alpha \in On}$ (resp. $\langle b_\alpha \rangle_{\alpha \in On}$) fortement Cauchy; il est alors facile de voir que $X \approx (A, B)$ et donc que $X \in \mathbb{C}$. $\square$

Sur l'hyperclasse des couples, on peut mettre deux « topologies » naturelles: la « topologie » induite par la topologie de base et la « topologie » produit. Le lemme suivant dit que ces deux « topologies » coïncident.

De manière plus précise, on dira qu'une hyperclasse $\mathcal{U}$ de couples est ouverte$_P$ (« ouverte$_P$ »signifiant « ouverte pour la topologie produit ») ssi pour tout $(X,Y) \in \mathcal{U}$, il existe deux hyperclasses ouvertes $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ telles que $X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{V}$, $Y \in \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. On dira qu'elle est ouverte$_I$ (ouverte$_I$ signifiant ouverte pour la topologie induite) ssi il existe une hyperclasse ouverte $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{V} \cap \mathbb{C} = \mathcal{U}$ (rappelons que $\mathbb{C}$ désigne l'hyperclasse des couples, qui est fermée).

Lemme 11.11. *La « topologie produit » et la « topologie induite » coïncident sur l'hyperclasse des couples. Autrement dit, une hyperclasse $\mathcal{U}$ de couples est ouverte$_P$ ssi elle est ouverte$_I$.*

PREUVE. — Supposons que $\mathcal{U}$ soit une hyperclasse de couples ouverte$_P$ et soit (X,Y) un élément quelconque de $\mathcal{U}$. Afin de prouver que $\mathcal{U}$ est ouverte$_I$, il suffit de trouver une hyperclasse ouverte $\mathcal{O}$ tel que $(X,Y) \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \cap \mathbb{C} \subset \mathcal{U}$ (passer au complément et utiliser le lemme 11.6). Comme $\mathcal{U}$ est ouverte$_P$, on trouve deux hyperclasses ouvertes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ telles que $X \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{V}$, $Y \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont bases-ouvertes: $\mathcal{V} = \{Z \mid Z \sim_\alpha z\}$, $\mathcal{W} = \{T \mid T \sim_\beta t\}$; pour fixer les idées, supposons $\beta \leqslant \alpha$. On vérifie alors que l'hyperclasse $\mathcal{O} = \{H \mid H_\alpha \sim_{\alpha+2} (z,t)\}$ est ouverte et répond à la question.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{U}$ soit une hyperclasse de netfcs ouverte$_I$. Soit $\mathcal{G}$ l'hyperclasse $\mathcal{U}^c \setminus \mathbb{C}^c$; $\mathcal{G}$ est fermée par hypothèse et correspond donc à un netfc G. Soit $(X,Y) \mathrel{\overline{\in}} \mathcal{U}$, on a donc $(X,Y) \mathrel{\overline{\notin}} G$ et il existe donc un ordinal α avec $(X,Y) \notin_\alpha G$. Soit $\mathcal{V} = \{A \mid A_\alpha \sim_\alpha X_\alpha\}$, $\mathcal{W} = \{B \mid B_\alpha \sim_\alpha Y_\alpha\}$, on a $(X,Y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ mais clairement $(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \cap G \approx \varnothing$ et donc $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. □

L'hyperclasse des couples étant fermée, on a qu'une hyperclasse $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ de netfcs est fermée ssi elle est fermée pour la « topologie produit »; c'est-à-dire ssi $\forall (X,Y) \mathrel{\overline{\notin}} \mathcal{A}$, il existe des hyperclasses ouvertes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ telles que $X \in \mathcal{U}$, $Y \in \mathcal{V}$ et $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \cap \mathcal{A} \approx \varnothing$.

Remarquons aussi que si l'on a une hyperclasse de netfcs $\mathcal{A}$ et si l'on définit une hyperclasse $\mathcal{B}$ en effectuant des manipulations naturelles sur les couples de $\mathcal{A}$ (permutations des composantes, projections, …), nous avons que $\mathcal{A}$ est fermée ssi $\mathcal{B}$ l'est.

Prouvons-le, à titre d'exemple, dans le cas suivant:

$$\mathcal{B} = \{(X,Y) \mid (Y,X) \in \mathcal{A}\}\,;$$

on suppose que $\mathcal{A}$ est fermée et on prouve que $\mathcal{B}$ est fermée. Soit B le netfc correspondant à la clôture de $\mathcal{B}$ et soit $(X,Y) \mathrel{\overline{\in}} B$, prouvons que $(X,Y) \in \mathcal{B}$. On a pour chaque ordinal α $(X_\alpha, Y_\alpha) \in_\alpha B_\alpha$ et il existe donc X', Y' avec $(X',Y') \in \mathcal{B}$ et $X'_\alpha \sim_\alpha X_\alpha$, $Y'_\alpha \sim_\alpha Y_\alpha$ (lemme du prolongement). Par définition $(Y',X') \in \mathcal{A}$ et si l'on appelle A le netfc correspondant à $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est fermée), on a $(Y'_\alpha, X'_\alpha) \sim_\alpha (Y_\alpha, X_\alpha) \sim_\alpha (Y,X)_\alpha \in_\alpha A_\alpha$. L'ordinal α étant arbitraire, on a $(Y,X) \in \mathcal{A}$ et donc $(X,Y) \in \mathcal{B}$ par définition de $\mathcal{B}$.

On peut voir sans difficultés que ce que l'on a dit pour les couples reste vrai pour les n-uples $(X^1, \ldots, X^n)$. On peut à présent prouver que les netfcs interprètent GPK^+.

Lemme 11.12. *Les netfcs interprètent* GPK^+ *(avec l'égalité interprétée comme étant $\approx$ et l'appartenance interprétée comme étant $\overline{\in}$).*

PREUVE. — Remarquons que si $\Gamma(X)$ est une formule sur le langage $(\overline{\in}, \approx)$, alors pour tout netfc A et B, on a $A \approx B \Rightarrow \Gamma(A) \Leftrightarrow \Gamma(B)$; ainsi il est légitime d'interpréter $\approx$ comme étant l'égalité.

L'extensionnalité a déjà été prouvée (lemme 11.8). L'axiome VIDE est trivial (puisque l'hyperclasse vide $\varnothing$ est fermée). On commence par montrer que pour toute formule $BPF = \varphi(Y^1, \ldots, Y^m, X^1, \ldots, X^n)$ dont les variables libres sont parmi $(Y^1, \ldots, Y^m, X^1, \ldots, X^n)$, on a que pour chaque $Y^1, \ldots, Y^m$, $\{(X^1, \ldots, X^m) \mid \varphi\}$ est une hyperclasse fermée de netfcs. On le fait par induction sur la complexité de φ.

▶ **φ est atomique.**

Il suffit de le montrer pour φ atomique ne contenant pas le signe $\approx$ puisque l'on a l'extensionnalité. On se contente de le montrer si φ est $X^i \mathrel{\overline{\in}} X^j$ (les autres cas $X^i \mathrel{\overline{\in}} Y^j$, $Y^i \mathrel{\overline{\in}} X^j$, $Y^i \mathrel{\overline{\in}} Y^j$ sont faciles). Afin de simplifier l'écriture, on suppose $i = 1$, $j = 2$. Soit donc $\mathcal{A} = \{(X^1, \ldots, X^n) \mid X^1 \mathrel{\overline{\in}} X^2\}$. Supposons que $(A^1, \ldots, A^n) \notin \mathcal{A}$, on a $A^1 \mathrel{\overline{\notin}} A^2$ et il existe donc un ordinal α tel que $A^1_\alpha \notin_\alpha A^2_\alpha$. Notons, si X est un netfc, $\mathcal{U}_\alpha(X)$ l'hyperclasse base-ouverte suivante $\mathcal{U}_\alpha(X) = \{H \mid H_\alpha \sim_\alpha X_\alpha\}$. L'hyperclasse

$$\mathcal{U}_\alpha(A^1) \times \mathcal{U}_\alpha(A^2) \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-2 \text{ composantes}}$$

(V désignant l'hyperclasse universelle qui est ouverte) comprend $(A^1, \dots, A^n)$ mais est disjointe de $\mathcal{A}$; ce qui prouve le résultat.

▶ φ **est de la forme** $\psi_1 \vee \psi_2$ **ou** $\psi_1 \wedge \psi_2$ **avec** ψ_1, ψ_2 *BPF*.
Ceci découle facilement du fait trivial que l'union (resp. l'intersection) de deux hyperclasses fermées de netfcs est fermée.

▶ φ **est de la forme** $\forall X \mathrel{\overline{\in}} Y \;\; \psi(X, Y, Z^1, \dots, Z^n)$ **où** ψ **est** *BPF*.
Montrons que l'hyperclasse suivante :

$$\mathcal{A} = \{(Y, Z^1, \dots, Z^n) \mid \forall X \mathrel{\overline{\in}} Y \, \psi(X, Y, Z^1, \dots, Z^n)\} \text{ est fermée.}$$

Soit $(Y, Z^1, \dots, Z^n) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $X \mathrel{\overline{\in}} Y$, montrons que $\psi(X, Y, Z^1, \dots, Z^n)$ et donc que $(Y, Z^1, \dots, Z^n) \in \mathcal{A}$. La formule ψ définissant une hyperclasse fermée par hypothèse, il suffit de montrer que toute hyperclasse de la forme

$$\mathcal{U}_\alpha(X) \times \mathcal{U}_\alpha(Y) \times \mathcal{U}_\alpha(Z^1) \times \cdots \times \mathcal{U}_\alpha(Z^n)$$

comprend un élément qui satisfait ψ. Puisque $(Y, Z^1, \dots, Z^n) \in \overline{\mathcal{A}}$, on a l'existence d'un élément

$$(Y', {Z^1}', \dots {Z^n}') \in \mathcal{U}_\alpha(Y) \times \mathcal{U}_\alpha(Z^1) \times \cdots \times \mathcal{U}_\alpha(Z^n) \cap \mathcal{A}.$$

On a clairement $X_\alpha \in_\alpha Y'_\alpha$ et en utilisant le lemme de prolongement, on trouve un netfc X' tel que $X'_\alpha \sim_\alpha X_\alpha$ et $X' \mathrel{\overline{\in}} Y'$. L'élément recherché est $(X', Y', {Z^1}', \dots, {Z^n}')$ et le résultat est prouvé.

▶ φ **est de la forme** $\exists Y \;\psi(X, Y, Z^1, \dots, Z^n)$ **où** ψ **est** *BPF*.
Afin de simplifier les notations, supposons qu'il n'y ait pas de variables Z. Montrons que l'hyperclasse suivante:

$$\mathcal{A} = \{X \mid \exists Y \;\; \psi(X, Y)\}$$

est fermée. Soit $X \in \overline{\mathcal{A}}$, on va trouver un netfc Y tel que $\psi(X, Y)$, ce qui montrera que $X \in \mathcal{A}$. Pour chaque ordinal α, on choisit un ensemble y_α tel que « il existe deux netfcs X' et H tels que $X'_\alpha \sim_\alpha X_\alpha$, $H_\alpha \sim_\alpha y_\alpha$ et $\psi(X', H)$ » (on voit que cela est possible en utilisant le fait que $X \mathrel{\overline{\in}} \overline{\mathcal{A}}$). On extrait un sous-net Y fortement Cauchy de $\langle y_\alpha \rangle$. On peut voir que toute hyperclasse ouverte comprenant (X, Y) (on peut se restreindre aux hyperclasses de la topologie produit) comprend un élément (X', Y') qui satisfait $\psi(X', Y')$. La formule ψ définissant une hyperclasse fermée, on en conclut que l'on a $\psi(X, Y)$.

Nous avons vu que les neftcs avec $\approx$ interprétée comme étant l'égalité et $\overline{\in}$ interprété comme étant l'appartenance interprètent la théorie CBPF. Puisque l'on peut prendre la clôture $\overline{\mathcal{A}}$ d'une hyperclasse $\mathcal{A}$, il n'est pas difficile de voir que cette interprétation satisfait le schéma de clôture CL. On a donc une interprétation de GPK^+; ce qui achève la preuve du lemme 11.12. □

Afin de prouver le théorème 6.1, il reste donc à vérifier que notre interprétation de GPK^+ satisfait l'axiome de l'infini.

On a le lemme suivant.

Lemme 11.13. (cfr. proposition 5.7). *Soit Γ une formule sur le langage $(\overline{\in}, \approx)$ dont chaque quantificateur prend l'une des formes suivantes: $\forall X \mathrel{\overline{\in}} Y$, $\exists X \mathrel{\overline{\in}} Y$, $\forall X \mathrel{\overline{\subset}} Y$, $\exists X \mathrel{\overline{\subset}} Y$ et soit $X^1, \ldots, X^n \in \mathcal{KM}$, alors si l'on note $x^1, \ldots, x^n$ les ensembles correspondant aux netfcs $X^1, \ldots, X^n$, on a $\Gamma(X^1, \ldots, X^n) \Leftrightarrow \Gamma'(x^1, \ldots, x^n)$ où Γ' est obtenue à partir de Γ en remplaçant $\approx$ par $=$ et $\overline{\in}$ par $\in$.*

PREUVE. — Elle se fait facilement sur la complexité de Γ en utilisant le lemme 11.5. □

Prouvons à présent que les netfcs qui sont bien fondés au sens de GPK^+_∞ sont exactement ceux de $\mathcal{KM}$; ce à quoi on pouvait s'attendre.

Si X est un netfc, $\mathrm{trcl}(X)$ désigne la clôture transitive de X (celle-ci existe puisque l'on est dans une interprétation de GPK^+). On voit que si $X \in \mathcal{KM}$, alors $\mathrm{trcl}(X) \in \mathcal{KM}$; de plus, dans ce cas, on a que $\mathrm{trcl}(X)$ est le netfc correspondant à $\mathrm{trcl}(x)$ où x est l'ensemble correspondant au netfc X.

Lemme 11.14. *Les netfcs bien fondés de notre interprétation de GPK^+_∞ sont exactement les netfcs de $\mathcal{KM}$.*

PREUVE. — Soit X un netfc finalement égal à x. On doit montrer que $\forall Y \mathrel{\overline{\ni}} X \quad \exists Y' \mathrel{\overline{\in}} Y \quad Y' \mathrel{\overline{\cap}} Y = \varnothing$. Soit donc $Y \mathrel{\overline{\ni}} X$ et considérons $\mathrm{trcl}(X) \mathrel{\overline{\cap}} Y$. Chaque élément de $\mathrm{trcl}(X) \mathrel{\overline{\cap}} Y$ est dans $\mathcal{KM}$. Soit Y' un tel élément de rang minimum (le rang d'un netfc de $\mathcal{KM}$ est le rang de l'ensemble correspondant). On a $Y' \mathrel{\overline{\cap}} Y = \varnothing$ car sinon Y' ne serait pas de rang minimum.

Réciproquement, soit X un netfc qui n'est pas dans $\mathcal{KM}$. Montrons que $\exists Y \overline{\ni} X \quad \forall Y' \overline{\in} Y \; Y' \overline{\cap} Y \neq \varnothing$. Soit KM^c le netfc correspondant au complément de $\mathcal{KM}$ (on voit facilement que $\mathcal{KM}$ est une hyperclasse ouverte de netfcs). Soit $Y = \mathrm{trcl}(X) \overline{\cap} \mathrm{KM}^c$. Soit $Y' \overline{\in} Y$, en utilisant le lemme 11.5, on trouve un $Z \in Y' \overline{\cap} \mathrm{KM}^c$, on a $Z \in \mathrm{trcl}(X)$ et donc $Y' \overline{\cap} Y \neq \varnothing$. □

Corollaire 11.15.
Les ordinaux de notre théorie de base KM *sont exactement (les ensembles correspondant aux) ordinaux de notre interprétation de* GPK^+_∞.

PREUVE. — On sait que dans GPK^+_∞, tout ordinal est bien fondé et on utilise le lemme 11.13 ainsi que la proposition 11.14. □

On peut voir maintenant que notre interprétation satisfait l'axiome de l'infini: le netfc ω^N correspondant à l'ordinal ω (les nombres entiers positifs) satisfait la formule suivante sur le langage $(\overline{\in}, \approx)$: « ω^N est un ordinal limite ». Ceci termine la preuve du théorème 11.1.

Essayons à présent à présent de voir ce qui se passe dans le cas où l'axiome de l'infini est retiré. On va montrer le théorème suivant:

Théorème 11.1'. *La théorie* GPK^+ *est mutuellement interprétable avec* PA_2, *l'arithmétique du second ordre.*

PREUVE. — Il est connu que $\mathrm{KM}_{-\infty}$ est mutuellement interprétable avec PA_2. Nous montrerons donc GPK^+ est mutuellement interprétable avec $\mathrm{KM}_{-\infty}$. Le fait GPK^+ interprète $\mathrm{KM}_{-\infty}$ est une adaptation triviale des résultats du chapitre 6 (remarquer que pour prouver que GPK^+_∞ interprète KM, on a utilisé l'axiome de l'infini uniquement pour prouver qu'il est satisfait dans KM).

Il nous reste à montrer qu'il est possible d'interpréter GPK^+ dans $\mathrm{KM}_{-\infty}$.

On commence par interpréter dans $\mathrm{KM}_{-\infty}$, la théorie $\mathrm{KM}_{-\infty} + \neg\mathrm{INF}$. ($\neg\mathrm{INF}$ étant la négation de l'axiome de l'infini), ce qui est clairement faisable.

On montre ensuite, que dans $\mathrm{KM}_{-\infty}$, on a:

$$\neg\mathrm{INF} \Rightarrow \mathit{On} \text{ « est ramifiable ».}$$

C'est une adaptation évidente du lemme de König.

On remarque enfin que, pour construire l'interprétation de GPK_∞^+ dans KM, on a utilisé l'axiome de l'infini uniquement pour prouver qu'il est satisfait dans GPK_∞^+. Ceci clôture la preuve du théorème 11.1′. □

Chapitre 12

Un théorème de point fixe

Dans ce chapitre, nous nous proposons de donner un théorème de point fixe prouvable dans GPK^+.

Nous nous proposons de montrer que toute fonction monotone a un point fixe. Ce théorème est inspiré d'un théorème analogue valable dans les hyperunivers ([17], th. 4.1).

Soit f une fonction, on dit que f est monotone ssi $(\forall x, y \in \mathrm{dom}(f))$ $(x \subset y \Rightarrow f(x) \subset f(y))$.

Théorème 12.1. *Toute fonction f monotone a un point fixe.*

Preuve. — Considérons *l'ensemble* suivant: $d = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid x \subset f(x)\}$ (d est un ensemble car défini par une formule *BPF*). Remarquons que si $x \in d$, $f(x) \in d$. L'ensemble d jouit de la propriété suivante :

$$(\forall a \subset d) \bigcup a \in d. \qquad (\star)$$

Afin de prouver $(\star)$, soit $a \subset d$. Si $x \in a$, on a par définition $x \subset f(x)$. On a aussi $f(x) \subset f(\bigcup a)$ car $x \subset \bigcup a$ et que f est monotone. On a donc $x \subset f(\bigcup a)$. L'ensemble $x \in a$ étant arbitraire, on en conclut $\bigcup a \subset f(\bigcup a)$ et donc $\bigcup a \in d$; ce qui prouve $(\star)$. Soit b un élément de d. Définissons une fonctionnelle G de domaine On et prenant ses valeurs dans d.

$$\begin{cases} G(0) = b \\ G(\alpha+1) = f(G(\alpha)) \\ G(\lambda) = \bigcup\limits_{\beta<\lambda} G(\beta) \qquad \text{pour } \lambda \text{ limite.} \end{cases}$$

Il est clair que G est croissante: $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow G(\alpha) \subset G(\beta)$.

Si G n'est pas injective, alors le théorème est prouvé; en effet, supposons que $\alpha < \beta$ et que $G(\alpha) = G(\beta)$. On a $G(\alpha) \subset G(\alpha+1) \subset G(\beta)$, ce qui donne $G(\alpha) = G(\alpha+1) = f(G(\alpha))$; et donc $G(\alpha)$ est un point fixe de f et le théorème 12.1 est prouvé.

Supposons donc que G soit injective et notons $I = \mathrm{im}(G)$. La classe I a un point d'accumulation; en effet, dans le cas contraire, I serait un ensemble discret et on en conclurait que G^{-1} est un ensemble (proposition 3.5) et donc aussi $\mathrm{im}(G^{-1}) = On$, ce qui est faux.

Soit i un point d'accumulation de I. On va montrer que $i = f(i)$, ce qui achèvera la preuve.

- $i \subset f(i)$:
  On sait que $I \subset d$ et donc aussi $\overline{I} \subset d$; ce qui donne $i \in d$ et ce qui prouve le résultat.
- $f(i) \subset i$:
  Soit α un ordinal et considérons la classe $I' = I \setminus \big\{G(\beta) \bigm| \beta \leqslant \alpha\big\}$. Il est clair que i est un point d'accumulation de I'. Clairement, $\forall x \in I' \;\; G(\alpha) \subset x$ (car G est croissante). On a donc $I' \subset \{x \mid G(\alpha) \subset x\}$, cette dernière classe étant un ensemble, on a aussi $\overline{I'} \subset \{x \mid G(\alpha) \subset x\}$; ce qui donne $G(\alpha) \subset i$. L'ordinal α étant arbitraire, on a donc prouvé
  $$\forall \alpha \in On \quad G(\alpha) \subset i \tag{$\star\star$}$$
  À présent, on a
  $$\begin{aligned} f(i) &\in \big\{f(x) \bigm| x \in \overline{I}\big\} \\ &= \overline{\big\{f(x) \bigm| x \in I\big\}} && \text{(lemme 3.4)} \\ &\subset \overline{\big\{G(\alpha) \bigm| \alpha \in On\big\}} && (\text{car } \forall \alpha \in On \; f(G(\alpha)) = G(\alpha+1) \in I) \\ &\subset \overline{\{x \mid x \subset i\}} && \text{(en utilisant } (\star\star)) \\ &= \{x \mid x \subset i\} && (\text{car } \{x \mid x \subset i\} = \mathcal{P}i \text{ est un ensemble}). \end{aligned}$$
  Ceci montre que $f(i) \subset i$ et termine la preuve. □

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 13

Quelques mots sur les décorations de graphes

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques mots sur les décorations de graphes (c'est-à-dire les « dessins » d'ensembles); ceci dans GPK$^+$ (en fait GPK suffit).

Donnons d'abord quelques définitions.

Un graphe g est un ensemble de couples (c'est-à-dire une relation).

Étant donné un graphe g, l'*ensemble* $\{x \mid \exists y(x,y) \in g\} \cup \{y \mid \exists x(x,y) \in g\}$ sera appelé l'ensemble des nœuds du graphe (c'est l'ensemble sur lequel la relation g est définie); celui-ci sera noté $n(g)$. Étant donné un graphe g, on note $x \to y$ pour $(x,y) \in g$.

Une décoration d'un graphe g est une fonction d de domaine $n(g)$ vérifiant la condition suivante $d(x) = \{d(y) \mid x \to y\}$. Intuitivement d remplace les flèches du graphe par la relation « avoir pour élément » (pas nécessairement de manière injective).

Considérons l'axiome d'antifondation AFA (introduit par P. Aczel [1]).

AFA: *Tout graphe a une unique décoration.*

Cet axiome signifie intuitivement que tout ensemble que l'on peut dessiner existe de manière unique.

Dans ZF_0 (c'est-à-dire ZF sans l'axiome de fondement), celui-ci est équivalent à l'axiome X_1 introduit par M. Forti et F. Honsell ([12]).

X_1: Pour tout ensemble a et pour toute fonction $f : a \to \mathcal{P}a$, il existe une unique fonction d de domaine a telle que $\forall x \in a \;\; d(x) = \{d(y) | y \in f(x)\}$.

Nous verrons que dans GPK, l'axiome AFA est faux; nous montrerons qu'il existe un graphe de GPK n'admettant aucune décoration. Ceci signifie que, bien qu'il y ait plusieurs ensembles non bien-fondés dans GPK (tel l'univers); on ne peut pas les avoir tous. Par contre, l'axiome X_1 est consistant avec GPK_∞^+ (ceci a été montré par M. Forti et F. Honsell [14] en supposant l'existence d'un cardinal fortement inaccessible et ramifiable).

En fait, étant donné un graphe g, la fonction f définie sur l'ensemble des nœuds du graphe: $f(x) = \{y \mid x \to y\}$, qui intervient dans l'axiome X_1, pourrait ne pas être un ensemble; c'est-à-dire ne pas exister dans GPK. C'est ce qui se passe dans le graphe de la proposition suivante.

Proposition 13.1. *Il existe un graphe n'admettant aucune décoration.*

PREUVE. — Soit g le graphe suivant:

$$\begin{aligned} n(g) &= \overline{On} \cup \{\{\{\varnothing\}\}\} \\ g &= \{(x,y) \mid x \in n(g) \land y \in n(g) \land y \in x\} \cup \{(\overline{On}, \{\{\varnothing\}\})\} \end{aligned}$$

(il est clair que g est un ensemble).

Supposons qu'il existe une décoration d de ce graphe. On vérifie aisément, par induction, que $(\forall \alpha \in On)\; d(\alpha) = \alpha$. On a aussi $d(\{\{\varnothing\}\}) = \{\{\varnothing\}\}$. On a donc

$$d(\overline{On}) = On \cup \{\{\{\varnothing\}\}, d(\overline{On})\}\,. \qquad (\star)$$

Comme $On \subset d(\overline{On})$ et que $d(\overline{On})$ est un ensemble, on a $\overline{On} \subset d(\overline{On})$. Ce qui donne $\overline{On} \in d(\overline{On})$ puisque $\overline{On} \in \overline{On}$. En utilisant $(\star)$, on en conclut que $\overline{On} = d(\overline{On})$. Mais ceci est impossible car on a $\{\{\varnothing\}\} \in d(\overline{On})$ et $\{\{\varnothing\}\} \notin \overline{On}$. □

Cahiers du Centre de logique
Volume 13

Chapitre 14

Points fixes d'opérateurs dans KM et dans GB

Dans ce chapitre, on se place dans KMAC (La théorie de Kelley-Morse avec l'axiome du choix global). L'axiome de fondement n'est pas nécessaire. Si l'on ne prend pas l'axiome de fondement, l'axiome AC doit être énoncé de la manière suivante:

AC: *il existe une bijection entre* V *et* On.

La propriété de point fixe, décrite dans le chapitre 12, est une propriété qui est aussi valable dans KMAC, à certains conditions. Nous verrons brièvement que dans GB, cette propriété n'est plus vraie.

Dans KM, comme dans GB, on maniera des hyperclasses (c'est-à-dire des collections *définissables* de classes). Celles-ci sont maniées de la même façon que l'on manie des classes dans ZF.

On appelle opérateur une hyperclasse $\mathcal{F}$ telle que $\forall X\, \exists! Y\ \ (X, Y) \in \mathcal{F}$. Moyennant une définition appropriée, un couple de classes est une classe (voir annexe, paragraphe 2). $\mathcal{F}$ est donc bien une hyperclasse. On note naturellement $Y = \mathcal{F}(X)$ pour $(X, Y) \in \mathcal{F}$. L'opérateur $\mathcal{F}$ est dit monotone ssi $\forall X\ \forall Y\ \ X \subset Y \Rightarrow \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}(Y)$. Il est possible, dans KMAC, de montrer que tout opérateur a un point fixe.

Soit R une classe et $<$ une relation d'ordre strict définie sur R. La relation $<$ est dite être une relation de bon ordre si toute sous-classe non vide (de manière équivalente tout sous-ensemble non vide) de R admet un élément minimum (on ne demande pas que $\forall x\ \{y \mid y < x\}$ soit un ensemble). Il est possible de montrer que les bons ordres se comportent comme des ordinaux (entre autres, on peut montrer qu'il est possible de faire des démonstrations par induction sur les bons ordres). Ceci est assez technique et ne sera pas fait ici (voir, par exemple, [23]).

Voici, en gros, une manière d'obtenir un point fixe pour $\mathcal{F}$. On définit, par induction, sur les bons ordres

$$\begin{array}{rcll} J^0 & = & V & \text{où } V \text{ est la classe universelle} \\ J^{R+1} & = & \mathcal{F}(J^R) & \text{où } R \text{ est un bon ordre} \\ J^L & = & \bigcup\limits_{R<L} \mathcal{F}(J^R) & \text{où } L \text{ est un bon ordre limite.} \end{array}$$

On montre que $\bigcup\limits_{R\in\mathcal{BO}} J^R$ ($\mathcal{BO}$ étant l'hyperclasse des bons ordres) est un point fixe de $\mathcal{F}$ (c'est en fait le plus grand point fixe). Il faut remarquer qu'il est nécessaire de définir J^R pour tout bon ordre R et pas seulement pour tout ordinal. À titre d'exemple, donnons un opérateur $\mathcal{F}$ tel que $\bigcup\limits_{\alpha\in On} J^\alpha$ n'est pas un point fixe de $\mathcal{F}$ (les J^α étant définis comme précédemment).

On commence par définir une classe $(B, <_B)$ bien ordonnée dont le « type d'ordre est $On + 1$ ». Soit u un ensemble quelconque qui n'est pas un ordinal.

$$\begin{array}{l} B = On \cup \{u\} \\ <_B = \big\{(x,y) \bigm| x \in On \wedge y \in B \wedge (x \in y \vee y = u)\big\}\,. \end{array}$$

On définit $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(X) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{lll} X & \text{si} & X \cap B = \varnothing \\ X \setminus \min(X \cap B) & \text{si} & X \cap B \neq \varnothing \end{array} \right.$$

(min désigne le minimum au sens de $<_B$).

On vérifie sans peine que $\bigcup\limits_{\alpha\in On} J^\alpha = V \setminus On$ et que $\mathcal{F}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in On} J^\alpha\right) = V \setminus B$ (en fait le processus « s'arrête » à $On + 1$). On se propose à présent de donner un opérateur $\mathcal{F}$ monotone tel que GB $\nvdash \mathcal{F}$ a un point fixe.

Théorème 14.1. *Il existe un opérateur* $\mathcal{F}$ *monotone tel que* GB $\nvDash$ « $\mathcal{F}$ *a un point fixe* ».

PREUVE. — On commence par définir *à l'intérieur de* GB la notion de formules sans paramètres de manière habituelle. On utilise la barre de Sheffer $|$ comme seul connecteur propositionnel (rappel: $\Gamma\ |\Delta$ signifie $\neg\Gamma \vee \neg\ \Delta$); ce qui permettra d'alléger quelque peu l'écriture. Par définition, une formule ayant pour variables libres $(x_1, \ldots, x_n)$ et pour paramètres $a_1, \ldots, a_m$ ($a_1, \ldots, a_m$ étant des ensembles) est un couple $(\Gamma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), f)$ où Γ est une formule sans paramètres ayant pour variables libres $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ et où f est une fonction de domaine $\{y_1, \ldots, y_m\}$ tel que $\forall i \in \{1 \ldots m\}\ f(y_i) = a_i$. Une telle formule sera notée $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$. Remarquons que les formules à paramètres forment une classe propre, cette classe sera notée *Frm*; on notera $\mathit{Frm}(\Gamma)$ pour $\Gamma \in \mathit{Frm}$. Un énoncé est une formule concrète (on le définit dans le métalangage). A chaque énoncé $\mathcal{E}$ (avec paramètres) correspond une formule que l'on note $\ulcorner\mathcal{E}\urcorner$. Sauf mention contraire, tous les énoncés et formules sont avec paramètres.

Soit $\mathcal{T}$ un énoncé prédicatif qui définit la vérité pour les formules atomiques prédicatives (cfr annexe pour la définition des formules prédicatives). De manière précise, on demande que pour chaque énoncé $\mathcal{E}$ prédicatif atomique avec paramètres, on ait: GB $\vDash (\mathcal{T}(\ulcorner\mathcal{E}\urcorner) \Leftrightarrow \mathcal{E})$ (il est connu qu'un tel énoncé existe).

Soit *Vr* la classe suivante:

$$\begin{aligned} \mathit{Vr} &= \big\{(\Gamma, 1) \bigm| \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ est atomique} \wedge \mathcal{T}(\Gamma)\big\} \\ &\cup \big\{(\Gamma, 0) \bigm| \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ est atomique} \wedge \neg\mathcal{T}(\Gamma)\big\}\,. \end{aligned}$$

On définit à présent un opérateur $\mathcal{F}_1$ monotone:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X) &= \{(\forall x\ \Gamma, 1) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge\ \Gamma \text{ a une variable libre } x \\ &\qquad \wedge \forall a\ (\Gamma(a), 1) \in X\} \\ &\cup \{(\forall x\ \Gamma, 0) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge\ \Gamma \text{ a une variable libre } x \\ &\qquad \wedge \exists a\ (\Gamma(a), 0) \in X\} \\ &\cup \{(\Gamma\ |\Delta, 1) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge\ \mathit{Frm}(\Delta) \\ &\qquad \wedge \Gamma, \Delta \text{ sont sans variables libres} \\ &\qquad \wedge\ ((\Gamma, 0) \in X \vee (\Delta, 0) \in X)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cup\ & \{(\Gamma\,|\Delta,0) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \mathit{Frm}(\Delta) \\
& \qquad \wedge\ \Gamma,\Delta \text{ sont sans variables libres} \\
& \qquad \wedge\ (\Gamma,1) \in X \wedge (\Delta,1) \in X\} \\
\cup\ & X \cup \mathit{Vr}.
\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que, pour toute classe X, $\mathcal{F}_1(X)$ est bien une classe.

Soit Fa la classe suivante :

$$\begin{aligned}
\mathit{Fa} \quad = \quad & \big\{(\Gamma,0) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ est atomique} \wedge \mathcal{T}(\Gamma)\big\} \\
\cup\ & \big\{(\Gamma,1) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ est atomique} \wedge \neg\mathcal{T}(\Gamma)\big\}\,.
\end{aligned}$$

Définissons à présent un opérateur $\mathcal{F}_2$ monotone :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(X) \ = \ X \quad \setminus \quad & [\{(\forall x\ \Gamma,0) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ a une variable libre } x \\
& \qquad \wedge\ \forall a(\Gamma(a),1) \in X\} \\
\cup\ & \{(\forall x\ \Gamma,1) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \Gamma \text{ a une variable libre } x \\
& \qquad \wedge\ \exists a(\Gamma(a),0) \in X\} \\
\cup\ & \{(\Gamma|\ \Delta,0) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \mathit{Frm}(\Delta) \\
& \qquad \wedge\ \Gamma,\Delta \text{ sont sans variables libres} \\
& \qquad \wedge\ ((\Gamma,0) \in X \vee (\Delta,0) \in X\} \\
\cup\ & \{(\Gamma\,|\Delta,1) \mid \mathit{Frm}(\Gamma) \wedge \mathit{Frm}(\Delta) \\
& \qquad \wedge\ \Gamma,\Delta \text{ sont sans variables libres} \\
& \qquad \wedge\ (\Gamma,1) \in X \wedge (\Delta,1) \in X\} \\
\cup\ & \mathit{Fa}].
\end{aligned}$$

Comme pour $\mathcal{F}_1$, on vérifie que pour toute classe X, $\mathcal{F}_2(X)$ est une classe. On définit à présent l'opérateur monotone $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$. On vérifie sans trop de peine que si I est un point fixe de $\mathcal{F}$, alors pour chaque énoncé prédicatif $\mathcal{E}$, on a

$$\mathrm{GB} \vDash \big(\mathcal{E} \Leftrightarrow \big(\ulcorner\mathcal{E}\urcorner,1\big) \in I\big)\,.$$

La classe I permettrait de prouver la consistance de GB à l'intérieur de GB. La classe I ne peut donc pas exister et on en conclut que GB $\nvDash$ « F a un point fixe ». □

Remarque. Si l'on se place dans Kelley-Morse, on voit que J^ω (ω étant l'ensemble des ordinaux finis), comme défini au début de ce chapitre, est un point fixe de l'opérateur $\mathcal{F}$. Le problème est que, dans GB, les classes J^n où n est un naturel ne sont pas définissables.

Annexe

Dans cette annexe, nous rappelons quelques définitions et propositions connues dont la connaissance est nécessaire à la compréhension de cet ouvrage. En général, nous ne donnerons pas de démonstrations mais nous donnerons les références ou celles-ci peuvent être trouvées.

A.1. La théorie de Zermelo-Fraenkel (ZF)

La théorie de Zermelo-Fraenkel est la théorie usuelle des ensembles. Le langage de cette théorie est $(\in, =)$ ($\in$ étant un symbole de relation binaire représentant l'appartenance entre deux ensembles, $=$ étant le symbole d'égalité). Les objets de cette théorie sont appelés ensembles. Les axiomes de cette théorie sont:

- Extensionnalité:

$$\forall x \quad \forall y \quad [\forall z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y] \, .$$

- Réunion:

$$\forall x \quad \exists y \; \forall z \quad [z \in y \Leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t)] \, .$$

- Ensemble des parties:

$$\forall x \quad \exists y \; \forall z \quad [z \in y \Leftrightarrow z \subset x] \, .$$

- **Schéma d'axiomes de remplacement:**

$$\begin{aligned}&\forall x_1 \ldots \forall x_k\\&\quad \{\forall x \forall y \forall y' [\Gamma(x, y, x_1, \ldots, x_k) \wedge \Gamma(x, y', x_1, \ldots, x_k) \Rightarrow \; y = y']\\&\quad \Rightarrow \;\; \forall t \; \exists w \;\; \forall v \;\; [v \in w \Leftrightarrow \exists \; u \; [u \in t \wedge \Gamma(u, v, x_1, \ldots, x_k)]]\}\end{aligned}$$

pour chaque formule Γ dont les variables libres sont parmi $x, y, x_1, \ldots, x_k$ (Γ doit avoir au moins deux variables libres x et y).

- **Infini:**

$$\exists x \;\; (\varnothing \in x \wedge \forall y \;\; (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

($\varnothing$ désignant l'ensemble vide).

- **Fondement:**

$$\forall x \;\; [x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \;\; (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)] \, .$$

À cette théorie, on peut ajouter l'axiome du choix (AC) pour avoir ZFC:

$$\begin{aligned}\text{AC:} \quad \forall x \; \exists f (&f \text{ est une fonction de domaine } x\\&\wedge (\forall y \in x) \, (y \neq \varnothing \Rightarrow f(y) \in y)),\end{aligned}$$

la notion de fonction étant définie de manière habituelle.

La théorie ZF à laquelle on a supprimé l'axiome de fondement sera notée ZF_0.
Pour de plus amples informations concernant la théorie ZF ainsi que pour les théorèmes classiques concernant cette théorie, nous nous référons à l'ouvrage [22].

A.2. Les théories de Gödel-Bernays et de Kelley-Morse

La théorie de Gödel-Bernays (GB), introduite par K. Gödel [19], consiste intuitivement en la théorie ZF à laquelle on a ajouté les classes comme objets. Le langage de GB est le même que celui de ZF: $(\in, =)$. Les objets de la théorie sont appelés « classes ». On définit le prédicat unaire $V(X)$ de la manière suivante $V(X) \Leftrightarrow \exists Y \; X \in Y$ ($V(X)$ signifie intuitivement « X est un ensemble »). Une classe A qui n'est pas un ensemble, c'est-à-dire qui satisfait $\neg V(A)$ est appelée classe propre. En général, on note les classes par des lettres majuscules et les ensembles par des lettres minuscules. Les formules dont tous les quantificateurs sont restreints à $\{x | V(x)\}$ (c'est-à-dire apparaissant sous l'une des formes suivantes: $\forall X\ (V(X) \Rightarrow \Gamma)$ ou $\exists X\ (V(X) \wedge \Gamma)$ où Γ représente une formule sont appelées formules prédicatives . Les axiomes de GB sont:

- **Extensionnalité pour les classes:**

$$\forall X\, \forall Y\ [\forall z\ (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y]\,.$$

- **Schéma d'axiomes de compréhension pour les classes:**

$$\forall A_1 \ldots \forall A_n\, \exists X\, \forall y\, (V(y) \Rightarrow (y \in X \Leftrightarrow \Gamma(y, A_1, \ldots, A_n))$$

  pour chaque formule *prédicative* dont les variables libres sont parmi $y, A_1, \ldots, A_n$.

- Les axiomes de la réunion, de l'ensemble des parties, de l'infini et de fondement (tel qu'ils sont énoncés pour ZF) où l'on restreint tous les quantificateurs aux ensembles, c'est-à-dire à $\{x | V(x)\}$.

- **L'axiome (unique) de remplacement:**

$$\forall F\, (F \text{ est une fonction } \Rightarrow \forall t\, \exists w\, \forall v\ (v \in w \Leftrightarrow \exists u\, (u \in t \wedge (u, v) \in F)).$$

La notion de fonction étant définie de manière habituelle, une fonction est une classe F de couples telle que $\forall x\, \exists! y\ (x, y) \in F$. On écrit $y = F(x)$ pour $(x, y) \in F$ (remarquer que les fonctions peuvent être des classes propres).

À cette théorie, on peut ajouter l'axiome du choix. Généralement, on ajoute l'axiome du choix global, que l'on note AC_G ou simplement AC, qui s'énonce comme suit:

$$\mathrm{AC}_G : \quad \exists F\, (F \text{ est une fonction } \wedge (\forall x \neq \varnothing)\, F(x) \in x).$$

On prouve que cet axiome est équivalent à l'existence d'une bijection entre V (la classe de tous les ensembles: $V = \{x \mid V(x)\}$) et On (la classe des ordinaux) (remarquons que ceci n'est plus vrai si l'on ne dispose pas de l'axiome de fondement). Cette dernière remarque permet de voir qu'il est possible de « choisir » des éléments dans des classes propres (à l'aide de AC_G).

Il est connu que tout théorème de GB (resp. $\mathrm{GB} + \mathrm{AC}_G$) *ne mentionnant que des ensembles* est prouvable dans ZF (resp. ZF + AC) et vice-versa. Les théories ZF et GB sont donc équiconsistantes.

Il est également connu que GB est finiment axiomatisable (voir par exemple [19]). Dans GB, on remarque qu'il est possible de représenter des « couples » de classes par des classes: si A et B sont deux classes, on définit

$$(A, B) \stackrel{\text{déf}}{=} (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}),$$

le produit $\times$ étant le produit cartésien habituel (faisant intervenir la notion *habituelle* de couples).

Il est également possible de définir des « fonctions » qui envoient des ensembles sur des classes. Dans cette optique, on appelle fonctionnelle un couple (D, R) où D est une classe et R une relation (c'est-à-dire une classe de couples) telle que $R \subset D \times D$. Si $F = (D, R)$ est une fonctionnelle, la classe $\{y \mid (x, y) \in R\}$ sera notée $F(x)$ pour chaque $x \in D$; D représente donc le domaine de la fonctionnelle F et on note $D = \mathrm{dom}(F)$. Remarquer que si l'on inclut pas D dans la définition de F, on ne saurait distinguer un ensemble $x \notin \mathrm{dom}(F)$ d'un ensemble $x \in \mathrm{dom}(F)$ satisfaisant $F(x) = \varnothing$.

La théorie de Kelley-Morse (KM) est une extension de GB. Ses axiomes s'obtiennent à partir de ceux de GB en étendant le schéma de compréhension pour les classes aux formules quelconques. Contrairement à GB, KM n'est pas finiment axiomatisable. On montre également que KM prouve la consistance de ZF (et donc de GB) (ceci figure entre les lignes dans [25]).

Le lecteur pourra trouver un survol des théories de Gödel-Bernays et de Kelley-Morse dans [18], ch. II, §7.

A.3. La notion de ramifiabilité pour les cardinaux de ZFC

Dans cette section, on rappelle quelques notions concernant les cardinaux dont il est fait mention dans cet ouvrage. Le lecteur pourra trouver des informations supplémentaires dans [2], ch. B3. On se place dans ZF.

Étant donné un cardinal κ, un ensemble a est dit κ-fini ssi $\#a < \kappa$ ($\#a$ désignant le cardinal de a). Il est dit κ-infini s'il n'est pas κ-fini.

Un cardinal κ est dit fortement inaccessible ssi

(a) κ est régulier: toute union κ-finie de cardinaux κ-finis est κ-finie. De manière précise, ceci donne:

$$\forall f\,\forall\alpha[(\text{« } f \text{ est une fonction »} \;\wedge On(\alpha) \wedge \alpha < \kappa \\ \wedge \operatorname{dom}(f) = \alpha \wedge (\operatorname{im}(f)) \subset \kappa) \Rightarrow \bigcup \operatorname{im}(f) < \kappa]$$

(la formule $On(\alpha)$ signifie « α est un ordinal »).

(b) $(\forall\alpha < \kappa)\, 2^\alpha < \kappa$ (2^α étant le cardinal de $\mathcal{P}_\alpha$)

On remarque que ω (l'ensemble des naturels, c'est-à-dire des ordinaux finis) est fortement inaccessible. On voit que si κ est un cardinal fortement inaccessible $> \omega$, $(R_{\kappa+1}, \in)$ [1] est un modèle de la théorie de Kelley-Morse. Cette dernière théorie prouvant la consistance de ZF, on en déduit, par le second théorème d'incomplétude de Gödel, que l'on ne peut déduire la consistance de ZFC + « $\exists\kappa$ fortement inaccessible $> \omega$ » à partir de celle de ZFC. A fortiori, on ne peut pas non plus prouver l'existence d'un cardinal inaccessible dans ZFC.

On va définir la notion de ramifiabilité d'un cardinal κ fortement inaccessible. Intuitivement, les cardinaux ramifiables sont des cardinaux « très grands ». Commençons par définir la notion d'arbre.

Définition. Un arbre *est un couple $(T, <_T)$ (ou par abus de langage T) où T est un ensemble et $<_T$ une relation (c'est-à-dire un ensemble de couples) satisfaisant $<_T \subset T \times T$ et telle que:*

(a) *$<_T$ est une relation d'ordre partiel strict sur T:*

$$\forall a \in T \quad \neg(a <_T a)$$
$$\forall a \in T \quad \forall b \in T \quad \forall c \in T \quad (a <_T b \wedge b <_T c) \Rightarrow a <_T c$$
$$\neg(a <_T b \wedge b <_T a).$$

(b) *T a un élément minimum [2] a pour $<_T$ appelé la racine de l'arbre*

1. $R_{\kappa+1}$ étant l'ensemble des ensembles de rang $\leqslant \kappa + 1$
2. C'est-à-dire $\forall x \in T \;\; a \leqslant_T x$, où $a \leqslant_T x$ signifie $a <_T x \vee a = x$.

(c) *$\forall a \in T$ l'ensemble $\{x \mid x <_T a\}$ est bien ordonné par $<_T$.*

Les éléments de T sont appelés les nœuds de l'arbre. Voici quelques définitions concernant les arbres:

- Une branche est un sous-ensemble bien ordonné de T.
- La longueur d'une branche est l'ordinal du bon ordre de la branche.
- Un successeur d'une branche $B \subset T$ est un nœud $a \in T$ tel que
  (a) $a \notin B$
  (b) $B \subset \{y \mid y <_T a\}$
  Un nœud a de T est dit successeur immédiat de la branche B si on a l'égalité dans (b).
- Un successeur (resp. successeur immédiat) d'un nœud $a \in T$ est un successeur (resp. successeur immédiat) de la branche suivante: $\{x \mid x \leqslant_T a\}$.
- Si $a \in T$, le niveau de x est la longueur de la branche $\{x \mid x <_T a\}$. L'ensemble des éléments de niveau α ($\alpha \in On$) est appelé le α-ième niveau de T et est généralement noté T_α.
- La hauteur d'un arbre T est l'ordinal $\sup\{\text{niv}(x) \mid x \in T\}$ ($\text{niv}(x)$ est le niveau de x).

Un arbre $(S, \leqslant_S)$ est dit binaire si

(a) Tout élément de S a au plus deux successeurs immédiats.
(b) Toute branche dont la longueur est un ordinal limite a au plus un successeur immédiat.

Définition. *Un cardinal fortement inaccessible κ est dit* ramifiable [3] *ssi tout arbre κ-infini dont chaque niveau est κ-fini admet une branche κ-infinie.*

On remarque sans peine que dans la définition précédente, on peut remplacer « arbre κ-infini » par « arbre de hauteur κ ». On remarque aussi que ω est ramifiable (lemme de König).

3. Certains auteurs disent que κ a la propriété de l'arbre ou la « tree property ».

L'existence d'un cardinal ramifiable est une propriété très forte. On montre que si κ est un cardinal ramifiable, alors κ est le κ-ième cardinal inaccessible (pour une preuve, voir [2], ch.B3). (Dans cet ouvrage, nous avons utilisé une adaptation de cette propriété).

A.4. Les théories non finiment axiomatisables

Dans cette section, nous présentons un théorème permettant de prouver facilement que beaucoup de théories sont non finiment axiomatisables. Nous l'avons utilisé, au chapitre 8, pour montrer que GPK^+ n'est pas finiment axiomatisable.

Ce théorème est dû à R. Montague [24] (l'article de R. Montague a omis de mentionner quelques références importantes utilisées pour prouver ce théorème. Le lecteur pourra les trouver dans le commentaire de cet article par G. Kreisel dans *Mathematical Reviews*, vol. 27-1, 38 (1964)).

Le théorème de R. Montague dit, en gros, que pour qu'une théorie ne soit pas finiment axiomatisable, il suffit de pouvoir définir, à l'intérieur de la théorie, les suites finies d'éléments de la théorie de manière satisfaisante.

Soit T une théorie du premier ordre. Si $\Gamma(x)$ est une formule à une variable libre x (donc sans paramètres), la collection suivante de T : $\{x \mid \Gamma(x)\}$ sera appelée « classe ». L'usage de classes doit être considéré comme une façon de parler, pour être rigoureux il faudrait parler uniquement de formules.

De la même manière, on parlera de fonctionnelle n-aire. Celles-ci correspondent à des formules à $n+1$ variables libres $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, y)$ satisfaisant:

$$T \vDash \forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \Gamma(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Dans ces conditions, on dira que $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, y)$ définit une fonctionnelle n-aire F et on écrira $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ au lieu de $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Théorème 14.2. ([24]).
Soit T une théorie consistante dont le langage comprend un nombre fini de constantes, de symboles relationnels et fonctionnels. Supposons que l'on puisse définir une classe I, une fonctionnelle unaire $\langle \ \rangle$ et une

fonctionnelle binaire $\frown$ *telles que* T *prouve les affirmations suivantes:*

(a) $\forall u \, \exists x \in I \quad \langle u \rangle = x$
(b) $(\forall x \in I) \; (\forall y \in I) \; (\exists z \in I) \quad z = x \frown y$
(c) $(\forall x \in I) \; (\forall y \in I) \; \forall u \quad \langle u \rangle \neq x \frown y$
(d) $(\forall x \in I) \; (\forall y \in I) \; (\forall z \in I) \quad (x \frown y) \frown z = x \frown (y \frown z)$
(e) $(\forall x \in I) \; (\forall y \in I) \; (\forall z \in I) \quad x \frown y = x \frown z \Rightarrow y = z$
(f) $(\forall x \in I) \; (\forall y \in I) \; \forall u \, \forall v \quad x \frown \langle u \rangle = y \frown \langle v \rangle \Rightarrow u = v$
(g) *La clôture universelle des formules suivantes:*

$$[\forall u \, \Gamma(\langle u \rangle)] \wedge [(\forall x \in I) \, \forall u \, (\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x \frown \langle u \rangle))] \Rightarrow (\forall x \in I)\Gamma(x)$$

pour chaque formule Γ *comprenant au moins une variable libre et ne comprenant pas d'occurences libres de la variable* u.

Dans ces conditions, la théorie T *n'est pas finiment axiomatisable. Plus généralement, elle n'est pas axiomatisable par un ensemble de formules dont le nombre de quantificateurs est borné. Il en est de même de toute extension (sur le même langage) de la théorie* T.

Intuitivement, I représente la classe des suites finies (non vides), $\langle u \rangle$ représente pour chaque u, la suite ayant un seul élément u et $x \frown y$ représente pour $x \in I$ et $y \in I$ la concaténation des suites x et y.

L'idée de la preuve est (très brièvement) la suivante: on utilise le fait que l'on peut manier les suites finies pour définir la vérité des formules sans quantificateurs. On définit ensuite pour chaque entier n (au sens de la métathéorie) un prédicat Tr_n donnant la vérité des formules ayant un nombre de quantificateurs $\leqslant n$. On montre ensuite que si T était finiment axiomatisable, donc axiomatisable par un seul axiome, alors en désignant pour n le nombre de quantificateurs de ce dernier axiome, on pourrait se servir de Tr_n pour montrer — à l'intérieur de T — que T est consistante; en contradiction avec le second théorème d'incomplétude de Gödel.

Le théorème 14.2 s'applique à beaucoup de théories connues. Il permet de montrer, que la théorie ZF n'est pas finiment axiomatisable (car clairement, dans ZF, on peut définir les suites finies de manière satisfaisante). Il en est de même de l'arithmétique de Peano (PA) ainsi que de la théorie de Kelley-Morse (KM). Pour cette dernière, on définit une suite finie de classes comme étant une fonctionnelle (au sens du paragraphe 2 de cette annexe) dont le domaine est un naturel (les symboles $\langle\ \rangle$ et $\frown$ sont alors définis de manière évidente).

La théorie GB étant finiment axiomatisable, le théorème 14.2 ne peut s'appliquer. On remarque en fait que si, dans GB, on définit les suites finies de classes comme on l'a fait pour Kelley-Morse, on ne pourra pas prouver le schéma (7) de l'énoncé du théorème 14.2 pour les formules non prédicatives.

Bibliographie

[1] P. Aczel, *Non-Well-Founded Sets*, volume 14 of *CSLI Lecture Notes*, CSLI, Stanford, 1988.

[2] J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, volume 90 of *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*, North-Holland, 1977.

[3] R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

[4] O. Esser, A Model of a Strong Paraconsistent Set Theory, to appear.

[5] O. Esser, Inconsistency of GPK+AFA, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 42, pp. 104–108, 1996.

[6] O. Esser, An Interpretation of the Zermelo-Fraenkel Set Theory and the Kelley-Morse Set Theory in a Positive Theory, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 43, pp. 369–377, 1997.

[7] O. Esser, *Interprétations mutuelles entre une théorie positive des ensembles et une extension de la théorie de Kelley-Morse*, PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 1997.

[8] O. Esser, On the Consistency of a Positive Theory, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 45, pp. 105–116, 1999.

[9] O. Esser, Inconsistency of the Axiom of Choice with GPK^+_∞, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 65, no. 4, pp. 1911–1916, 2000,

[10] O. Esser, On the Axiom of Extensionality in the Positive Theory, *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 49, no. 1, pp. 97–100, 2003.

[11] M. Forti and R. Hinnion, The Consistency Problem for Positive Comprehension Principles, *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 54, pp. 1401–1418, 1989.

[12] M. Forti and F. Honsell, Set Theory with Free Construction Principles, *Annali Scuola Normale Superiore – Pisa, Classe di scienze*, Vol. 10, pp. 493–522, 1983.

[13] M. Forti and F. Honsell, Models of Selfdescriptive Set Theories, in F. Colombini et al., editors, *Essays in Honor of Ennio De Giorgi, I*, pp. 473–518, Birkhäuser, Boston, 1989.

[14] M. Forti and F. Honsell, Weak Foundation and Antifoundation Properties of Positively Comprehensive Hyperuniverses, in R. Hinnion, editor, *L'anti-fondation en logique et en théorie des ensembles*, pp. 31–43, Louvain-la-Neuve, 1992.

[15] M. Forti and F. Honsell, Choice Principles in Hyperuniverses, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 77, pp. 35–52, 1996.

[16] M. Forti and F. Honsell, A general Construction of Hyperuniverses, *Theoretical Computer Science*, Vol. 156, pp. 203–215, 1996.

[17] M. Forti, F. Honsell and M. Lenisa, Axiomatic Characterizations of Hyperuniverses and Applications, in *Papers on general topology and applications (Gorham, ME, 1995)*, volume 806 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pp. 140–163, 1996.

[18] A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel and A. Levy, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1973.

[19] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, volume 3 of *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 1940.

[20] R. Hinnion, A general Cauchy-completion process for arbitrary first-order structures, unpublished.

[21] J.L. Keylley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955.

[22] J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, Collection SUP, Presses universitaires de France, 1969.

[23] R.S. Malitz, *Set Theory in which the Axiom of Foundation Fails*, PhD thesis, UCLA, Los Angeles, 1976, Unpublished.

[24] R. Montague, *Semantical Closure and Non Finite Axiomatibility I*, Infinistic methods, pp. 45–69, Warsaw, 1961.

[25] A. Mostowski, Some Impredicative Definitions in the Axiomatic Set Theory, *Fundamenta Mathematicæ*, Vol. 37, pp. 111–124, 1951.

[26] E. Weydert, *How to Approximate the Naive Comprehension Scheme inside of Classical Logic*, volume 194 of *Bonner Mathematische Schriften*, Bonn, 1989, Ph.D. Thesis.

Index