ASPECTS DE
LA DUALITÉ EN MATHÉMATIQUE

Déjà parus

CAHIER 1 épuisé
Intuitionnisme et théorie de la démonstration.

CAHIER 2 épuisé
Textes de Jean Pieters.
– *Origines de la découverte par Leibniz du calcul infinitésimal.*
– *Frege et le projet des Grundlagen.*
– *La théorie des types de Russell et Whitehead.*

CAHIER 3 épuisé
J.L. Moens. *Forcing et sémantique de Kripke–Joyal.*

CAHIER 4 épuisé
La théorie des ensembles de Quine.

CAHIER 5
T.E. Forster. *Quine's New Foundations.*

CAHIER 6
Logique et informatique.

CAHIER 7
L'antifondation en logique et en théorie des ensembles.

CAHIER 8
Ph. de Groote (ed.). *The Curry–Howard Isomorphism.*

CAHIER 9
A. Pétry (éd.). *Méthodes et analyse non standard.*

CAHIER 10
M.R. Holmes. *Elementary Set Theory with a Universal Set.*

CAHIER 11
Chr. Michaux (ed.) *Definability in Arithmetics and Computability.*

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

12

ASPECTS DE LA DUALITÉ EN MATHÉMATIQUE

Sous la direction de P. van Praag

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
DÉPARTEMENT DE PHILOSOPHIE

ACADEMIA–BRUYLANT – LOUVAIN-LA-NEUVE – 2002

Volume 12 sous la direction de:
P. van Praag,
Université de Mons-Hainaut.

Composition:
D. Dzierzgowski.

Centre de logique
Département de philosophie
Place Mercier 14 – B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgique)

D/2002/4910/39 ISBN 2–8729-687–6

Imprimé en Belgique.

Préface

à Maurice Boffa

Ce volume reprend les quatre contributions à la journée du 17 février 2001 organisée à l'Université de Mons-Hainaut sur le thème de la dualité en mathématique, par le Groupe de Contact Histoire comparée des sciences du FNRS[1].

Karine Chemla et Serge Pahaut décrivent leur découverte, à l'origine de cette journée, qu'aux sources de la dualité en mathématiques, il n'y eut pas seulement le dialogue Gergonne-Poncelet sur la dualité en géométrie projective mais aussi le fait que Gergonne avait été explicitement frappé par la constatation que si l'on permute « angles » et « côtés » dans des énoncés d'Euler sur les triangles sphériques, on obtenait de nouveaux théorèmes.

Francis Buekenhout montre comment le processus de compréhension de la dualité s'est élaboré en géométrie projective au 19e siècle : d'abord la correspondance point-droite chez Poncelet-Gergonne, puis une foule de découvertes dont les coordonnées homogènes, les coefficients de l'équation d'une courbe vus comme les coordonnées d'un point, le début de la géométrie algébrique projective, les corps, l'algèbre linéaire et les espaces de dimensions supérieures, les fondements de la géométrie projective et le principe de dualité qui devient le théorème de dualité, les groupes classiques et les immeubles de Tits.

1. Président : Jean-Jacques Heirwegh (ULB) ; vice-présidents : Émile Biemont (FNRS–ULg–UMH), Anne Tihon (UCL), Brigitte van Tiggelen (Université de Regensburg) ; secrétaire : jusqu'en mai 2002 : Paul van Praag (UMH), à partir de mai 2002 : Jean-Michel Delire (ALTAÏR–ULB).

Maurice Boffa n'a pas présenté oralement sa contribution. Il était déjà immobilisé par le cancer dont il devait mourir le 29 mai 2001. Son texte manuscrit fut dacylographié par Lyane Bouchez et envoyé aux participants. Ce fut son dernier article. Il y étudie une dualité apparue dans la première partie du 20e siècle (Sierpiński, Erdős) entre les ensembles de mesure nulle de nombres réels et les ensembles maigres (les ensembles de première catégorie au sens de Baire). Il étudie le rôle de l'hypothèse du continu pour l'existence de cette dualité et ses conséquences sur l'existence d'ensembles de Lusin, la conjecture de Borel et l'existence d'ensembles de Sierpiński.

Francis Borceux montre que la théorie des catégories est un cadre particulièrement adéquat pour une approche générale de la dualité. Il est difficile d'imaginer un procédé plus simple que le retournement des flèches. De plus le concept immédiat de catégorie duale est fécond : à priori la recherche de la catégorie duale d'une catégorie donnée n'a rien d'évident. Après avoir motivé la dualité par le cas des topos et des catégories abéliennes, l'auteur présente les catégories duales de plusieurs telles catégories.

Tous les auteurs donnent une bibliographie commentée à l'usage des non spécialistes.

Merci donc aux orateurs d'avoir accepté de parler et d'avoir écrit leurs contributions. Merci aux responsables des Cahiers du Centre de logique du Département de philosophie de l'Université catholique de Louvain d'avoir si aimablement accepté de publier ces actes, avec le soutien du Centre national de recherches de logique, et merci à Daniel Dzierzgowski pour avoir pris en charge la réalisation matérielle de ce volume.

Paul van Praag

Université de Mons–Hainaut
Septembre 2002.

Table des matières

Cahiers du Centre de logique
Volume 12

Histoire ou préhistoire de la dualité Relectures des triangles sphériques avec et après Euler

par

K. Chemla
Université Denis Diderot Paris 7

S. Pahaut
Université Libre de Bruxelles

1. Introduction

Pour situer l'émergence de la dualité, le consensus des historiens prend date avec les articles que Joseph-Diez Gergonne publie dans ses *Annales de mathématiques pures et appliquées*, créées en 1810 [1]. Nous avons déjà eu l'occasion de suggérer que cette idée a une préhistoire complexe, qui affleure de manière très lisible dans certains textes de trigonométrie sphérique du XVIIIe siècle [2].

Nous voudrions relire ici ce dossier pour en tirer des leçons relatives à un point de méthode qui nous paraît présenter un intérêt pour l'histoire des

1. On mentionnera seulement ici le document synthétique qui récapitule ce parcours éditorial : l'article de 1826, intitulé « Considérations philosophiques sur la science de l'étendue » ([12]). Pour une discussion du parcours effectif de l'entreprise, on peut consulter [3].
2. Dans ce premier travail [7], nous avons pu rappeler que certains éléments aujourd'hui associés à la dualité font leur apparition dans certains travaux du Moyen Âge arabe. Depuis la parution de cet article, divers travaux ont apporté un éclairage complémentaire à ce sujet. Nous renvoyons le lecteur à deux synthèses parues dans *Histoire des sciences arabes* de Roshdi Rashed, avec la collaboration de Régis Morelon ([13]), rédigées par Boris Abramovich Rosenfeld et Adolf Pavlovitch Youschkevitch (article « Géométrie », vol. 2, p. 121–162), et par Marie-Thérèse Debarnot (article « Trigonométrie », *ibid.*, p. 163–198).

sciences en général. Nous nous proposons plus précisément de discuter les raisons qui permettent de dire en quoi cet épisode constitue une invitation à approcher l'histoire de la science selon la perspective d'une histoire du texte.

En effet, ce cas nous confronte à un problème relatif aux modes de lecture qu'il convient d'appliquer aux sources disponibles. Il ne s'agit pas, loin de là, du seul exemple où cette difficulté surgit — elle a déjà fait l'objet de nombreuses discussions.

Quand ils veulent lire les écrits du passé, les historiens des sciences ne se contentent plus de les reformuler en termes dits modernes. Ce refus est aujourd'hui assez général pour qu'on le prenne ici pour acquis ; et nous nous accordons tous à reconnaître que cette *Whig history* peut détruire les réseaux de concepts tapis dans l'original à force de les recouvrir par d'autres.

C'est sur un autre problème, lié à la lecture des sources, qu'on propose ici de s'attarder un instant, afin de mieux évaluer combien nous manquons d'un compte-rendu satisfaisant de ce qui se passe lorsque nous lisons comme nous pensons devoir lire : quelles opérations notre lecture effectue-t-elle sur le texte de départ, et surtout, que nous apprennent les relectures de ce texte [3] ?

Nul n'ignore cette loi : il ne faut pas sans de bonnes raisons reformuler des textes anciens à grand renfort d'idées venues de plus tard ou d'ailleurs ; mais que cet impératif soit désormais reçu et accepté ne nous permet pas de bien savoir en quoi il est fondé, moins encore comment il s'applique.

Nous voulons soumettre ici à la critique l'idée qu'il est tout simplement possible d'appliquer sans dues précautions (il faudra dire lesquelles) nos modes de lecture des textes scientifiques à des sources anciennes.

Cette idée pose une hypothèse implicite : que « les textes eux-mêmes », à l'émergence du symbolisme moderne près, n'ont pas d'histoire et qu'une fois établis ils sont invariants dans le temps et dans l'espace ; qu'ils attendent toujours et partout les mêmes opérations de leurs lecteurs ; qu'en-

3. Ce problème a été rediscuté naguère sur base des nouveaux matériaux fournis par une relecture des *Arithmetica* de Diophante, instruite des leçons de la géométrie algébrique ; pour la bibliographie de cet épisode, voir [8, 6, 1, 4]. Cette relecture a révélé certaines propriétés du texte de Diophante, à qui on ne prête aucune connaissance de la géométrie algébrique ; la cause qui permet cet effet de révélation reste un sujet d'émerveillement.

fin les mêmes éléments signifient toujours les mêmes choses.

C'est tout cet ensemble de présupposés, qui conduisent à donner au document positif une importance que les juristes et les historiens ont appris à discuter, qu'il nous a paru intéressant de relire, et ce non seulement pour ce qu'il en est d'une histoire du texte en général, aujourd'hui bien engagée dans de nombreuses disciplines, mais plus spécialement pour l'histoire des textes scientifiques. C'est à cette fin que nous rouvrons ici un dossier rassemblé naguère : nous reprenons le fil d'une relecture des travaux de Leonard Euler sur les triangles sphériques [4].

2. Euler écrit et récrit

En 1753, les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* publiaient un travail intitulé *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* [10].

Euler se propose d'y déduire l'ensemble du corpus de la trigonométrie sphérique à l'aide d'une méthode analytique au développement de laquelle il avait puissamment contribué, et qui formait le noyau d'une branche nouvelle des mathématiques : le calcul des variations.

Pourquoi se donner un tel objectif ? Chacun savait alors comment résoudre n'importe lequel des problèmes de la trigonométrie sphérique : pour un triplet quelconque d'éléments prélevés parmi les côtés et les angles d'un triangle dessiné sur une sphère, on disposait de formules fournissant les trois autres côtés ou angles.

Une des motivations explicites d'Euler vient de la géodésie : si l'on sait travailler ainsi sur les triangles sphériques, il est possible d'étendre le traitement à des triangles dessinés sur d'autres surfaces qui ressembleraient de plus près à la surface de la terre, problème qu'il reprendra ailleurs et que nous ne verrons pas ici.

Euler part de l'idée que les côtés de ces triangles sont les plus courts chemins qu'il soit possible de tracer sur la sphère entre leurs sommets. Cette approche l'emmène dans des pages entières de calculs.

4. Pour une discussion plus complète du dossier de la trigonométrie sphérique chez Euler, *cf.* Karine Chemla, *Euler's work in spherical trigonometry : contributions and applications*, dans l'édition des *Opera Omnia* en cours chez Birkhäuser ([5]).

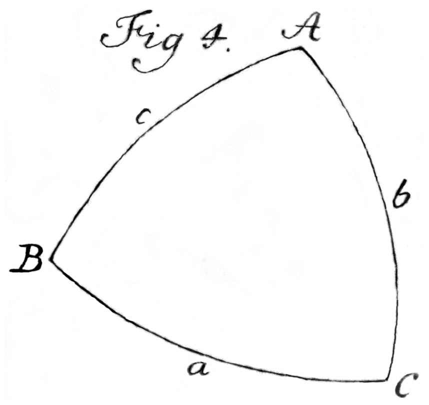

FIG. 1 – *Notations exploitées par Euler ([10], Planche 5).*

Il a déjà produit des douzaines de formules, au pas égal et sans effort qui le fit reconnaître par ses contemporains comme l'*Analyse faite chair*, lorsqu'à l'occasion d'une étape de récapitulation, il interrompt le cours du texte, et introduit de nouvelles notations pour le problème 5 *(Trouver les propriétés entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque)* [5].

Sur l'introduction de ces nouvelles notations, il ne donne ici aucune remarque. Il s'agit d'une innovation décisive : ces notations supplanteront les divers autres systèmes d'écriture en trigonométrie sphérique. Elles donnent angles et côtés pour symétriques par plus d'un biais. Côtés et angles opposés sont désormais nommés par la même lettre, et c'est un seul ensemble de lettres qui sert pour les désigner. Euler réserve les minuscules pour les côtés et nomme les angles opposés à l'aide de la capitale correspondante ; l'introduction des nouvelles conventions est aussi prosaïque que possible :

> ... les dénominations précédentes se réduiront aux présentes de cette manière :
>
> Dénominations précédentes : a, x, s, y, α, ϕ
> Dénominations présentes : c, b, a, A, B, C

Il met aussitôt ces notations au travail pour réécrire les formules déjà

5. Nous revoyons à la p. 294 de l'édition Speiser (p. 241-242 de l'édition 1753 ; voir le problème 2 pour le cas du triangle rectangle).

acquises et montrer ensuite comment tout problème de trigonométrie sphérique peut être résolu moyennant ces formules.

Mais lorsqu'il reprend les problèmes, la présentation prend une forme nouvelle à l'échelle du texte : celui-ci est divisé en sections qui disent chacune comment, pour un triplet quelconque d'éléments (côtés et angles) d'un triangle dessiné sur une sphère, on peut obtenir les trois autres éléments. Ce n'est pas tout : à l'intérieur de ces sections, il insère quelquefois des calculs algébriques qui transforment une formule utilisable à cette fin en une autre, qui effectue les mêmes calculs de manière plus commode. C'est ainsi que nous avons, pour prendre un exemple, une première section où les trois côtés étant connus, l'on calcule les trois angles ; suit immédiatement une section où les trois angles étant connus, l'on calcule les trois côtés, et ainsi de suite. Or ici nous rencontrons un phénomène singulier, qui nous ramène aux problèmes discutés dans notre introduction.

Si l'on compare la section 1 avec la section 2, puis la section 3 avec la section 4, on voit qu'à l'intérieur de ces deux paires de sections les textes se correspondent formule par formule, étape par étape. Plus précisément, si l'on prend une formule dans une section de ces paires, et que l'on substitue, pour ce qui est des variables qui entrent dans son écriture, aux lettres majuscules des lettres minuscules et réciproquement, tout en inversant certains signes (des « $+$ » en « $-$ » et réciproquement), l'on obtient la formule correspondante de la section qui fait la paire. Corrélativement, pour une phrase d'une section donnée, là où on lit le mot « angle », la phrase correspondante dans l'autre section dit « côté », et réciproquement, sans que, pour ce qui concerne les énoncés, les correspondances soient toujours strictes.

Ce phénomène se produit pour ce qui est des formules données pour calculer un élément de triangle ; mais il affecte aussi les formules qui marquent les étapes des transformations qui produisent des formules plus commodes pour le calcul. En d'autres termes, cet écho entre les textes des sections se manifeste pour ce qui est des formules simples aussi bien que dans les transformations algébriques [6]. Et donc :

- La seconde partie du mémoire d'Euler présente une structure précise, où les textes de sections se correspondent moyennant une transformation donnée, appliquée au texte des formules comme à celui des énoncés.

6. Les exceptions ne seront pas discutées ici.

- Cette structure a pu apparaître grâce aux notations introduites par Euler.
- Cette structure montre que les angles et les côtés jouent des rôles symétriques dans le corpus de la trigonométrie sphérique. Pour nous, lecteurs du XXe siècle, ce fait possède une signification mathématique, puisqu'il témoigne d'un phénomène plus général, que nous appelons dualité. Nous introduisons donc des résultats mathématiques ultérieurs pour déchiffrer cette structure.
- Sur cette structure, Euler *n'écrit pas*. Il se contente de nous donner à lire, et ponctue quelquefois son texte d'un « comme ci-dessus ». Dire qu'il garde le silence, c'est invoquer une conception des textes pour laquelle n'est dit que ce qui est explicitement écrit.

On peut aussi considérer qu'Euler a choisi ce mode d'expression. Comment rendre compte, en pareil cas, de ce que *montre* le texte ? L'ensemble du *Mémoire* a une signification qui déborde le sens repérable au niveau d'une section isolée du texte. Cette signification n'est pas déclarée explicitement, et on dira corrélativement qu'elle appelle une autre lecture. Voici encore un point sur lequel la nature du texte pose à l'historien de la science un problème de méthode.

Mais si tel est bien le cas, c'est parce qu'Euler a conçu une mise en forme de son texte à laquelle il a dévolu le rôle d'exprimer un certain type de signification.

Nous rejoignons ainsi un point de vue nouveau d'où il est possible de mieux voir les relations entre ces fronts de la recherche que nous appelons histoire de la science et histoire du texte : la mise en forme des documents constitue un aspect décisif de l'activité scientifique et doit donc être décrite comme telle. En fait, ces deux horizons sont proches, et devront un jour être abordés conjointement : c'est parce que l'activité scientifique s'accompagne d'un travail d'élaboration des genres de texte que nous rencontrons les problèmes de lecture et d'interprétation décrits ici.

En divers temps et lieux, le travail des scientifiques met en jeu des éléments que rétrospectivement nous avons pu considérer comme proches. Du point de vue maintenant conquis, il apparaît que des apparences semblables peuvent du reste recouvrir des pratiques très différentes : le statut d'une figure n'est pas forcément chez Euclide ce qu'il est chez Euler.

3. La mise en forme des textes

Pour étayer la conclusion selon laquelle Euler choisit d'exprimer des significations mathématiques par le biais d'une forme spécifique qu'il confère à son texte, il nous faut écarter l'hypothèse l'idée que ce phénomène serait fortuit. Ne serait-ce pas tout simplement par hasard, comme en passant, qu'Euler a ici choisi cette mise en forme ? Il existe plusieurs indices en faveur de la thèse contraire.

▶ Nous avons déjà vu que l'introduction de notations nouvelles et les remarques sur la similarité entre diverses portions du texte, qui émaillent le mémoire, suggèrent qu'Euler porte à ce phénomène un intérêt cohérent.

▶ Ensuite, nous savons que quelques années auparavant, Euler a présenté un travail sur les polyèdres ([9], rédigé sans doute à Berlin, même si le mémoire devait paraître à St Petersburg). Dans la théorie de ces solides délimités par des faces planes, les points-sommets et les faces peuvent faire l'objet de traitements symétriques. Et nous savons aujourd'hui que cette propriété renvoie également à la dualité. Or, dans cet autre mémoire, nous retrouvons ce phénomène que des parties entières se suivent et donnent à voir que faces et sommets ont des propriétés symétriques, elles-mêmes établies par des démonstrations symétriques entre elles. Euler est là encore conscient de ce fait, puisqu'il introduit régulièrement un développement symétrique d'un développement précédent, par l'expression *simili modo*. . .

Ici aussi, les symétries propres au sujet étudié n'apparaissent qu'au niveau de la structure du document. Euler ne semble pas vouloir en rendre compte mathématiquement ; non plus qu'il ne mentionne, en aucun cas, les ressemblances qui apparaissent entre son texte sur la trigonométrie sphérique et celui sur les polyèdres.

Nous voyons ainsi qu'Euler, confronté dans les mêmes années à ce que nous reconnaissons comme une seule et même propriété mathématique, recourt au même procédé de rédaction : il produit un texte dont la mise en forme manifeste la symétrie qui pour nous est en question, mais sans donner de commentaire. Ce recours répété au même procédé de rédaction ne permet guère à l'historien de négliger la question de savoir comment rendre compte du contenu de tels textes.

▶ Un troisième fait suggère que l'intérêt répété d'Euler pour ces phénomènes ne relève pas de la coïncidence. Quelque 30 ans plus tard, il reviendra à la trigonométrie sphérique dans un travail publié en 1782 à

St Petersburg ([11]). Cette fois, le traitement adopté a changé du tout au tout, à trois exceptions notables près. Euler veut toujours donner un compte-rendu complet des résultats de la trigonométrie sphérique, sur base de principes dont le nombre est réduit au strict minimum ; il reprend les notations introduites en 1753; la symétrie liée à la dualité est, toujours sans commentaires, centrale pour ce qui est de la mise en forme du texte. Pour notre bonheur, Euler commet ici une erreur qui nous permet de dire plus précisément comment il produit ce genre de texte. Voici quelques détails sur le parcours des calculs des paragraphes 22 et 24, dont on présente ci-dessous quelques extraits (figure 2, page suivante). Dans sa *Transformatio tertia* (§ 22), il ajoute et retranche l'unité aux premier et troisième membres de

$$\frac{\cos a \ - \ \cos b \ \cos c}{\cos b \ - \ \cos a \ \cos c} = \frac{\sin b \ \cos A}{\sin a \ \cos B} = \frac{\sin B \ \cos A}{\sin A \ \cos B}.$$

Il devrait ainsi obtenir les expressions suivantes :

$$\frac{(\cos a + \cos b) \ (1 - \cos c)}{\cos b \ - \ \cos a \ \cos c} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \ \cos B}$$

$$\frac{(\cos a - \cos b) \ (1 + \cos c)}{\cos b \ - \ \cos a \ \cos c} = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \ \cos B}.$$

Mais il oublie à deux reprises les dénominateurs des premiers membres ; il divise respectivement les termes de gauche et les termes de droite des relations obtenues pour en établir une troisième ; les deux dénominateurs manquants se compensent, et le résultat final est correct.

Le point décisif pour notre discussion est ici qu'une erreur symétrique apparaît dans la *Transformatio quarta* (§ 24) qui suit immédiatement. Ce développement est pas à pas symétrique du précédent, au même sens que plus haut : en appliquant aux noms des variables, dans la section précédente, la transformation qui consiste à échanger majuscules et minuscules et à inverser le signe des cosinus, on obtient la *Transformatio quarta*. C'est ainsi que l'erreur prend pour nous tout son sens : ici encore Euler ajoute et retranche l'unité aux premiers et troisième membres de

$$\frac{\cos A \ + \ \cos B \ \cos C}{\cos B \ + \ \cos A \ \cos C} = \frac{\sin B \ \cos a}{\sin A \ \cos b} = \frac{\sin b \ \cos a}{\sin a \ \cos b}.$$

Il devrait ainsi obtenir les expressions suivantes :

$$\frac{(\cos A + \cos B) \ (1 + \cos C)}{\cos B \ + \ \cos A \ \cos C} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \ \cos b}$$

§ 22 *Transformatio tertia.* Hanc transformationem etiam ex prima forma expedire licet, combinandis his duabus formulis :

$$\begin{aligned}\cos a - \cos b \cos c &= \sin b \sin c \cos A,\\ \cos b - \cos a \cos c &= \sin a \sin c \cos B;\end{aligned}$$

quarum illa per hanc divisa præbet,

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos B} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B}.$$

Addatur utrinque unitas, fietque

$$(\cos a + \cos b)\ (1 - \cos c) = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cos B},$$

substrahatur utrinque unitas, prodibit

$$(\cos a - \cos b)\ (1 + \cos c) = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \cos B}.$$

§ 24 *Transformatio quarta.* Hæc simili modo deducitur ex his formulis :

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B \cos C &= \sin B \sin C \cos a\\ \cos B + \cos A \cos C &= \sin A \sin C \cos b\end{aligned}$$

quarum illa per hanc divisa præbet

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos B + \cos A \cos C} = \frac{\sin B \cos a}{\sin A \cos b} = \frac{\sin b \cos a}{\sin a \cos b}.$$

Unde unitatem tam addendo quam substrahendo sequentes novæ derivantur æquationes :

$$(\cos A + \cos B)\ (1 + \cos C) = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cos b}$$

$$(\cos A - \cos B)\,(1 - \cos C) = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cos b}.$$

FIG. 2 – *Extraits des paragraphes 22 et 24 de [11].*

$$\frac{(\cos A - \cos B)\ (1 - \cos C)}{\cos B\ +\ \cos A\ \cos C} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\ \cos b}.$$

Mais ici encore il oublie à deux reprises les dénominateurs des premiers membres ; et comme il divise respectivement les termes de gauche et les termes de droite des relations obtenues pour en établir une troisième, les deux dénominateurs manquants se compensent, et le résultat final est correct [7].

Cette paire d'erreurs ne peut s'expliquer que si l'on suppose que la démonstration du paragraphe 24 a été produite par traduction de celle du paragraphe 22, moyennant la règle de réécriture qui échange majuscules et minuscules et inverse le signe des cosinus. Ceci revient à dire qu'Euler a utilisé les notations introduites, si commodes pour lire les symétries rencontrées, pour traduire certaines sections du texte et obtenir ainsi d'autres sections.

C'est par le biais de ce travail sur le texte même des formules qu'il a donné cette structure à son mémoire. Nous pouvons dès maintenant tirer de ce fait plusieurs conclusions :

- Euler a une certaine conscience de la structure de son texte ;
- il choisit de recourir à cette mise en forme du texte, et donne des symétries à lire ;
- on voit ici clairement comment il l'a produite : des opérations mathématiques concourent à la fabrication du texte ;
- ce texte est enfin, comme tel, le support de certaines opérations mathématiques, et il est mis en forme à cette fin.

4. Une histoire qui se développe dans la structure des textes

Certains éléments de structuration du texte manifestent donc un savoir mathématique et résultent d'une activité mathématique. Ceci devrait suffire pour donner la preuve que les historiens, s'ils veulent rendre compte du contenu, ont à discuter ce qui est donné à lire du point de vue gagné ici.

7. On retiendra que dans son édition de ce texte pour le volume XXVI des *Opera omnia* de Birkhäuser, Andreas Speiser a rédigé deux notes symétriques pour corriger les deux erreurs.

La description n'en est pas immédiate ; elle aussi requiert une élaboration soigneuse. Mais si nous devons prendre en considération de telles questions, ce n'est pas seulement parce que Euler « voulait » donner à son texte une signification « tacite ». Nous avons aussi à notre disposition d'autres textes sur la trigonométrie, écrits par des mathématiciens qui ont lu les travaux d'Euler, que leur lecture soit contemporaine ou légèrement postérieure ; d'autres critères d'appréciation entrent donc en jeu pour notre discussion.

La forme donnée par Euler à son texte a été lue comme telle par des mathématiciens. Ils ont reproduit ses notations, ou ont proposé des notations nouvelles, qui présentent toutefois les mêmes propriétés en ce qui concerne la dualité. On observe aussi qu'ils ont composé des textes dotés de formes semblables.

Un genre littéraire se stabilise donc pour une communauté de lecteurs, et il jouira d'une certaine longévité. La forme du texte elle-même a fait l'objet de reprises et d'améliorations quant à sa fonction de présentation de symétries qui affectent certains domaines des mathématiques, comme la trigonométrie sphérique. Des produits de l'écriture mathématique aussi l'on peut dire *habent sua fata libelli.* Ici, le processus débouche sur un état stable dès le début du XIXe siècle : dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, où Gergonne, éditeur, porte une attention spéciale à cette classe de phénomènes mathématiques. Il tente de dire dans son article de 1826 (p. 211) pourquoi des résultats dont il pressent la nouveauté appellent une mise en page convenable :

> Voilà ce qui nous détermine à faire de cette sorte de géométrie *en parties doubles*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, le sujet d'un écrit spécial dans lequel, après avoir rendu manifeste le fait philosophique dont il s'agit, dans l'exposé même des premières notions, nous nous en appuyerons, soit pour démontrer quelque théorèmes nouveaux, soit pour donner de quelques théorèmes déjà connus des démonstrations nouvelles, qui les rendent à l'avenir tout à fait indépendants des relations métriques desquelles on a été jusqu'ici dans l'usage de les déduire.

Dans ce but, il publie une série d'articles consacrés à des domaines mathématiques où figurent de telles symétries ; et il construit pour traiter ces dernières une mise en page particulière, en deux colonnes, où les formules aussi bien que les énoncés se correspondent moyennant une règle de traduction systématique (voir figure 3, page suivante). Il récrit ensuite des résultats obtenus dans certains domaines mathématiques, pour les adapter

1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.	1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.
2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.	2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.

FIG. 3 – Notions préliminaires *de la géométrie* en parties doubles *de Gergonne (1826, p. 212).*

à cette présentation.

Ce n'est pas tout : une rubrique spéciale des *Annales*, intitulée *Questions posées*, présente aux lecteurs des travaux pratiques, qui ont eux aussi reçu une formulation double, mise en page de la même manière (voir Figure 4, page suivante). Gergonne incite ainsi ses lecteurs à travailler chaque question en relation avec la question symétrique et moyennant cette mise en forme. Cette présentation structure aujourd'hui encore le texte de nombreuses publications.

Le fait que divers domaines des mathématiques pouvaient recevoir ce type de mise en forme suggéra l'idée que l'on avait affaire à un phénomène mathématique spécifique ; cette hypothèse fut explorée par le biais de textes qui recouraient à cette mise en forme ; et c'est ainsi que commença l'étude de la dualité comme propriété de l'espace [8]. Le type de connaissance qu'expriment ces formes de texte a donc lui aussi son histoire. Nous pouvons à présent récapituler ce qu'il est permis de conclure de ce dossier :

- Pour traiter certains phénomènes (en mathématiques, et plus généralement dans les textes écrits), des mises en page du texte peuvent être élaborées, qui permettent aux auteurs et aux lecteurs de mettre en lumière ces phénomènes, de les donner à voir et d'y travailler. Une composition du document est donc délibérément choisie en vue d'une recherche donnée.

8. Pour quelques réflexions sur ce point, voir ([2] et [3]).

Théorèmes de géométrie

Deux quadrilatères quelconques étant donnés, il existe un angle tétraèdre auquel ces deux quadrilatères sont l'un et l'autre inscriptibles.	Deux angles tétraèdres quelconques étant donnés, il existe un quadrilatère auquel ces deux angles tétraèdres sont l'un et l'autre circonscriptibles.

Problèmes de géométrie

On a construit sur les deux faces d'un angle dièdre deux triangles tels que les points que déterminent leurs côtés correspondants sont tous trois sur l'arête de l'angle dièdre, et conséquemment en ligne droite, d'où il résulte que, quelle que soit l'ouverture de l'angle dièdre, toujours les droites que détermineront les sommets correspondants des deux triangles passeront par un même point. On suppose que l'on fait varier cette ouverture, et on demande quelle ligne ce point décrira dans l'espace ?	Deux angles trièdres sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent tous trois par la droite que déterminent leurs sommets, et se coupent conséquemment suivant une même droite ; d'où il résulte que, quelle que soit la distance de leurs sommets, toujours les droites que détermineront les faces correspondantes des deux angles trièdres seront dans un même plan. On suppose que l'on fait varier cette distance, et on demande à quelle surface ce plan sera constamment tangent ?

FIG. 4 – *Questions proposées par Gergonne aux lecteurs de ses* Annales *(1826, p. 232).*

- Ces significations sont lues, reçues et retravaillées sous cette forme. Dans notre cas, une histoire entière se développe dans la structure du texte. Corrélativement, nous avons pu suivre une évolution dans la mise en forme du texte aussi bien que dans ce qu'il est supposé traiter, puisque le contenu évolue du même pas. C'est un fait qu'en ce qui concerne la dualité, après un premier temps où elle est traitée moyennant la seule mise en page du texte, elle devient l'objet d'un traitement discursif explicite, *thématisé* pour le dire avec Cavaillès. Ceci suggère une certaine communication entre deux modalités du contenu : celui qui se cherche dans les parcours offerts au regard sur le texte et celui qui s'exprime dans le discours des énoncés.
- En revanche, si l'on ne lit pas les significations que véhiculent ces formes particulières de texte, et si l'on n'adopte pas une conception critique de ce qu'est un texte, il sera difficile de discuter ce type de contenu et l'évolution ultérieure des idées ainsi manifestées. Fixer le début d'une histoire de la dualité à son premier traitement discursif explicite, ce serait retomber dans une erreur dont l'histoire des sciences a donné plus d'un exemple.

5. Conclusions

Les directions de recherche ouvertes ici convergent avec d'autres, déjà balisées par de nombreux chercheurs, qui s'accordent à dire tout le profit que l'on peut espérer d'une collaboration entre histoire des sciences et histoire du texte.

Les textes ne sont pas des formes transparentes et libres flottant au-dessus de l'histoire, qui ne feraient que nous transmettre des significations dont nous devrions écrire la chronique. Les textes scientifiques ont bel et bien pris des formes diverses dans l'espace et dans le temps, produits comme ils le sont au travers d'une interaction avec les conditions locales de production des textes de toutes sortes : procédés de dénomination, formes littéraires, techniques graphiques et typographiques disponibles... Ces textes ont donc une histoire internationale, qui les inscrit dans la culture humaine, peuplée de lecteurs et d'auteurs venus de partout.

On espère avoir montré ici comment la mise au point de la description de ces diverses formes de textes permettra de fournir des ressources méthodologiques adaptées à leur lecture, puisqu'il est impossible de les lire sans la médiation d'une discussion sur la méthode de lecture. Les résultats engrangés par une histoire du texte seraient tout profit pour l'histoire des sciences : ils nous donneraient une meilleure connaissance des contextes locaux de production et de mise au point des textes scientifiques. Nous disposerions ainsi d'un environnement sur fond duquel nous pourrions relire nos sources.

Mais outre une meilleure maîtrise de ce contexte textuel de la production des écrits scientifiques, une histoire du texte permettrait aussi de prêter une attention renouvelée aux divers moyens par lesquels un texte se donne à lire. Il est vrai que l'objectif qui consisterait à déterminer avec une certitude positive le contenu d'un document s'avère désormais, à la lumière des problèmes décrits ici, relever de l'illusion ; or, il est difficile de ne pas rester captif de cet horizon partiel là où un domaine de l'histoire des pratiques intellectuelles comme l'histoire des sciences est considéré comme visant une histoire des seuls résultats. Nous avons montré ici des textes auxquels il est difficile d'assigner un contenu, et ce n'était pas faute d'intérêt pour les enjeux pressentis. En particulier, nous voyons qu'une opposition entre forme et contenu, qui sous-tend de nombreux modes de lecture, laisserait échapper d'innombrables aspects du contenu, même s'il n'est pas commode de spécifier ce qui nous échappe. Ceci suggère d'ajouter une plage nouvelle d'enjeux, et d'appeler de nos vœux le développement concerté d'une histoire des lectures et des réceptions des textes scientifiques, histoire que l'on peut établir en examinant, là où c'est possible, les commentaires et les réactions qui répondent à un texte donné. Les lectures des lecteurs nous apprennent quelque chose sur un texte, qu'elles relèvent ou non de la même tradition textuelle. Au reste, une description du texte qui prendrait en compte des structures du type de celles que nous avons pu décrire ci-dessus serait d'un grand secours lorsqu'il s'agirait de caractériser les divers modes de lecture. Cette enquête supplémentaire, qui prolonge la quête des résultats assignables à un texte écrit, nous inscrirait comme lecteurs parmi les acteurs que nous observons.

Par ailleurs, l'histoire des textes scientifiques peut devenir un objet de travail pour l'histoire des sciences comme telle. On sait que les scientifiques confectionnent leurs textes en même temps que leurs concepts et leurs résultats. Ce travail constitue une partie intégrante de leur activité.

Cette relation peut être assez intime pour que nous soyons invités à reconnaître des concepts et des résultats en cours de constitution moyennant l'avènement d'une nouvelle forme de texte, comme nous venons de le voir dans le cas de la dualité chez Euler. Et si les textes ne faisaient pas l'objet d'un travail spécifique de mise en forme, verrait-on leurs formes varier, et leur lecture appellerait-elle une discussion des outils et des méthodes ?

Comment les scientifiques s'y prennent-ils pour ce travail de confection du texte ? L'étude de la production des textes devrait nous donner des matériaux qui nous permettraient de tenter de mieux comprendre comment des auteurs ont mis à contribution les ressources culturelles, et plus spécifiquement textuelles, qu'ils avaient à leur disposition pour travailler [9]. Nous pourrions alors mieux comprendre comment les scientifiques construisent les outils symboliques à l'aide desquels ils effectuent leurs travaux et communiquent leurs résultats, qui en dernier ressort seront des textes. Par tous ces biais, il est désormais possible de rejoindre un point de vue d'où il sera désormais plus facile de voir comment une histoire du texte scientifique trouvera un jour sa place à l'intérieur du vaste domaine des études d'histoire du texte.

9. Quand il introduit la présentation en deux colonnes, Gergonne renvoie explicitement à la comptabilité ; une technique textuelle disponible est donc importée et mise au travail à des fins de recherche mathématique. Sans doute ne s'agit-il pas ici d'une importation de structure aussi forte qu'entre la comptabilité et les vecteurs de Cayley-Sylvester ; on pourrait parler de bricolage.

Références

[1] Karine Chemla. What could be experimentation in the history of mathematics? *8th Conference of the International union for the history and philosophy of science* (Gent, Vlaanderen, 1986).

[2] Karine Chemla. The background to Gergonne's treatment to duality : spherical trigonometry in the late 18th century. In D. Rowe and J. McCleary, editors, *The history of modern mathematics*, volume 1, pages 331–359. Academic Press, 1989.

[3] Karine Chemla. Le rôle joué par la sphère dans la maturation de l'idée de dualité au début du XIXe siècle. Les articles de Gergonne entre 1811 et 1827. In *Actes de la quatrième université d'été d'histoire des mathématiques (Lille 1990)*, pages 57–72. Irem de Lille, 1994.

[4] Karine Chemla. Histoire des sciences, histoire du texte. *Enquête*, Vol. 1, p. 167–180, 1995a.

[5] Karine Chemla. Euler's work in spherical trigonometry : contributions and applications. In Euler, *Opera Omnia, Series tertia*, volume 10 (*über Magnetismus, Elektrizität und Wärme*). Birkhäuser, (to appear).

[6] Karine Chemla, Régis Morelon et André Allard. La tradition arabe de Diophante. *L'Antiquité classique*, Vol. 55, p. 351–375, 1986.

[7] Karine Chemla et Serge Pahaut. Préhistoires de la dualité : explorations algébriques en trigonométrie sphérique (1753–1825). In Roshdi Rashed, editor, *Sciences à l'époque de la révolution française*, pages 148–200, Paris, 1988. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

[8] Diophante. *Les Arithmétiques* (Roshdi Rashed, *ed. et tr.*). Paris, Les Belles Lettres, 1984 (Volume III : Book IV ; Volume IV : Books V, VI, VII).

[9] Leonhard Euler. *Elementa doctrinæ solidorum*, volume 4 de *Novi commentarii academiæ scientiarum imperialis petropolitanæ*, pages 109–140. 1758, (1752/53). Repris dans le vol. 26 de la 1re série des *Opera Omnia* (A. Speiser *éd.*), Birkhäuser 1953, p. 71–93.

[10] Leonhard Euler. *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits*, volume 9 des *Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres*, pages 223–257. Berlin, Haude et Spener 1755, (1753). Repris dans le vol. 27 de la 1re série des *Opera Omnia* (Speiser *ed.*), Birkhäuser 1954, p. 227-308.

[11] Leonhard Euler. *Trigonometria spherica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata*, volume 3, I de *Acta academiæ scientia-*

rum imperialis petropolitanæ, pages 223–257. 1782, (1779). Repris dans le vol. 26 de la 1re série des *Opera Omnia* (A. Speiser *éd.*), Birkhäuser, 1953, p. 224–236.

[12] Joseph-Diez Gergonne. Considérations philosophiques sur la science de l'étendue. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Vol. 16, p. 209–231, 1826.

[13] Roshdi Rashed (sous la direction de). *Histoire des sciences arabes* (avec la collaboration de Régis Morelon). Paris, Seuil (3 volumes), 1997.

Karine Chemla : Recherches épistémologiques et
historiques sur les sciences exactes et
les institutions scientifiques (REHSEIS)
Unité Mixte de Recherche 7596
CNRS et Université Denis Diderot (Paris VII),
Centre Javelot
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France
e-mail : `chemla@paris7.jussieu.fr`

Serge Pahaut : Centre de Sociologie du Travail,
de l'Emploi et de la Formation (TEF)
Institut de Sociologie
Université libre de Bruxelles (CP 124)
Avenue Jeanne, 44
1050 Bruxelles
Belgique
e-mail : `serge.pahaut@ulb.ac.be`

Cahiers du Centre de logique
Volume 12

La dualité en géométrie projective

par

Fr. Buekenhout
Université libre de Bruxelles

1. Introduction

1.1. Je remercie Paul Van Praag qui a eu l'idée d'une belle journée sur diverses facettes de la dualité et qui m'a poussé dans un exposé exaltant autour d'une grande partie de mon temps de professeur et de chercheur durant 40 ans.

1.2. L'idée de dualité est effectivement présente dans une grande partie des mathématiques. Elle pourrait figurer dans une nouvelle mouture du *Fascicule de résultats de théorie des ensembles* de Bourbaki.

1.3. En ce qui concerne la dualité en géométrie projective, mon exposé en esquisse tout au plus l'histoire. J'ai de nombreuses questions et je serai heureux de bénéficier d'aides diverses. Le sujet requiert notamment une histoire de la géométrie projective. C'est immense. Je tente de couvrir une période invraisemblable dans le temps. La période que je connais le mieux est le XXe siècle. La période qui domine l'exposé est le XIXe siècle. L'âge d'or de la dualité projective couvre ces deux siècles. Ce propos peut surprendre les tenants d'un stéréotype ayant la vie dure et selon lequel la géométrie projective serait morte au début du XXe siècle. Je me base sur ma mémoire d'une foule de lectures et de réflexions. À mon sens, l'histoire n'est pas une reconstitution du passé mais une construction. Une construction qui part des documents de tous ordres, qui doit y revenir et qui doit se soumettre à la cohérence.

1.4. Gauche-droite et haut-bas

Au début de 2001(voir [8]), j'ai fait, pour la première fois en ce qui me concerne, un rapprochement entre la chiralité et la dualité. J'ai tendance à voir la dualité en termes de haut-bas. La structure projective est basée sur une hiérarchie, un ordre partiel concernant les points, puis les droites, puis les plans, etc. et la dualité consiste à observer qu'en renversant le haut et le bas, en décidant que les premiers seront les derniers, la structure demeure la même : le dual d'un espace projectif lui est isomorphe.

Pour que cette affirmation soit vraie, il convient de prendre une série de précautions. Je serais le premier à expliquer que c'est faux. Mais l'idée est bien là. Une explication commune partielle aux deux dualités est la présence d'un groupe d'automorphismes et d'un sous-groupe (d'où le haut et le bas). Il est possible de creuser davantage. Dans les deux cas, un rôle majeur est joué par les involutions, les éléments d'ordre deux, qu'on appelle les polarités en dualité projective. Un rôle tout aussi majeur est forcément joué par le centralisateur d'une polarité. Ceci débouche sur les groupes classiques : groupes orthogonaux, symplectiques, unitaires.

Mais redescendons sur terre.

1.5. Le point majeur : bousculer Euclide

Dans un plan projectif convenable, le point et la droite ont au fond les mêmes propriétés. Voilà une conclusion d'une audace extraordinaire à laquelle sont arrivés les géomètres du début du XIXe siècle, surtout Gergonne et Poncelet en 1825. Il a fallu bousculer ce monument d'entre les monuments que sont les *Eléments* d'Euclide, de deux façons au moins. D'abord, il a fallu rompre peu à peu avec l'idée millénaire d'un plan et d'un espace uniques. Ceci mériterait une analyse serrée de textes durant la période couverte par le travail de Chemla-Pahaut [11] soit 1753–1826 environ. Un des moteurs de la nécessité des points à l'infini fut, j'en suis convaincu, le théorème de Bézout (1730–1783) sur les courbes algébriques qui est lui-même une sorte d'axiome de la géométrie algébrique, une propriété dont on ne peut et ne veut pas se passer. Il émerge vers 1770, une date on ne peut plus vague pour un sujet mouvementé. Sa démonstration n'est pas maîtrisée avant 1874 avec Halphen (1844–1889). Une géométrie projective plane se constitue donc et s'impose avec le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet en 1822. Il faudra longtemps encore pour que le concept de plan projectif soit clairement et consciemment achevé. Sur un plan structurel, indépendant de coordonnées, il faut attendre les années 1890. Le processus atteint sa complète maturité dans le traité de Veblen et Young en 1910.

Il faut donc une très longue genèse pour disposer d'un ingrédient de base du principe de dualité : le concept de plan projectif. Au passage, s'est évacuée une difficulté majeure : la continuité. On a découvert que le fonctionnement de la géométrie projective n'exige pas la continuité. Dans notre langage algébrique, on est passé du corps des réels à un corps quelconque. Ceci est bien digéré par Veblen et Young dans [30]. Le terme de corps n'est pas utilisé mais le concept est clairement défini. Ce fait est inconnu dans l'histoire de l'algèbre et de la notion de corps, du moins à ma connaissance. Ensuite, il a fallu contredire les axiomes d'Euclide selon lesquels le point est ce qui n'a pas de parties alors qu'une droite est implicitement un ensemble de points. Comment un point seul d'une part et un ensemble infini d'autre part pourraient-ils avoir les mêmes propriétés ?

1.6. La relation avec l'algèbre : la sesquilinéarité

Mon sujet est inséparable de l'algèbre et ceci à toutes les époques.

Il convient de rappeler qu'un espace projectif peut se dériver d'un espace vectoriel sur un corps (non nécessairement commutatif). Il convient de rappeler qu'il y a une théorie de la dualité dans un espace vectoriel, que tout espace vectoriel possède un espace dual, que la dimension peut être infinie et qu'alors cette dimension n'est pas invariante par dualité. Il convient de rappeler que le corps de base possède lui-même un corps dual, souvent mais pas toujours isomorphe au premier. Il convient de rappeler qu'un corps peut posséder des anti-automorphismes, qu'un espace vectoriel peut s'équiper d'une forme sesquilinéaire. Il convient de rappeler les anti-automorphismes involutifs et les formes sesquilinéaires réflexives.

Tout ce qui précède est ce que j'appelle la *sesquilinéarité*. On ne peut pas étudier la dualité projective en ignorant ce concept. Tel que nous le connaissons il est arrivé à maturité dans un travail publié en 1936 par G. Birkhoff (1911–) et von Neumann (1903–1957) [5] et consacré à la logique de la mécanique quantique. Cela peut surprendre. J'ai dit qu'on ne peut pas éviter la sesquilinéarité. Elle n'était cependant pas accomplie au début et notre esquisse historique peut redescendre sur terre une fois de plus. J'aurais dû dire aussi que les espaces projectifs sont inséparables des espaces vectoriels et de la *linéarité*. La réciproque devrait être respectée mais elle est loin de l'être.

1.7. Influence sur la logique.

Je cite J. J. Gray [16].

> In one of the few major papers in our subject ([21]), Ernest Nagel explored what he believed to be the connection between modern geometry and the rise of modern logic. It was his thesis that projective geometry, with its striking duality between points and lines in the plane, made it difficult for the more critically aware mathematicians to leave geometry resting on an intuitive base. Nagel argued that the example of geometry was vitally important in moving mathematicians away from believing that their subject rested on a careful mode of abstraction, and towards believing that what made mathematics work was its mode of reasoning. In short, that projective geometry pushed Pasch, Peano, and Hilbert towards abstract axiomatics, which, when Nagel was writing, was the language of the mathematical gospel.

2. Germes de dualité en géométrie élémentaire

2.1. Tous les polygones exhibent de façon criante et je crois explicite une dualité sommet-côté qui remonte à la préhistoire. Cette dualité va et vient. Dans la scolarité, elle se détruit souvent, on y revient, elle se détruit. Il faut se souvenir qu'un point et une droite sont des êtres qu'il est difficile de mettre sur un pied d'égalité.

2.2. Chez Apollonius, nous rencontrons évidemment la relation point-tangente du cercle et plus généralement, des coniques. On rencontre la polaire d'un point. Et le conjugué harmonique qui représente pour nous la notion de polarité sur une droite projective.

2.3. Dans le livre XIV des *Eléments* d'Euclide, un ajout postérieur, nous découvrons l'octaèdre inscrit dans un cube.

2.4. Kepler (1619) étudie les polyèdres réguliers et distingue des polyèdres mâles et femelles.

2.5. La fameuse formule d'Euler est un magnifique exemple implicite de dualité point-plan.

2.6. L'espace euclidien vu par Poncelet est, dans notre langage, un espace affin réel muni à l'infini d'une polarité sans points absolus. Le plan à l'infini de l'espace euclidien est aussi le plan elliptique de la géométrie non euclidienne qui sera reconnu comme tel fort brièvement par Riemann (1853) puis Klein. La sphère de la trigonométrie sphérique est un revêtement double du plan elliptique.

3. Gergonne et Poncelet : le principe de dualité

3.1. La montée de la dualité au travers de la trigonométrie sphérique est brillamment et minutieusement analysée par Chemla et Pahaut, dans leur exposé de ce jour et dans des articles publiés en 1988 et 1989. Je dois beaucoup à ces travaux pour comprendre la démarche de Gergonne. Il convient de citer également Geymonat [15].

3.2. Gergonne (1771–1859) s'est longuement convaincu du principe de dualité compris par l'interchangeabilité des mots « point » et « droite » dans divers énoncés en prouvant de manière explicite et côte à côte une foule d'énoncés. De nos jours, une définition axiomatique de plan projectif conduit à un énoncé immédiat du principe de dualité ou plutôt d'un théorème de dualité. Pourquoi ce terme de « principe » qui semble ressortir plutôt à la physique et pas plutôt le terme de « théorème » ? Parce que, la structure à laquelle s'applique la dualité n'était pas dégagée. Il ne me semble pas douteux que la dualité a aidé la structure à se dégager. Pour en revenir à Gergonne, il ne pouvait pas démontrer le principe de dualité parce qu'il n'avait pas la définition d'un plan projectif.

3.3. De nos jours, on définit les plans projectifs par des axiomes simples. Cela remonte aux années 1890-1910. On peut dès lors définir le plan dual de tout plan projectif. Toute propriété du premier possède une duale dans le plan dual. Ce sont deux expressions légèrement différentes du principe de dualité. Attention : le dual d'un plan projectif n'est pas forcément isomorphe à celui-ci. Donc, dans un plan, une propriété peut être vraie sans que sa duale le soit. Sa duale est vraie dans le plan dual.

3.4. Autre remarque : les axiomes traditionnels de plans projectifs écartent souvent et à tort, le plus petit d'entre eux qui est le triangle comme par hasard. Ce rapprochement et son importance sont dûs à Tits (1930–) en 1962 dans la fondation de la théorie des immeubles. Voir [22]. Soit dit en passant, la théorie des immeubles est un des prolongements naturels de la géométrie projective et la dualité s'y retrouve profondément. Permettez-moi d'insister par une citation de Shreeram S. Abhyankar [1] :

> ... even a great man like Zariski can be wrong once. I was referring to the assertion which he made to me at the end of his projective geometry course that projective geometry was a beautiful but dead subject and that it was not worth doing research in it. As I have just pointed out projective geometry had a robust rebirth around 1960.

La nouvelle robustesse de la géométrie projective vers 1960 n'est rien d'autre que la théorie des immeubles de Tits.

3.5. En 1806, Brianchon (1785–1864) découvre le théorème sur les hexagones circonscrits à une conique : c'est le dual du théorème de Pascal. Je n'ai pas vu son travail. Il me paraît essentiel. Comment lui est venue l'idée ? Quel était l'état de la dualité dans les cours suivis par cet étudiant ?

3.6. Poncelet (1788–1867) a développé la théorie des pôles et polaires par rapport à une conique dans son traité de 1822. Dans notre langage, il a exploré une polarité, un anti-automorphisme d'ordre deux du plan projectif réel-complexe. Il a montré que ce plan est self-dual. La querelle l'ayant opposé à Gergonne sur le fait de savoir quel est le bon point de vue : le principe de dualité ou l'existence d'une dualité par les pôles et polaires doit à mon sens se conclure en disant que chaque adversaire a raison et qu'ils apportent des éléments complémentaires. La théorie des pôles et polaires a elle-même une histoire élaborée qui débute chez Apollonius et qui mériterait une étude serrée. Les polarités ont une importance centrale dans la théorie des immeubles. Ce n'est pas un sujet anodin.

4. Plücker : les coordonnées homogènes

4.1. Une avancée majeure. J'oublie Möbius et son calcul barycentrique de 1826. Plücker (1801–1868) découvre (1829) qu'en coordonnées homogènes, une droite (du plan) possède une équation de la forme

$$AX + BY + CZ = 0.$$

La droite possède donc visiblement des coordonnées (A,B,C) qui jouent le même rôle que les coordonnées (X,Y,Z) d'un point. La dualité à la manière de Gergonne ou de Poncelet, s'éclaire. La bilinéarité éclate. Plücker s'exprime comme suit (cité d'après Coolidge [12] et traduit ici de l'allemand).

> Ce n'est qu'à la fin août 1829 … que j'ai eu l'idée de considérer les constantes dans l'équation d'une ligne droite comme coordonnées de cette ligne et de ce fait, de déterminer une courbe par une équation en ces coordonnées.

4.2. Il n'y a pas encore d'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, du moins de manière explicite, mais son projectif $P(\mathbb{R}^3)$ est bien là. Passé sous silence dans l'histoire de l'algèbre linéaire, me semble-t-il. Et dans l'histoire. La version bilinéaire du produit scalaire est présente dans l'histoire avant le produit scalaire lui-même. Stupéfiant.

5. Plücker : les courbes algébriques

5.1. Plücker exploite sa découverte. Toute courbe algébrique apparaît comme un ensemble de points mais aussi comme un ensemble de tangentes. Ainsi, la courbe possède une courbe duale. Il faut des années pour en saisir les secrets. Il découvre que la duale d'une cubique (elliptique du plan complexe) est une sextique possédant 9 points de rebroussement. Le dual d'un point de rebroussement est un point d'inflexion.

5.2. Dans la foulée, si j'ose dire, il obtient les fameuses formules de Plücker. En 10 ans environ, Plücker (et d'autres, il est vrai, dont Poncelet) mettent la géométrie algébrique sur une piste bouleversante. Grâce aux coordonnées homogènes, à la dualité, à la formule d'Euler concernant les polynômes homogènes et grâce au théorème de Bézout. Considérons une courbe algébrique plane de degré m, de classe m^*, ayant d points doubles,

r points de rebroussement, r^* points d'inflexion et d^* bitangentes. Alors,

$$\begin{aligned} m^* &= m(m-1) - 2d - 3r \\ m &= m^*(m^*-1) - 2d^* - 3r^* \\ r^* &= 3m(m-2) - 6d - 8r \\ r &= 3m^*(m^*-2) - 6d^* - 8r^*. \end{aligned}$$

6. Grassmann et Plücker : grassmanniennes, coordonnées de Plücker, quadrique de Klein

6.1. La géométrie de dimension trois. Elle n'est jamais oubliée par les pionniers. C'est un des héritages les plus évidents du grand Monge (1746–1818). Dans ce cas, la dualité porte sur les points et les plans. La duale d'une droite est une droite. Trente ans après ses fabuleux exploits, Plücker pense bien naturellement à des coordonnées de droites dans l'espace à trois dimensions. Il y parvient. La droite de cet espace devient un point d'un espace de dimension cinq. Son œuvre est achevée par son très jeune assistant Félix Klein qui publie le livre de Plücker et qui achève le travail avec sa découverte de la quadrique de Klein dans l'espace projectif de dimension cinq. On est en 1866. Un travail plus général a été développé par Grassmann pour les sous-espaces de dimension donnée d'un espace vectoriel quelconque. Ce travail n'est pas connu par Plücker et par Klein. Nous sommes en présence des variétés grassmanniennes qui importent encore en géométrie algébrique et en géométrie d'incidence.

6.2. La quadrique de Klein occupe encore une grande importance de nos jours pour l'explication d'isomorphismes de groupes classiques et dans une foule de questions concernant les espaces polaires.

6.3. Les coordonnées homogènes, les ancêtres des espaces vectoriels de dimension trois, ouvrent les portes de dimensions plus élevées, d'espaces vectoriels quelconques. Le pas sera franchi peu à peu. Grassmann (1844 puis 1862) développe son algèbre linéaire. C'est une histoire qui s'écarte de mon sujet et qui est aujourd'hui mieux connue que celle de la dualité projective.

7. Jordan, Lie, Dickson : les groupes classiques

7.1. Algèbre, théorie des groupes, géométrie

Je reprends un thème que j'ai déjà traité dans mon histoire des espaces polaires, [7]. La dualité projective est proche des groupes ou plutôt des groupes classiques. D'abord vient un corps commutatif ou un corps qui peut être restreint de diverses manières. Ensuite vient un espace vectoriel ou projectif sur le corps de base. Puis, une forme quadratique, bilinéaire, hermitienne, etc. Je résume ces données en disant qu'elles constituent l'algèbre. Il en émerge deux tendances. En *théorie des groupes* on définit et on étudie un groupe à partir de l'algèbre et on ne s'occupe pas du reste. On obtient les groupes orthogonaux, symplectiques et unitaires. En *géométrie d'incidence,* on définit et étudie des polarités et des espaces polaires. On ne s'occupe pas du reste. En réalité, l'algèbre, la théorie des groupes et la géométrie sont étroitement liés et les liens demeurent flous pour la plupart.

7.2. La dualité projective dans les groupes finis selon Jordan [19]

Après les grands pionniers de la théorie des groupes (de substitutions) que sont Ruffini, Lagrange, Galois, Cauchy et Cayley le premier à comprendre le tout, à transférer les idées en géométrie euclidienne et à élaborer une théorie cohérente fut Jordan [19]. Son livre de 690 pages demeure une source respectée. Il construit les groupes classiques sur un corps fini d'ordre premier dans le droit fil de Galois. Il décrit et étudie successivement sous des noms qui importent peu ici, le groupe linéaire, les divers groupes orthogonaux et le groupe symplectique. À ma connaissance, c'est la première apparition explicite du groupe symplectique tous corps confondus. Il possède la réduction des formes quadratiques. Il sait de manière implicite qu'il n'y a pas de conique projective finie vide. Il n'a pas encore les groupes unitaires. Observons au passage que de nombreux collègues sont convaincus du fait que les groupes classiques sont apparus d'abord sur les réels-complexes.

7.3. Dickson [13]

Après Jordan, la grande synthèse suivante est due à Dickson. Il obtient les groupes classiques sur tout corps de Galois. Il obtient la simplicité d'un sous-groupe normal convenable. Il obtient les isomorphismes entre groupes classiques. Plus tard, les groupes classiques qui sont les groupes de la dualité furent développés de manière plus générale sur un corps quelconque par van der Waerden, puis Dieudonné [14]. C'est une apogée. Les coordonnées tendent à disparaître au profit de la structure et de la simplicité. La géométrie projective est entièrement effacée. À un moment, le mot quadrique échappe à l'attention de Dieudonné.

7.4. Algèbres

Les groupes et la géométrie sont liés à un autre type de structure à savoir les algèbres. Il convient de songer à la grande théorie algébrique des algèbres de Lie développée par Chevalley en 1955. La dualité n'est jamais loin, cette fois dans des contextes qui cessent d'être strictement projectifs.

7.5. Groupes de Lie

Un sujet lié à notre article est la théorie des groupes de Lie dont l'émergence est superbement reconstituée et contée par Hawkins [18].

8. Avènement des espaces projectifs

J'ai brièvement analysé ce sujet dans [6]. Il ne s'agit pas de la géométrie projective mais bien des espaces projectifs qui émergent durant la période 1890–1910 et dont la maturation s'est poursuivie au XXe siècle. Parmi les pionniers il convient de citer G. Peano, M. Pieri, F. Enriques, E.H. Moore, F. Schur, A.N. Whitehead et O. Veblen. Pour les remarquables développements du XXe siècle un rapport complet et général sur les fondements de la géométrie projective est [2] qui comporte de nombreuses références et coups d'œils sur l'histoire. Ce livre marque un tournant. Baer commence comme suit :

> Dans ce livre nous comptons établir l'essentielle identité structu-

> relle de la géométrie projective et de l'algèbre linéaire. Bien entendu, il a été réalisé depuis longtemps que ces deux disciplines sont identiques.

La géométrie projective se conforme à l'idée de symétrie optimale du fait que des droites parallèles ne peuvent plus se distinguer de droites sécantes. Ceci requiert avant tout d'ajouter des points à l'infini à l'espace ou au plan euclidien et la longue résistance historique à ces points est toujours vivace. C'est ensuite que la difficulté suivante, un seuil épistémologique comme on dit à présent, peut être surmontée : il s'agit d'homogénéiser le nouvel espace, selon une expression de Paul Libois, à savoir de ne plus faire de différence entre les points anciens et les points à l'infini et qu'ils sont tous des points d'un être nouveau : l'espace projectif. Si ce pas est accompli, une plus grande symétrie est accomplie, non seulement de manière formelle mais en profondeur. Le groupe des automorphismes s'agrandit de manière considérable et le groupe euclidien en est un sous-groupe. Il n'y a pas de doute que cet état est entièrement achevé et conscient dans le fameux traité de Veblen et Young [30]. Cet état avait été bien compris déjà durant la période précédente spécialement après l'optimisation des fondements de la géométrie par Hilbert en 1899. L'incidence (ou connexion) avait été isolée d'autres structures comme celle des segments (l'intéralité) et la congruence. Il était possible de progresser encore. En particulier, il convenait de se libérer par rapport à la dimension ce qui s'amorce timidement chez Veblen-Young. Ce processus serait achevé avec Birkhoff dans les années 1930 (voir [4]). Bien entendu, il avait cheminé aussi en algèbre linéaire sous l'influence de l'analyse fonctionnelle.

9. Le principe de trialité : Study 1913

Je me borne à signaler ce superbe sujet pour mémoire. Le cadre n'est plus un espace projectif mais bien une hyperquadrique non dégénérée d'un espace projectif de dimension 7 contenant deux familles de sous-espaces projectifs de dimension 3. Les trialités ont été classées par Tits dans [24]. Elles conduisent à des groupes nouveaux et des objets nouveaux qui sont des hexagones généralisés. Ceux-ci jouent un rôle essentiel dans la naissance de la théorie des immeubles. La trialité possède un lien profond avec les octonions dont l'histoire est évoquée de manière magistrale par Baez dans [3].

10. Les espaces polaires

J'ai développé ce sujet dans [7]. Rappelons que toute conique (convenable) et toute quadrique (convenable) déterminent une polarité. Toute polarité détermine un espace polaire. La théorie des espaces polaires est un des chapitres longs et difficiles de la théorie des immeubles de type sphérique de Tits. Voir à ce sujet, [28]. Un point de vue profond et récent sur les immeubles se trouve dans [29]. La préhistoire des immeubles est relatée dans [9].

11. Bibliographie

Sauf exception, je n'ai pas donné les références concernant les œuvres des grands mathématiciens du XIXe siècle tels que Gergonne, Poncelet, Plücker. Une source précieuse et systématique à cet égard est la superbe histoire de la géométrie au XIXe siècle de Laptev et Rosenfeld [20]. Je recommande également l'ouvrage de Hauchecorne et Surateau [17].

[1] S.S. Abhyankar. Resolution of singularities and modular Galois theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 38, p. 131–169, 2000.

[2] R. Baer. *Linear algebra and projective geometry.* Academic Press, New York, 1952.

[3] J.C. Baez. The Octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 39, p. 145–205, 2001.

[4] G. Birkhoff. *Lattice theory.* American Math. Soc., 1940. Third edition expanded and reorganized, 1967. [MR 10,673a, 37#2638].

[5] G. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Math.*, Vol. 37, p. 823–843, 1936.

[6] Fr. Buekenhout. The rise of incidence geometry and buildings in the 20th century. In P.L. Butzer et al., editor, *Charlemagne and his heritage, 1200 years of civilization and science in Europe*, pages 235–256, Turnhout, 1998. Brepols. [MR 2000a:01022].

[7] Fr. Buekenhout. Prehistory and history of polar spaces and of generalized polygons. In *Intensive course on finite geometry and its applications*, Gent, April 3–14, 2000.

[8] Fr. Buekenhout. Le groupe des déplacements de l'espace euclidien. In *Séminaire CREM–GEPEMA–UREM*, 2001.

[9] Fr. Buekenhout. The prehistory of Tits buildings. In *Colloque International, Géométrie au vingtième siècle : 1930–2000*, Paris, 2001.

[10] K. Chemla. The background to Gergonne's treatment to duality : spherical trigonometry in the late 18th century. In D. Rowe and J. McCleary, editors, *The history of modern mathematics*, volume 1, pages 331–359, Boston, 1989. Academic Press. [MR 91b:01036].

[11] K. Chemla et S. Pahaut. Préhistoires de la dualité : explorations algébriques en trigonométrie sphérique (1753–1825). In Roshdi Rached, éditeur, *Sciences à l'époque de la révolution française*, pages 148–200, Paris, 1988. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

[12] J.L. Coolidge. *A history of the conic sections and quadric surfaces.* Dover, New York, 1968. [MR 8,1c].

[13] L.E. Dickson. *Linear groups with an exposition of the Galois field theory.* Dover, New York, 1958.

[14] J. Dieudonné. *Sur la géométrie des groupes classiques.* Springer, Berlin, 1955. [MR 17,236; 28#1239 et 46#9186].

[15] L. Geymonat. Le Principe de Dualité : sa signification historique et épistémologique. In L. Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis, editors, *1830–1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics.*, pages 175–177. Volume 402 of Lecture Notes in Physics, Berlin, 1992.

[16] J.J. Gray. Poincaré and Klein-Groups and Geometries. In L. Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis, editors, *1830–1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, pages 35–44. Volume 402 of Lecture Notes in Physics, Berlin, 1992.

[17] B. Hauchecorne et D. Surateau. *Des mathématiciens de A à Z.* Ellipses, 1996.

[18] T. Hawkins. *Emergence of the theory of Lie groups. An Essay in the History of Mathematics 1869–1926.* Springer, New York, 2000.

[19] C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, 1870. Actuellement diffusé par les éditions Jacques Gabay, Paris.

[20] B.L. Laptev and B.A. Rosenfeld. In A.N. Kolmogorov and Yushkevich, editors, *Mathematics of the 19th century*, pages 1–118. Birkhäuser, Basel, 1996.

[21] E. Nagel. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris*, Vol. 7, 1939. Cité d'après [16].

[22] J. Tits. *Groupes et Géométries de Coxeter.* Institut des Hautes Études Scientifiques. Notes polycopiées, pages 1–26.

[23] J. Tits. Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. *Bull. Soc. Math. Belg.*, Vol. 8, p. 48–81, 1956. [MR 19,430d].

[24] J. Tits. Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent. *Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math.*, Vol. 2, p. 13–60, 1959.

[25] J. Tits. Les groupes simples de Suzuki et de Ree. *Séminaire Bourbaki*, Vol. 13, p. 1–18, 1960.

[26] J. Tits. Géométries polyédriques et groupes simples. In *Deuxième réunion du Groupement de mathématiciens d'expression latine*, pages 66–88, Florence, Sept. 1961, 1962.

[27] J. Tits. Géométries polyédriques finies. *Rendiconti di Mat.*, Vol. 23, p. 156–165, 1964. [MR 32#1251].

[28] J. Tits. *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, volume 386 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. [MR 57#9866].

[29] J. Tits and R. Weiss. *The classification of Moufang polygons.* Springer, 2002. À paraître.

[30] O. Veblen and J.W. Young. *Projective Geometry*, volume I. Blaisdell, New York, 1910. Vol. II, 1917.

Université libre de Bruxelles - CP 216
Département de Mathématique
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique
e-mail : fbueken@ulb.ac.be

Cahiers du Centre de logique
Volume 12

Théorie des ensembles et dualité

par

M. Boffa
Université de Mons-Hainaut

1. Au cours de ses recherches en analyse mathématique, Cantor a été amené à prolonger la suite des nombres naturels $0, 1, 2, \ldots$ au-delà du fini, en créant d'une part les (nombres) *ordinaux* $0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$ permettant d'énumérer (les éléments d')un ensemble quelconque (alors que les nombres naturels ne permettent d'énumérer que les ensembles finis ou dénombrables) et d'autre part les (nombres) *cardinaux* $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots$ (où α parcourt les ordinaux) permettant de définir la puissance (c'est-à-dire le nombre d'éléments) d'un ensemble quelconque (alors que les nombres naturels ne le permettent que pour les ensembles finis).

Une définition précise des ordinaux et des cardinaux ne peut se faire que dans le cadre d'une théorie axiomatique des ensembles, par exemple *ZFC* (la théorie de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix).

Cantor a essayé en vain de déterminer la puissance du continu (c'est-à-dire celle de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels), en privilégiant l'*hypothèse du continu* selon laquelle cette puissance serait $\aleph_1$.

On sait aujourd'hui (suite aux travaux de Gödel et de Cohen) qu'on peut sans danger (de contradiction) adjoindre à *ZFC* l'une quelconque des hypothèses selon lesquelles la puissance du continu serait $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_{2000}, \ldots, \aleph_{\omega+1}, \ldots$ et on connaît même les valeurs ($\aleph_0, \aleph_\omega$ et d'autres) qui doivent être exclues.

On comprend donc pourquoi la valeur de la puissance du continu ne joue pas un rôle fondamental en analyse mathématique, où l'on n'utilise que *ZFC*.

Cependant, nous allons voir que cette valeur joue un rôle dans l'étude comparative des notions de mesure (Borel, Lebesgue) et de catégorie (Baire).

2. En 1934, Sierpiński [4] montrait que *sous l'hypothèse du continu* il existe une *dualité* entre les ensembles (de réels) de mesure nulle (que nous appellerons ensembles *nuls*) et ceux de 1ère catégorie (que nous appellerons ensembles *maigres*) : de toute proposition (de caractère ensembliste) portant sur la notion d'ensembles nuls [resp. maigres], on peut déduire la proposition duale obtenue en remplaçant cette notion par celle d'ensembles maigres [resp. nuls].

En 1943, Erdős [2] améliorait ce résultat en montrant (toujours sous l'hypothèse du continu) que de toute proposition (de caractère ensembliste) portant à la fois sur les notions d'ensembles nuls et d'ensembles maigres, on peut déduire la proposition duale obtenue en échangeant ces deux notions.

Cette *dualité nuls-maigres de Sierpiński-Erdős* se démontre sous la forme plus précise suivante : *sous l'hypothèse du continu, il existe une involution de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une permutation de $\mathbb{R}$ qui coïncide avec son inverse) qui échange les ensembles nuls et les ensembles maigres.*

La preuve consiste d'abord à diviser $\mathbb{R}$ en deux morceaux complémentaires N et M de sorte que N soit nul et M soit maigre, puis (grâce à l'hypothèse du continu) à partitionner N [resp. M] en $\aleph_1$ ensembles maigres [resp. nuls] de puissance $\aleph_1$ de telle sorte que les ensembles maigres [resp. nuls] coïncident avec les ensembles de réels qui ne coupent qu'un ensemble au plus dénombrable de classes de cette partition de N [resp. M], et enfin à choisir une involution de $\mathbb{R}$ qui échange les classes de la partition de N avec celles de la partition de M.

On trouvera tous les détails techniques de cette preuve dans l'ouvrage classique de Oxtoby [3], dont les chapitres 19 et suivants sont consacrés à la dualité nuls-maigres.

3. À titre d'exemple, considérons la proposition suivante établie par Lusin (en 1914) : sous l'hypothèse du continu, tout ensemble (de réels) non maigre contient un ensemble infini non dénombrable dont la trace sur chaque ensemble maigre est au plus dénombrable (un tel ensemble s'appelle aujourd'hui un *ensemble de Lusin*).

Cette proposition est importante, car elle montre que l'hypothèse du continu réfute la *conjecture de Borel* selon laquelle tout ensemble fortement nul est au plus dénombrable, puisqu'on peut montrer que tout ensemble de Lusin est fortement nul [un ensemble est *fortement nul* si on peut le recouvrir par une infinité dénombrable d'intervalles dont les longueurs sont bornées par des nombres (> 0) arbitrairement petits, alors qu'un ensemble est nul si on exige seulement que la somme de ces longueurs est bornée par un nombre (> 0) arbitrairement petit].

Par la dualité nuls-maigres, la proposition de Lusin nous donne immédiatement la suivante (établie pour la première fois par Sierpiński en 1924) : sous l'hypothèse du continu, tout ensemble non nul contient un ensemble infini non dénombrable dont la trace sur chaque ensemble nul est au plus dénombrable (un tel ensemble s'appelle aujourd'hui un *ensemble de Sierpiński*).

La notion d'ensemble fortement nul n'étant pas définie en termes purement ensemblistes à partir de celle d'ensemble nul (puisqu'on fait appel à la notion métrique de longueur d'intervalle), la dualité nuls-maigres ne conduit pas à une notion d'ensemble fortement maigre qui serait la duale de celle d'ensemble fortement nul. Il est cependant possible de définir une notion d'ensemble *fortement maigre*, telle que tout ensemble de Sierpiński soit fortement maigre, et donnant lieu à une conjecture guilleduale de Borel selon laquelle tout ensemble fortement maigre est au plus dénombrable. Tout cela est détaillé dans le chapitre 8 de [1], où il est également montré que la conjecture de Borel et sa « duale » sont compatibles avec l'hypothèse que la puissance du continu est $> \aleph_1$.

4. La question de savoir si la dualité nuls-maigres de Sierpiński-Erdős nécessite l'hypothèse du continu n'a pu être résolue qu'après l'introduction de la technique du forcing par Cohen en 1963. La réponse est qu'on peut construire une grande variété de modèles de *ZFC* niant l'hypothèse du continu et dans lesquels cette dualité est tantôt conservée, tantôt réfutée. La raison profonde de ce résultat est que sans l'hypothèse du continu, les notions d'ensembles nuls et d'ensembles maigres ne se comportent plus de manière symétrique. Dans les dernières décennies du XXe siècle, cette asymétrie a fait l'objet de nombreuses recherches, décrites en détail dans un important ouvrage (de plus de 500 pages) de Bartoszyński et Judah [1].

Afin d'avoir un aperçu de cette asymétrie, considérons les cardinaux suivants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{add}(N) = {} & \text{le plus petit cardinal } \kappa \text{ pour lequel} \\
& \text{il existe } \kappa \text{ ensembles nuls dont} \\
& \text{la réunion est un ensemble non nul,} \\
\mathrm{cof}(N) = {} & \text{le plus petit cardinal } \lambda \text{ pour lequel} \\
& \text{il existe } \lambda \text{ ensembles nuls tels que} \\
& \text{chaque ensemble nul soit inclus dans} \\
& \text{au moins l'un de ceux-ci,}
\end{aligned}$$

où N désigne l'ensemble des ensembles nuls; $\mathrm{add}(N)$ est l'*additivité* de N et $\mathrm{cof}(N)$ est la *cofinalité* de N; on définit de même l'additivité $\mathrm{add}(M)$ et la cofinalité $\mathrm{cof}(M)$ de l'ensemble M des ensembles maigres.

Il est clair que

$$\begin{cases} \aleph_1 \leqslant \mathrm{add}(N) \leqslant \mathrm{cof}(N) \leqslant c, \\ \aleph_1 \leqslant \mathrm{add}(M) \leqslant \mathrm{cof}(M) \leqslant c, \end{cases}$$

où c désigne la puissance du continu.

L'asymétrie nuls-maigres dans *ZFC* provient du fait qu'on peut y démontrer que

$$\aleph_1 \leqslant \mathrm{add}(N) \leqslant \mathrm{add}(M) \leqslant \mathrm{cof}(M) \leqslant \mathrm{cof}(N) \leqslant c$$

(voir le chapitre 2 de [1]), mais que ce sont les seules inégalités liant ces six cardinaux qui y soient démontrables (voir le chapitre 7 de [1]). Enfin, l'hypothèse $\mathrm{add}(N) = \mathrm{cof}(N)$ (qui est plus faible que l'hypothèse du continu) suffit pour établir la dualité de Sierpiński-Erdős (voir [1], p. 38), ce qui explique pourquoi cette dualité est compatible avec l'hypothèse $c > \aleph_1$.

Références

[1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set theory (On the structure of the real line).* A.K. Peters, 1995.

[2] P. Erdős. Some remarks on set theory. *Ann. of Math.*, Vol. 44, p. 643–646, 1943.

[3] J.C. Oxtoby. *Measure and category.* Springer, 1971.

[4] W. Sierpiński. Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle. *Fund. Math.*, Vol. 22, p. 276–280, 1934.

Université de Mons–Hainaut
Institut de Mathématique et d'Informatique
"Le Pentagone"
Avenue du Champ de Mars 6
7000 Mons
Belgique

Cahiers du Centre de logique
Volume 12

La dualité gauche-droite en théorie des catégories

par

Fr. Borceux
Université catholique de Louvain

La popularité de la théorie des ensembles, tout au long du vingtième siècle, influence fortement la manière dont, aujourd'hui, nous abordons l'étude de certains problèmes mathématiques.

Il est parfaitement naturel, pour traiter un problème, de le situer dans un contexte formel adéquat, d'utiliser la structure mathématique la mieux adaptée. Cette structure mathématique est le plus souvent décrite par un ensemble sur lequel agissent certaines lois de composition — par exemple, un groupe — ou un ensemble sur lequel sont définies certaines relations — par exemple, un ensemble ordonné — ou encore un ensemble muni d'un choix de parties — par exemple, un espace topologique — ou un ensemble muni d'une métrique, etc., etc., avec toutes les combinaisons possibles de ces éléments de structure et tous les axiomes les plus divers que l'on choisit d'imposer à ces structures.

Tout naturellement, on considère entre ces ensembles munis d'une structure fixée les applications ensemblistes qui respectent la structure en cause. Ce sont les *morphismes* de la théorie : les homomorphismes de groupes, les applications linéaires entre espaces vectoriels, les applications continues entre espaces topologiques, etc. Cela nous fournit immédiatement la *catégorie* associée à une structure mathématique $\mathcal{S}$ fixée :

- les *objets* de la catégorie sont les ensembles munis de la structure $\mathcal{S}$;
- entre deux objets de la catégorie on dispose de *flèches* qui sont les morphismes de la théorie $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les applications du premier objet vers le second qui respectent la structure $\mathcal{S}$.

Cet exemple des ensembles munis d'une structure $\mathcal{S}$ soutient on ne peut mieux l'intuition sous-jacente à la notion abstraite de « catégorie ».

Une categorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'éléments de deux types différents :

- *des* objets*, notés A, B, C, ... ;*
- *d'un objet A vers un objet B, des* flèches *notées $f \colon A \longrightarrow B$;*

ainsi que d'une loi de composition

- *deux flèches f et g situées « bout à bout » sont composables, comme dans le triangle ci-dessous :*

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dotted, "g \circ f"] & & C
\end{tikzcd}
$$

Ces données sont astreintes à satisfaire deux axiomes :

- *la loi de composition est associative ;*
- *pour tout objet B, il existe une flèche $1_B \colon B \longrightarrow B$ qui est un élément neutre pour la loi de composition.*

Par exemple

- les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications ;
- les objets sont les groupes et les flèches sont les homomorphismes de groupes ;

- les objets sont les espaces topologiques et les flèches sont les applications continues ;
- les objets sont les espaces de Banach réels et les flèches sont les applications linéaires continues ;
- etc, etc.

Notons d'emblée que même si cet exemple nous a servi de fil conducteur, une catégorie n'a aucune raison d'être construite en termes d'ensembles munis d'une certaine structure. Voici par exemple une catégorie fort naturelle :

- les objets sont les nombres entiers positifs 1, 2, 3, ... ;
- une flèche de n vers m est une matrice à m lignes et n colonnes, à coefficients dans un anneau unitaire R ;
- la loi de composition est la multiplication matricielle.

Que l'on s'intéresse ou pas à la théorie des catégories, quand on a exhibé une structure mathématique $\mathcal{S}$, on s'intéresse tout naturellement aux propriétés des homomorphismes respectant cette structure. Par exemple, dans la théorie des espaces de Banach réels, on s'intéresse au théorème de Hahn-Banach :

> *Étant donné un sous-espace de Banach $B_0 \subseteq B$, toute forme linéaire continue définie sur B_0 s'étend en une forme linéaire continue définie sur B.*

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "g"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Voilà un exemple de propriété qui s'exprime entièrement en termes d'objets et de flèches de la catégorie des espaces de Banach, sans plus aucune référence au fait que les objets sont des ensembles munis d'une certaine structure. Voilà donc une propriété qui peut s'exprimer pour un objet R

quelconque d'une catégorie quelconque, propriété qui peut être valide ou pas, qui peut être prise comme axiome ou pas. (Nous reviendrons plus loin sur la notion de « sous-espace » dans une catégorie quelconque.)

Ce type de considération a conduit divers auteurs à proposer la notion de catégorie comme notion primitive sur laquelle baser le développement des mathématiques.

Reprenons notre exemple. Un espace de Banach, c'est un ensemble muni d'une certaine structure. Mais qu'est-ce qu'un ensemble ? Cela ne se définit pas ! C'est une notion primitive dont nous exigeons qu'elle satisfasse un certain nombre d'axiomes : les axiomes de la théorie des ensembles sur laquelle nous jetons notre dévolu. Et cet objet primitif est un espace de Banach lorsqu'il est muni de diverses opérations et autres structures, que nous ne définissons pas davantage, mais dont nous précisons qu'elles satisfont certains autres axiomes.

Formellement, il est tout aussi raisonnable de choisir comme notions primitives celles d'objet et de flèche, auxquelles nous imposons de satisfaire les axiomes de catégorie. Et puis nous pouvons imposer à notre catégorie de satisfaire un certain nombre d'axiomes supplémentaires — par exemple l'existence d'un objet R satisfaisant l'axiome de Hahn-Banach. Et bien sûr, même si la chose n'a jamais été poussée jusque là, nous pouvons très bien imaginer définir un espace de Banach comme étant un objet d'une catégorie satisfaisant une liste *ad hoc* d'axiomes : des axiomes caractérisant précisément la catégorie des espaces de Banach.

En fait, cette approche catégorique des mathématiques ne vise pas principalement à caractériser par des axiomes catégoriques la catégorie des modèles d'une structure mathématique $\mathcal{S}$ précise, telle que définie ensemblistement. Elle vise au contraire à dégager les axiomes catégoriques qui permettent de développer certaines théories : la théorie des suites exactes, la théorie des groupes d'homotopie, etc. En général plusieurs structures mathématiques ensemblistes différentes permettent ce type de développement et l'approche catégorique vise à unifier ces approches dans un même contexte catégorique. L'exemple célèbre des catégories modèles-fermées pour développer les théories de l'homotopie a d'ailleurs valu à son auteur, Quillen, d'obtenir la médaille Fields.

Je vais développer cette idée d'approche catégorique des structures mathématiques dans deux cas particuliers célèbres : les topos, qui modélisent exactement les théories des ensembles intuitionistes, et les catégories abéliennes, qui modélisent les contextes où développer une théorie efficace des suites exactes, donc des théories d'homologie et de cohomologie. Et bien entendu j'accorderai une attention toute particulière aux problèmes de dualité, qui trouvent ici un contexte naturel où développer toute leur puissance.

En effet, si je pense un « modèle d'une structure mathématique $\mathcal{S}$ » non plus comme un « ensemble muni de structures additionelles, satisfaisant certains axiomes » mais plutôt comme un « objet d'une catégorie satisfaisant certains axiomes additionnels », il résulte aussitôt que toute structure mathématique admet une structure duale. Et plusieurs de ces exemples de dualité catégorique sont de véritables monuments de l'histoire des mathématiques.

L'observation triviale de départ est que toute catégorie $\mathcal{C}$ possède une catégorie duale $\mathcal{C}^*$.

$\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}^*$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f^*"'] & \\ A & & C \arrow[ul, "g^*"'] \arrow[ll, "f^* \circ g^* = (g \circ f)^*"] \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathcal{C}^*$ duale de $\mathcal{C}$ est obtenue comme suit :

- *$\mathcal{C}^*$ a les mêmes objets que $\mathcal{C}$;*
- *pour toute flèche $f \colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, on se donne une flèche $f^* \colon B \longrightarrow A$ dans $\mathcal{C}^*$;*
- *la loi de composition de $\mathcal{C}^*$ est définie par $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.*

Le fait que $\mathcal{C}^*$ soit encore une catégorie est tout simplement trivial.

Et bien sûr on en déduit aussitôt un *principe de dualité* :

> *Si l'énoncé $\mathcal{P}$ est un théorème dans toute catégorie,*
> *Alors l'énoncé $\mathcal{P}^*$, obtenu en renversant le sens de toutes les flèches et l'ordre de tous les composés, est aussi un théorème dans toute catégorie.*

En effet, démontrer $\mathcal{P}^*$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ quelconque revient à établir $\mathcal{P}$ dans la catégorie $\mathcal{C}^*$, ce qui est vrai par hypothèse.

Illustrons cela par un exemple banal.

Une flèche f d'une catégorie est un monomorphisme *lorsque*

$$\forall X \quad \forall u,v \quad X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B, \quad f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v.$$

Il est facile de vérifier que dans la catégorie des ensembles et applications, les monomorphismes sont exactement les injections. De même dans les catégories des groupes, des anneaux, des espaces topologiques, des espaces de Banach et dans beaucoup d'autres, les monomorphismes sont les morphismes injectifs. On utilise généralement la notation $\rightarrowtail$ pour désigner un monomorphisme.

La notion duale est celle d'épimorphisme, obtenue en renversant le sens de toutes les flèches.

Une flèche f d'une catégorie est un épimorphisme *lorsque*

$$\forall X \quad \forall u,v \quad X \overset{u}{\underset{v}{\leftleftarrows}} A \xleftarrow{f} B, \quad u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v.$$

Il est facile de vérifier que dans la catégorie des ensembles et applications, les épimorphismes sont les surjections. Les épimorphismes de groupes sont également les homomorphismes surjectifs, mais c'est loin d'être banal à prouver. Les épimorphismes dans la catégorie des anneaux unitaires commutatifs ne sont plus surjectifs : il est aisé de voir que l'inclusion $\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ des entiers dans les rationnels est un épimorphisme. Par ailleurs les épimorphismes d'espaces de Banach sont les applications linéaires continues denses : $f\colon A \longrightarrow B$ avec $\overline{f(A)} = B$. On utilise généralement la notation $\twoheadrightarrow$ pour désigner un épimorphisme.

Citons un théorème trivial à propos des monomorphismes :

> *Si un composé $g \circ f$ est un monomorphisme,*
> *Alors f est un monomorphisme.*

En effet on a aussitôt :

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v) \Rightarrow (g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v \Rightarrow u = v.$$

Par dualité, le théorème suivant est donc également vrai dans toute catégorie :

> *Si un composé $f \circ g$ est un épimorphisme,*
> *Alors f est un épimorphisme.*

Il va de soi que l'on apprécie davantage le principe de dualité dans le cas d'une démonstration de plusieurs pages.

Pour conclure ces exemples introductifs, observons que certaines notions sont leur propre duale. Par exemple la notion — on ne peut plus classique — d'isomorphisme.

> *Une flèche $f: A \longrightarrow B$ est un* isomorphisme *lorsqu'il existe une flèche $f^{-1}: B \longrightarrow A$ telle que $f \circ f^{-1} = 1_B$ et $f^{-1} \circ f = 1_A$.*

La notion duale est celle d'une flèche $f: B \longrightarrow A$ telle qu'il existe une flèche $f^{-1}: A \longrightarrow B$ avec les propriétés $f^{-1} \circ f = 1_B$ et $f \circ f^{-1} = 1_A$. C'est bien la notion d'isomorphisme.

Le principe de dualité catégorique est tellement banal, sa démonstration est tellement triviale, que l'on peut se demander si quoi que ce soit de profond pourra jamais en résulter. Pour vous convaincre que « oui », je voudrais développer maintenant les deux exemples déjà cités : les topos et les catégories abéliennes.

Prenons tout d'abord une catégorie $\mathcal{E}$ et essayons d'y exprimer, en termes catégoriques, certains axiomes de la théorie des ensembles. C'est-à-dire imaginons un moment que $\mathcal{E}$ est la catégorie des ensembles et des applications et essayons de trouver, en termes d'objets et de flèches de $\mathcal{E}$, des formulations équivalentes à certains axiomes classiques de la théorie des ensembles.

Premier axiome : *l'existence d'un ensemble « singleton ».*

Traduction catégorique :

Il existe un objet $1 \in \mathcal{E}$
tel que pour tout objet $X \in \mathcal{E}$
il existe une unique flèche $X \longrightarrow 1$.

Dans la catégorie des ensembles, les singletons sont en effet les seuls et uniques ensembles à posséder cette propriété : cette propriété les caractérise. C'est trivial. Un objet 1 possédant la propriété ci-dessus s'appelle un *objet final.*

Quelle est la notion duale ?

Il existe un objet $0 \in \mathcal{E}$
tel que pour tout objet $X \in \mathcal{E}$
il existe une unique flèche $X \longleftarrow 0$.

Dans la catégorie des ensembles, cette propriété caractérise l'ensemble vide. Un objet 0 possédant la propriété ci-dessus s'appelle un *objet initial.*

Il n'est pas bien difficile d'observer la forme de l'objet final 1 et de l'objet initial 0 dans diverses catégories usuelles :

- dans la catégorie des ensembles ou dans la catégorie des espaces topologiques $1 = \{*\}$ et $0 = \varnothing$;

- dans la catégorie des groupes, des groupes abéliens, des modules sur un anneau, des espaces de Banach, $1 = (0) = 0$;

- dans la catégorie des anneaux unitaires, $1 = (0)$ et $0 = \mathbb{Z}$.

Deuxième axiome : *l'existence de produits cartésiens.*

Traduction catégorique :

Étant donné deux objets A *et* B *de* $\mathcal{E}$
il existe un objet $P \in \mathcal{E}$ *et deux flèches* p_A, p_B *comme ci-dessous*
tels que pour tout autre objet $Q \in \mathcal{E}$ *muni de deux flèches* q_A, q_B
comme ci-dessous

il existe une unique flèche q telle que $p_A \circ q = q_A$ et $p_B \circ q = q_B$.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr, dotted, "\exists! q"] \arrow[dr, "q_A"'] \arrow[drrr, "q_B"] & & P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\
& A & & B
\end{tikzcd}$$

Dans le cas des ensembles, il suffit en effet de définir

$$P = \{(a,b) \mid a \in A,\, b \in B\}$$

avec p_A, p_B les deux projections usuelles. La flèche q en cause n'est autre que l'application $q(x) = \big(q_A(x),q_B(x)\big)$, avec $x \in Q$. Il est facile d'observer que la propriété catégorique ci-dessus, dans le cas de la catégorie des ensembles, caractérise le produit cartésien des deux ensembles A et B de manière unique (à un isomorphisme près). Dans la situation ci-dessus, le triplet (P,p_A,p_B) est appelé *produit de A et B* et noté $A \times B$.

Observons la propriété duale.

Étant donné deux objets A et B de $\mathcal{E}$
il existe un objet $P \in \mathcal{E}$ et deux flèches p_A, p_B comme ci-dessous
tels que pour tout autre objet $Q \in \mathcal{E}$ muni de deux flèches q_A, q_B
comme ci-dessous
il existe une unique flèche q telle que $q \circ p_A = q_A$ et $q \circ p_B = q_B$.

$$\begin{tikzcd}
Q & & P \arrow[ll, dotted, "\exists! q"'] & \\
& A \arrow[ul, "q_A"] \arrow[ur, "p_A"'] & & B \arrow[ulll, "q_B"'] \arrow[ul, "p_B"']
\end{tikzcd}$$

Un tel triplet (P, p_A, p_B) est appelé *somme de A et B* et noté $A \amalg B$. Dans le cas de la catégorie des ensembles, il est banal d'observer que si A et B sont deux ensembles disjoints, $A \amalg B$ n'est autre que leur réunion. Plus généralement, la somme de deux ensembles A et B est leur union disjointe.

Les notions ci-dessus peuvent prendre des formes variées dans les catégories les plus usuelles.

- Dans la catégorie des ensembles, ou celle des espaces topologiques, $A \times B$ est le produit cartésien et $A \amalg B$ est l'union disjointe.
- Dans la catégorie des groupes, $A \times B$ est le produit cartésien et $A \amalg B$ est le produit libre.
- Dans la catégorie des groupes abéliens ou des modules sur un anneau, $A \times B$ et $A \amalg B$ sont tous deux le produit cartésien, c'est-à-dire encore la somme directe.
- Dans la catégorie des anneaux unitaires commutatifs, $A \times B$ est le produit cartésien et $A \amalg B$ est le produit tensoriel $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Le troisième axiome que nous allons considérer est un cas particulier du *schéma de compréhension.* Rappelons que le schéma de compréhension exige qu'étant donné une formule $\varphi(x)$ de la théorie des ensembles et un ensemble A, les éléments $a \in A$ qui satisfont φ constituent encore un ensemble. Notre cas particulier sera celui où l'on considère deux applications $f,g\colon A \rightrightarrows B$ et où la formule φ en cause est simplement $f(x) = g(x)$. (Nous évoquerons plus loin le schéma de compréhension dans sa forme générale.)

Description catégorique :

Étant donné deux flèches $f,g\ : A \rightrightarrows B$ de $\mathcal{E}$
il existe un objet $K \in \mathcal{E}$ et une flèche k telle que $f \circ k = g \circ k$
et telle en outre que pour tout objet $L \in \mathcal{E}$ et toute flèche l telle que $f \circ l = g \circ l$
il existe une unique flèche m telle que $k \circ m = l$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dotted, "m"'] \arrow[dr, "l"] & & \\
K \arrow[r, "k"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Dans le cas des ensembles et applications, il est banal d'observer que cette propriété caractérise bien (à un isomorphisme près) l'ensemble

$$K = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$$

avec pour k l'inclusion canonique. Dans la propriété ci-dessus, le couple (K,k) est appelé *égalisateur de f et g* et noté $\mathsf{Ker}(f,g)$.

Observons la propriété duale :

> *Étant donné deux flèches $f,g\colon B \rightrightarrows A$ de $\mathcal{E}$*
> *il existe un objet $K \in \mathcal{E}$ et une flèche k telle que $k \circ f = k \circ g$*
> *et telle en outre que pour tout objet $L \in \mathcal{E}$ et toute flèche l telle que $l \circ f = l \circ g$*
> *il existe une unique flèche m telle que $m \circ k = l$.*

$$\begin{tikzcd}
L & & \\
K \arrow[u, dotted, "m"] & A \arrow[l, "k"'] \arrow[ul, "l"'] & B \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"]
\end{tikzcd}$$

Dans le cas des ensembles et applications, on vérifie que (K,k) est cette fois le quotient de l'ensemble A par la relation d'équivalence engendrée par les couples $\big(f(b),g(b)\big)$, pour tout élément $b \in B$. Un couple tel que (K,k) ci-dessus est appelé *coégalisateur de f et g* et noté $\mathsf{Coker}(f,g)$.

L'unité de la factorisation m dans les considérations précédentes implique aussitôt que tout égalisateur est un monomorphisme. Par dualité, tout coégalisateur est un épimorphisme.

Citons à nouveau quelques exemples.

- Dans la catégorie des espaces topologiques et applications continues, l'égalisateur et le coégalisateur de deux flèches se calculent comme dans les ensembles et sont respectivement munis de la topologie induite ou de la topologie quotient.

- Dans le cas d'une structure algébrique (groupe, anneau, etc.) l'égalisateur se calcule comme dans les ensembles et est muni des lois induites. Le coégalisateur est par contre le quotient par la congruence algébrique engendrée par les couples $\big(f(b),g(b)\big)$.

- Dans la catégorie des espaces de Banach et applications linéaires continues, l'égalisateur ensembliste de deux flèches, muni de la structure induite, est un sous-espace fermé, donc un sous-espace de Banach. Et tout sous-espace de Banach peut être présenté comme le noyau d'un morphisme d'espaces de Banach, donc l'égalisateur d'une flèche et de la flèche nulle. La notion de *sous-espace* qui apparaît dans la propriété de Hahn-Banach n'est donc rien d'autre que la notion d'égalisateur.

Le quatrième axiome de la théorie des ensembles que je veux évoquer est l'axiome des parties. Il faut d'abord donner une définition catégorique de la notion de *partie d'un objet*, que l'on appelle plus communément *sous-objet*.

On pourrait être tenté de dire qu'un sous-objet de l'objet A est un monomorphisme $s\colon S \rightarrowtail A$, puisque dans la catégorie des ensembles, les monomorphismes sont les injections. À de nombreuses fins, une injection est en effet tout aussi bonne qu'un sous-ensemble. Mais certainement pas pour définir *l'ensemble des parties de* A. En effet, il y a beaucoup plus d'injections à valeurs dans A que de sous-ensembles de l'ensemble A ; pensez — par exemple — à toutes les permutations de A. Mais il est par contre évident que toute injection $s\colon S \rightarrowtail A$ est isomorphe à un et un seul sous-ensemble de A, à savoir, son image $s(S) \subseteq A$. Nous définirons donc

> *Dans une catégorie $\mathcal{E}$, deux monomorphismes s et t de but A sont* équivalents *lorsqu'il existe un isomorphisme f tel que $t \circ f = s$.*
> *Un* sous-objet *de A est une classe d'équivalence de monomorphismes de but A, pour la relation ci-dessus.*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dd, shift right, "f"'] \arrow[dr, tail, "s"] & \\
& A \\
T \arrow[uu, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[ur, tail, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans la catégorie des ensembles, les sous-objets de l'ensemble A se trouvent donc bien en bijection avec les sous-ensembles de A.

Voici alors la formulation catégorique de l'axiome des parties :

> *Soit $\mathcal{E}$ une catégorie admettant des produits.*
> *Pour tout objet B de la catégorie $\mathcal{E}$*
> *il existe un objet $\mathcal{P}(B) \in \mathcal{E}$ induisant,*
> *pour tout objet $A \in \mathcal{E}$, une bijection naturelle entre*
>
> - *les sous-objets de $A \times B$;*
> - *les flèches $A \longrightarrow \mathcal{P}(B)$.*

(Le caractère « naturel » n'est autre que le fait que ces constructions sur les objets s'étendent aux flèches $f\colon A \longrightarrow A'$ d'une manière compatible.) Pour comprendre la portée de cet axiome, rappelons-nous simplement que dans le cas ensembliste, il existe trivialement des bijections naturelles entre

- les sous-ensembles de $A \times B$;
- les relations de A vers B ;
- les applications de A vers $\mathcal{P}(B)$.

Dans la catégorie des ensembles il est facile d'observer que, à un isomorphisme près, l'ensemble $\mathcal{P}(B)$ des parties de B est bien le seul à avoir cette propriété. À nouveau, cette propriété le caractérise.

Nous disposons ainsi de tous les ingrédients nécessaires pour définir un *topos :*

> *Un* topos *est une catégorie $\mathcal{E}$ qui satisfait les axiomes suivants :*
>
> (a) *il existe un objet final 1 ;*
>
> (b) *le produit $A \times B$ de deux objets quelconques A, B existe ;*
>
> (c) *l'égalisateur de deux flèches quelconques $f,g\colon A \rightrightarrows B$ existe ;*
>
> (d) *l'objet $\mathcal{P}(B)$ des sous-objets d'un objet quelconque B existe.*

Sous leur apparente simplicité, ces axiomes cachent des propriétés extrêmement puissantes. Par exemple un topos admet un objet initial, des sommes et des coégalisateurs, donc satisfait les propriétés duales des axiomes (a), (b), (c) ci-dessus.

Mais les quatre axiomes ci-dessus, auxquels se superposent les axiomes de catégorie, ne l'oublions pas, impliquent bien davantage. Jugez plutôt.

Les topos sont exactements les catégories de modèles des théories intuitionistes des ensembles.

Donc dans le cas de la théorie intuitioniste des ensembles, nous avons pu boucler le programme évoqué plus haut. Nous avons pris comme notions primitives des objets et des flèches et nous leur avons imposé de constituer une catégorie $\mathcal{E}$ satisfaisant les quatre axiomes ci-dessus. Un ensemble intuitioniste, c'est maintenant un objet du topos $\mathcal{E}$.

Le théorème ci-dessus est évidemment profond. Il sous-entend en particulier que l'on peut donner un sens, dans un topos, à tous les termes et toutes les formules de la théorie des ensembles, donc notamment l'égalité, l'appartenance, les connecteurs logiques, les quantificateurs, etc. Ces notions une fois introduites, elles satisfont toutes les règles du calcul propositionnel et du calcul des prédicats intuitionistes, ainsi que tous les axiomes de la théorie intuitioniste des ensembles : axiome d'extensionalité, de remplacement, d'union, le schéma de compréhension dans sa forme générale, etc.

On peut bien sûr ajouter davantage d'axiomes à la notion de topos, dont le plus naturel est certainement *l'axiome de l'infini :*

Il existe un objet A qui soit isomorphe à la somme $A \amalg 1$, où 1 est l'objet final.

On peut aussi ajouter des axiomes qui nous écartent des théories intuitionistes des ensembles, comme par exemple *l'axiome du choix :*

Tout épimorphisme admet une section.

Mais ce n'est pas ici notre propos : revenons à la dualité.

Nous venons de voir qu'il est équivalent de définir une théorie intuitioniste des ensembles comme la donnée d'un *topos :* un ensemble intuitioniste de cette théorie est alors un objet de ce topos. Il existe donc une théorie duale de cette théorie des ensembles intuitionistes, une théorie dont la catégorie des modèles est la catégorie duale du topos considéré. Que peut-on dire de la duale d'une théorie des ensembles?

En théorie classique des ensembles, on sait que

> *La duale de la catégorie des ensembles et applications est la catégorie des algèbres de Boole atomiques complètes et des morphismes d'algèbres de Boole préservant les suprema et infima quelconques.*

La correspondance associe à chaque ensemble son algèbre de Boole de parties et à chaque application, l'image réciproque le long de cette application. Cela montre donc qu'en théorie des ensembles classiques, la notion duale d'ensemble est celle d'algèbre de Boole atomique complète. Tout théorème P de l'une de ces théories fournit donc automatiquement un théorème dual P^* de l'autre théorie : il n'y a ni plus ni moins dans une théorie que dans l'autre.

Mais plus généralement qu'en est-il pour les topos, qui sont les catégories de modèles des théories d'ensembles intuitionistes ? Toujours en théorie classique des ensembles, les topos les plus populaires sont les topos de préfaisceaux ou de faisceaux. Un préfaisceau est une famille d'ensembles reliés par divers opérateurs : par exemple un ensemble simplicial, qui est une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles reliés par des *opérateurs face* et des *opérateurs bord*. Une théorie de faisceaux ajoute aux axiomes de préfaisceaux des opérations de « recollement » pour une topologie, au sens usuel ou au sens plus général de topologie de Grothendieck. Chaque tel topos de préfaisceaux ou de faisceaux correspond à une théorie intuitioniste des ensembles : que peut-on dire de la théorie duale ? On est loin aujourd'hui de connaître avec précision toutes ces théories duales, mais en tout cas ce sont toutes des *théories de Mal'cev*.

Je vous rappelle — ou je vous apprends — qu'une opération algébrique de Mal'cev est une opération ternaire $p(x,y,z)$ satisfaisant les deux axiomes

$$p(x,x,z) = z, \quad p(x,z,z) = x.$$

Une théorie algébrique est de Mal'cev lorsqu'elle possède au moins une opération de Mal'cev. C'est le cas de toute théorie algébrique contenant une opération de groupe : il suffit de poser

$$p(x,y,z) = x - y + z.$$

C'est le cas aussi de la théorie des algèbres de Boole, en posant

$$p(x,y,z) = x \triangle y \triangle z$$

où $\triangle$ est la différence symétrique. Plus généralement c'est le cas de la théorie des algèbres de Heyting, en posant

$$p(x,y,z) = \big((x \Rightarrow y) \Rightarrow z\big) \wedge \big((z \Rightarrow y) \Rightarrow x\big).$$

Etc.

Comme ci-avant, pour pouvoir considérer cette propriété dans nos réflexions sur la dualité des théories, nous souhaitons exprimer de manière catégorique le fait qu'une théorie soit de Mal'cev. Cela se fait aisément via le théorème suivant.

> *Une théorie algébrique est de Mal'cev*
> *si et seulement si*
> *dans la catégorie des modèles correspondante,*
> *toute relation réflexive est une relation d'équivalence.*

Avant toute chose, convainquons-nous que dans la catégorie des groupes, toute relation réflexive est une relation d'équivalence. On considère donc un groupe G et un sous-groupe $R \subseteq G \times G$ qui se trouve être une relation réflexive sur G. Il faut prouver que R est une relation d'équivalence. Tout d'abord si $(x,y) \in R$, alors $(-x,-y) \in R$ et par simple addition

$$(x,x) \in R \text{ et } (-x,-y) \in R \text{ et } (y,y) \in R \ \Rightarrow\ (y,x) \in R.$$

De même si $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$, à nouveau par simple addition

$$(x,y) \in R \text{ et } (-y,-y) \in R \text{ et } (y,z) \in R \ \Rightarrow (x,z) \in R.$$

Dans une catégorie $\mathcal{C}$ possédant des produits finis, une relation sur un objet $A \in \mathcal{C}$ est un monomorphisme $r\colon R \rightarrowtail A \times A$. Cela induit, pour tout autre objet $X \in \mathcal{C}$, une relation ensembliste R_X au sens usuel sur l'ensemble $\mathcal{C}(X,A)$ des flèches de X vers A dans $\mathcal{C}$. Deux flèches $f,g\colon X \rightrightarrows A$ induisent une unique factorisation $h : X \to A \times A$ à travers le produit et nous dirons que $(f,g) \in R_X$ lorsque h elle-même se factorise à travers r.

$$\begin{tikzcd}
& & R \arrow[d, tail, "r"] & \\
X \arrow[urr, dotted] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g"] & & A \times A \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& A & & A
\end{tikzcd}$$

La relation R sur l'objet A est dite réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, d'ordre, d'équivalence, etc., s'il en est ainsi de chacune des relations ensemblistes R_X. Il s'agit donc bien de propriétés exprimées en termes de flèches de la catégorie.

On dira dès lors que

> *Une catégorie possédant des produits est* de Mal'cev
> *lorsque toute relation réflexive y est une relation d'équivalence.*

Un théorème important est alors que

> *Le dual d'un topos est une catégorie de Mal'cev.*

En d'autres termes, la théorie duale d'une théorie d'ensembles intuitionistes est toujours une théorie de Mal'cev.

J'en viens maintenant à l'autre exemple évoqué plus haut : les catégories abéliennes, qui axiomatisent les contextes dans lesquels on peut développer une théorie efficace des suites exactes et à partir de là, des théories d'homologie ou de cohomologie. Les exemples de base sont les groupes abéliens, les modules sur un anneau, les modules gradués, les modules gradués différentiels, les préfaisceaux ou faisceaux de modules, etc.

Rappelons tout d'abord que dans la catégorie des groupes abéliens, comme dans toute catégorie de modules, le groupe nul, le module nul, est à la fois objet initial et final.

$$1 = (0) = 0.$$

Donc étant donné deux objets A et B quelconques, on dispose d'une unique flèche de A vers 1 et d'une unique flèche de 0 vers B :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 = 0 \arrow[dr, "\exists !"] & \\
A \arrow[ur, "\exists !"] \arrow[rr, dotted, "0"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Le composé de ces deux flèches est appelé la *flèche nulle* de A vers B. Pour toute flèche $f\colon A \longrightarrow B$, le noyau $\mathsf{Ker}\, f$ de cette flèche est alors l'égalisateur $\mathsf{Ker}(f,0)$ de f et de la flèche nulle, et dualement le conoyau $\mathsf{Coker}\, f$ de f est le coégalisateur de f et de la flèche nulle.

La notion de catégorie abélienne se décrit alors très simplement.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne *lorsque*

(a) *il existe un objet initial,*
il existe un objet final,
et ces deux objets sont isomorphes ;

(b) *le produit de deux objets existe,*
la somme de deux objets existe ;

(c) *toute flèche admet un noyau,*
toute flèche admet un conoyau ;

(d) *tout monomorphisme est un noyau,*
tout épimorphisme est un conoyau.

Observons bien toute la force du dernier axiome. Par exemple la catégorie des groupes satisfait les trois premiers axiomes, mais pas le dernier. En effet, le noyau d'un homomorphisme de groupes est toujours un sous-groupe normal … et il existe des sous-groupes — donc des monomorphismes — qui ne sont pas normaux.

Les catégories abéliennes ont de nombreuses propriétés, comme par exemple :

- le produit $A \times B$ de deux objets est isomorphe à leur somme $A \amalg B$;
- l'ensemble $\mathcal{C}(A,B)$ des flèches entre deux objets est naturellement muni d'une structure de groupe abélien ;
- toute flèche possède une *image*, c'est-à-dire une factorisation

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & B \\ & \mathsf{Im}\, f \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

  en un épimorphisme suivi d'un monomorphisme ;
- ceci permet de définir une suite exacte

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

  par le fait que $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\, g$;
- tous les lemmes classiques sur les suites exactes sont valides : lemme des 5, lemme des 9, lemme du serpent, etc.

Mais à nouveau ce n'est pas là notre objet ici : parlons de dualité.

L'observation fondamentale à ce propos est la suivante :

> *Le dual de toute catégorie abélienne est encore une catégorie abélienne.*

La preuve est immédiate : il suffit d'observer que chacun des quatre axiomes de catégorie abélienne est son propre dual. Notons bien la différence essentielle avec la théorie des topos.

Une théorie des ensembles n'est jamais une théorie de Mal'cev, car une relation réflexive sur un ensemble n'est généralement pas une relation d'équivalence. Dualiser un topos, dualiser la catégorie des modèles d'une théorie intuitioniste, nous projette hors du monde des ensembles, nous projette dans l'univers beaucoup plus algébrique des théories de Mal'cev, dont les ensembles ne font pas partie.

Mais dualiser une catégorie abélienne nous fait simplement voyager à l'intérieur du monde des catégories abéliennes. Le dual d'une théorie abélienne est une autre théorie abélienne. Et là aussi, on a pu calculer les théories duales de certaines théories abéliennes.

Par exemple, la catégorie des groupes abéliens finis est abélienne. Et il est remarquable d'observer que

La catégorie des groupes abéliens finis
est sa propre catégorie duale.

En notant U le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, cette dualité met un groupe A en correspondance avec son *groupe de caractères*, c'est-à-dire le groupe $\mathsf{Hom}(A,U)$ des homomorphismes de groupes de A vers U.

L'exemple précédent peut s'étendre à la catégorie des groupes abéliens toute entière : c'est la dualité de Pontryagin.

La duale de la catégorie des groupes abéliens
est la catégorie des groupes abéliens compacts.

Comme précédemment, on envoie le groupe abélien A sur son groupe de caractères $\mathsf{Hom}(A,U)$ qui est un sous-groupe fermé, donc compact, du produit topologique U^A, avec U compact. La catégorie des groupes abéliens compacts est donc en particulier une catégorie abélienne.

Outre ces deux exemples des topos et des catégories abéliennes, il y a beaucoup d'autres situations où la duale d'une théorie mathématique a été largement étudiée. Pour terminer je citerai, sans entrer dans les détails,

- *la dualité de Stone,* qui détermine la théorie duale de celle des algèbres de Boole : il s'agit de la théorie des espaces topologiques compacts, séparés, totalement discontinus (c'est-à-dire, possédant une base d'ouverts fermés) ; à une algèbre de Boole correspond son *spectre* d'ultrafiltres ;

- *la dualité de Gelfand,* qui détermine la théorie duale de celle des $\mathbb{C}^*$-algèbres commutatives : il s'agit de la théorie des espaces compacts de Hausdorff ; à une $\mathbb{C}^*$-algèbre correspond son *spectre* d'idéaux premiers fermés.

Références commentées

La théorie des catégories a été introduite au début des années 1940 par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane. Ils cherchaient à exprimer des conditions de naturalité et une notion générale de limite en vue de théorèmes de coefficients universels en cohomologie de Čech. L'article généralement considéré comme « fondateur » est

> S. Eilenberg and S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the AMS*, Vol. 58, p. 231–294, 1945.

Dès 1942 cependant, certaines idées de base de la théorie des catégories apparaissent déjà dans les travaux de ces deux auteurs. La notion de catégorie duale était présente dès l'origine.

De nombreux livres ont été consacrés à la théorie des catégories. Les plus populaires aujourd'hui sont sans doute

> S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer, 1971.

et plus récemment

> F. Borceux. *Handbook of categorical algebra I : Basic category theory.* Cambridge University Press, 1994.

Le livre de S. Mac Lane cité ci-avant contient notamment de brèves notes historiques sur la genèse des notions et des résultats de théorie des catégories.

Début des années 1950, Samuel Eilenberg et Norman Steenrod on montré que le langage des catégories peut être utilisé pour donner une une description axiomatique de l'homologie et de la cohomologie d'un espace topologique. D'où l'idée de caractériser axiomatiquement les catégories dans lesquelles de telles théories homologiques ou cohomologiques peuvent être développées. Ce fut fait par David Buchsbaum en 1955 :

> D. Buchsbaum. Exact categories and duality. *Transactions of the AMS*, Vol. 80, 1–34, 1955.

Cet article introduit la notion de *catégorie abélienne*. L'axiomatique correspondante a été fortement simplifiée par la suite, tout en restant équivalente à la définition originale de Buchsbaum.

Le succès énorme de la théorie des catégories abéliennes est venu de la découverte par Alexandre Grothendieck du fait que les faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique constituent une catégorie abélienne :

> A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, Vol. 9, p. 119–221, 1957.

Cela montrait en particulier que l'axiomatisation des catégories abéliennes était beaucoup plus générale que celle fournie par les théories de modules sur un anneau. Et d'autres exemples de plus en plus sophistiqués ont rapidement suivi.

On trouvera une brève introduction aux catégories abéliennes dans le livre de S. Mac Lane déjà cité, et un traitement plus approfondi dans

> F. Borceux. *Handbook of categorical algebra II: categories and structures*. Cambridge University Press, 1994.

Ce dernier ouvrage présente les catégories abéliennes à partir de l'axiomatique la plus raffinée telle qu'évoquée dans le présent travail.

La théorie des topos trouve sans doute son origine dans les travaux d'Alexandre Grothendieck en cohomologie des schémas, même si la notion de faisceau sur un espace topologique était déjà connue de Henri Cartan. Pour les besoins de la géométrie algébrique, A. Grothendieck a généralisé la théorie des faiceaux au cas des faisceaux sur un site, mais surtout, lui et son école ont mené une étude systématique des propriétés catégoriques des catégories de faisceaux, qu'ils ont appelées *topos*.

> M. Artin, A. Grothendieck and J.L. Verdier. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Volume 269-270 of *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 1972.

Ce travail contient notamment le fameux *théorème de Giraud* donnant une caractérisation catégorique des topos de faisceaux sur un site.

Dans les années 1960, William Lawvere cherchait à établir une caractérisation catégorique de la catégorie des ensembles. Sa collaboration avec Myles Tierney, qui étudiait les travaux de Grothendieck sur les topos, attira son attention sur les topos de Grothendieck, qui jouissaient de propriétés intéressantes à cet égard. Cela conduisit Lawvere et Tierney à dégager la notion de *topos élémentaire* qui est essentiellement — dans une axiomatique élémentaire et totalement différente — la notion de topos de Grothendieck de laquelle on a évacué toute référence explicite à une quelconque théorie des ensembles. Lawvere présenta cette nouvelle théorie au congrès international de Nice en 1970 :

> F.W. Lawvere. Quantifiers as sheaves. *Procedings of the International Congress on Mathematics, Nice, 1970*, Gauthiers Villars, p. 1506–1511, 1971.

Deux ans plus tard, Tierney donna un cours d'été au CIME, à Varenna en Italie, dans lequel il présenta en détails l'état de ses travaux avec Lawvere :

> M. Tierney. Axiomatic sheaf theory : some constructions and applications. *Procedings of the CIME conference on categories and commutative algebra, Varenna, 1971*, Edizioni Cremonese, p. 249–326, 1973.

Ces travaux contenaient notamment une preuve catégorique de l'indépendance de l'hypothèse du continu. La définition de topos, tout en restant toujours équivalente à elle-même, a connu par la suite divers raffinements intéressants, jusqu'à atteindre la simplicité qu'on lui trouve dans les présentes notes.

Le premier livre sur les topos fut celui de Peter Johnstone :

> P. Johnstone. *Topos theory*. Academic Press, 1977.

Deux livres plus récents méritent d'être signalés. Le premier accorde une attention toute spéciale aux applications de la théorie des topos en topologie :

> S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory*, Springer, 1992.

Le second livre présente en particulier une preuve complète du fait que les topos sont exactement les catégories de modèles des théories intuitionistes des ensembles :

> F. Borceux. *Handbook of categorical algebra III : categories of sheaves*. Cambridge University Press, 1994.

Au moment où cet article est envoyé à l'impression, Peter Johnstone annonce la publication d'un nouvel ouvrage colossal sur la théorie des topos :

> P. Johnstone. *Sketches of an elephant : a topos theory compendium (3 volumes).* Oxford Science Publication, 2002.

Les deux premiers volumes devraient être disponibles fin 2002.

Pour ce qui est des théories algébriques de Mal'cev, l'article original les introduisant est

> A.I. Mal'cev. On the general theory of algebraic systems. *Mat. Sbornik N.S.*, Vol. 35, p. 3–20, 1954.

mais la référence classique est désormais devenue

> J.D.H. Smith. Mal'cev varieties. Volume 554 of *Lecture Notes in Mathematics*, 1976.

La meilleure introduction aux aspects catégoriques des théories de Mal'cev est probablement

> A. Carboni, G.M. Kelly and M.C. Pedicchio. Some remarks on Mal'cev and Goursat categories. *Applied categorical structures*, Vol. 1, p. 135–161, 1993.

Cet article contient en particulier une démonstration du fait que le dual d'un topos est une catégorie de Mal'cev.

Il reste à citer des références pour les divers exemples de dualités évoqués dans ce texte. Je ne chercherai pas ici à retourner à la genèse de ces résultats et me contenterai de références aisément accessibles. Le livre récent

> F. Borceux and G. Janelidze. *Galois theories.* Cambridge University press, 2001.

contient en particulier une présentation classique de la dualité de Stone et de ses applications dans les théories de Galois. Tous les théorèmes de dualité mentionnés dans le présent travail — Pontryagin, Stone, Gelfand, ... et pas mal d'autres qui n'ont même pas été évoqués — sont développés dans le livre

> P. Johnstone. *Stone spaces.* Cambridge University Press, 1982.

Et je ne résiste pas à l'envie de clore cet exposé en vous signalant un livre remarquable que vient de publier mon maître René Lavendhomme :

> R. Lavendhomme. *Lieux du sujet : psychanalyse et mathématique*. Seuil, 2001

La troisième partie, intitulée *Catégories et topos*, donnera à ceux qui le souhaitent une introduction « grand public » à divers thèmes qui ont été développés ci-avant.

Université catholique de Louvain
Département de mathématique
Chemin du Cyclotron
1348 Louvain-la-Neuve
Belgique
e-mail : borceux@math.ucl.ac.be